RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

PAOLO BOERO

Contributi all'analisi spettrale algebrica

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 49 (1973), p. 225-236

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1973__49__225_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 49 (1973)

Contributi all'analisi spettrale algebrica.

PAOLO BOERO (*)

SUMMARY - Let A be a commutative $\mathbb{C}$-algebra with multiplicative identity, and such that $\dim_{\mathbb{C}} A = +\infty$. In this paper, we perform the « spectral analysis » in the category of A-modules. This « spectral analysis » is a generalisation of the particular case when $A = \mathbb{C}[\partial/\partial x_1, ..., \partial/\partial x_n]$ and $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ is regarded as an A-module and the « spectrum » of the function $\exp\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)$ is the point $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{C}^n$. Some applications of the algebraic theory developped in the present paper are given and some suggestions for further investigations are indicated.

0. Introduzione.

Per analogia con il linguaggio usato nell'analisi armonica sui gruppi topologici, l'analisi spettrale in uno spazio X di funzioni (per esempio, $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ o $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ con le rispettive topologie naturali) consiste nella ricerca dei polinomi-esponenziali appartenenti ad un sottospazio chiuso ed invariante di traslazioni di X (v. ad es. [3]).

Lo scopo del presente lavoro è di effettuare l'« analisi spettrale » nella categoria degli A-moduli, A essendo una $\mathbb{C}$-algebra commutativa ed unifera, sviluppando le tecniche introdotte in [1].

Definito (come in [1]), per ogni A-modulo X, $E_\infty(X)$ come sotto-A-modulo di X costituito dagli elementi x tali che $\dim_{\mathbb{C}} Ax$ è finita,

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico dell'Università - Via L. B. Alberti, Genova.

Lavoro eseguito con il contributo del C.N.R. presso l'Istituto Matematico di Nizza, nell'anno 1971.

provo (nel n. 2) che se $x \in E_\infty(X)$, $x \neq 0$, allora esiste $a \in A$ tale che $\dim_{\mathbf{C}} Aax = 1$. Considero poi (nel n. 3) il caso in cui, dato uno spazio vettoriale X sul corpo $\mathbf{C}$, e dati n operatori lineari $D_1, \dots, D_n\colon X \to X$, A è la $\mathbf{C}$-algebra generata da $D_1, \dots, D_n$; definisco la A-base spettrale di X a partire dagli elementi di $E_\infty(X)$ in modo tale che, se ad esempio $X = \mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ e $D_i = \partial/\partial x_i$, si ritrovano — per ogni polinomio-esponenziale $\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i, \dots, x_n) \exp\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j\right)$ — i punti $(a_{i1}, \dots, a_{in}) \in \mathbf{C}^n$.

Sempre nel n. 3 provo che $E_\infty(X)$ si decompone in somma diretta di A-moduli secondo la « base spettrale », e provo inoltre che tale decomposizione spettrale è conservata da ogni A-endomorfismo di X: lo « spettro » di X è costituito di $\mathrm{Hom}_A(X, X)$-moduli. Nel n. 4, applico i risultati del n. 3 per trovare condizioni di esistenza di soluzioni in $E_\infty(X)$ dell'equazione $Tx = v$, ove $v \in E_\infty(X)$ e T è un A-endomorfismo di X.

Come applicazione e sviluppi del presente lavoro, vorrei citare rispettivamente:

— la dimostrazione dell'esattezza del funtore E_∞ su sequenze particolari (v. [2]) (dimostrazione che si riduce alla dimostrazione di esattezza per le componenti della decomposizione di E_∞ in somma diretta secondo la base spettrale)

— lo studio dell'algebra degli endomorfismi continui di $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ o di $\mathcal{H}(\mathbf{C}^n)$ (v. n. 3).

Il presente lavoro è condotto nelle ipotesi algebriche più generali compatibili con i risultati trovati (in particolare, con il teorema 1, di « decomposizione spettrale »: vedere a questo proposito l'osservazione 3).

1. Notazioni e richiamo delle definizioni.

Sia A una $\mathbf{C}$-algebra commutativa, dotata di identità moltiplicativa (notazione: 1), e tale che $\dim_{\mathbf{C}} A = +\infty$. Sia X un A-modulo sinistro; poniamo:

$$_AS_q(X) = \{x / x \in X \text{ e } \dim_{\mathbf{C}} Ax < q + 2\}$$

per ogni $0 \leqslant q \leqslant +\infty$; poniamo:

$$_AE_q(X) = \left\{\sum_i a_i x_i,\ a_i \in A,\ x_i \in {_AS_q(X)}\right\}$$

(in altre parole, ${}_AE_q(X)$ è il sotto-A-modulo di X generato da ${}_AS_q(X)$); infine, se $T: X_1 \to X_2$ è un A-omomorfismo, si definisce ${}_AE_q(T)$ come restrizione di T ad ${}_AE_q(X)$.

In [1] si è provato (sotto l'ulteriore ipotesi che A sia integra) che ${}_AE_q$ è un funtore covariante additivo, esatto a sinistra, della categoria degli A-moduli (sinistri) in sè, subfuntore (in generale proprio) della torsione. Tutto ciò resta valido anche se non si fanno ipotesi di integrità su A (le dimostrazioni in [1] non utilizzano tale ipotesi).

In [1] si è pure visto che se A è l'algebra degli operatori differenziali lineari a coefficienti costanti in n variabili, allora ${}_AE_\infty(C^\infty(\mathbf{R}^n))$ è costituito dalle combinazioni lineari finite, a coefficienti costanti, di prodotti di polinomi per esponenziali. Identico risultato vale se A è una sottoalgebra dell'algebra delle distribuzioni a supporto compatto in $\mathbf{R}^n$ contenente l'algebra degli operatori differenziali lineari a coefficienti costanti.

Quando non sorgano ambiguità, ${}_AE_q(X)$ sarà indicato semplicemente con $E_q(X)$.

2. Sia ancora A una $\mathbf{C}$-algebra soddisfacente alle condizioni del n. 1. Vogliamo provare (con considerazioni elementari) il seguente

LEMMA 1. *Se X è un A-modulo, $f \in X$, $1 < \dim_{\mathbf{C}} Af = p + 1 < +\infty$, allora esiste $a \in A$ tale che* $\dim_{\mathbf{C}} A(af) = 1$.

DIM. Indichiamo con $N(f)$ l'ideale in A annihilatore di f, cioè:

$$N(f) = \{n/n \in A \ \text{ ed } \ nf = 0\}$$

vogliamo anzitutto provare che se $p \geqslant 1$ allora $N(f)$ è non primo. Sia $\{f, a_1 f, a_2 f, \dots, a_p f\}$ una base del $\mathbf{C}$-spazio vettoriale Af (che, per ipotesi, è di dimensione $p+1$). Allora, se $2 \leqslant s \leqslant p+1$ si ha:

$$a_1^i f = c_{i1} f + c_{i2} a_1 f + \sum_{j=3}^{p} c_{ij} a_{j-1} f$$

da ciò si può ricavare una equazione della forma:

$$a_1^s f + d_{s-1} a_1^{s-1} f + \dots + d_0 f = 0$$

ove $2 \leqslant s \leqslant p+1$, ed i coefficienti d_i sono dei numeri complessi. Per la chiusura algebrica di $\mathbb{C}$ si può scrivere anche:

$$\prod_{j=1}^{s} (a_1 - t_j) f = 0 \qquad (t_j \in \mathbb{C})$$

e da ciò segue subito che $N(f)$ è non primo, in quanto $(a_1 - t) f \neq 0$ per ogni $t \in \mathbb{C}$.

Sia ancora $p \geqslant 1$, e siano $a, b \in A$ con $af \neq 0$, $bf \neq 0$ ed $abf = 0$. Necessariamente, $\dim_{\mathbb{C}} A(af) < p+1$, in quanto altrimenti $A(af) = Af$ cioè esiste $c \in A$ tale che $f = caf$, in contraddizione con il fatto che $bf \neq 0$ e $abf = 0$. Se $\dim_{\mathbb{C}} A(af) = 1$, a risolve il problema. Altrimenti possiamo ancora sfruttare il fatto che $N(af)$ è non primo ... e dopo al più p passi si perviene a costruire $a' \in A$ tale che $\dim_{\mathbb{C}} A(a'f) = 1$.

Osservazione 1. È facile costruire un esempio di $\mathbb{R}$-algebra commutativa per la quale il lemma 1 non è valido: la chiusura algebrica del corpo $\mathbb{C}$ è essenziale per la validità del lemma. Anche la commutatività della $\mathbb{C}$-algebra A gioca un ruolo essenziale: se consideriamo la $\mathbb{C}$-algebra M delle matrici quadrate d'ordine 2 a coefficienti complessi, $\mathbb{C}^2$ è un M-modulo, ed ogni $v \in \mathbb{C}^2$ $v \neq 0$ è tale che $\dim_{\mathbb{C}} Mv = 2$.

3. In questo numero, considereremo esclusivamente la seguente situazione: X è uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$; $D_1, \ldots, D_n$ sono operatori lineari di X in X, che commutano tra loro; A è la $\mathbb{C}$-algebra generata da $D_1, \ldots, D_n$. Sia S una base di $E_0(X)$, formata con elementi di $S_0(X)$; ad ogni $b \in S$ possiamo associare $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{C}^n$ tale che $D_i b = p_i b$ $(i = 1, \ldots, n)$. Si ottiene così un sottoinsieme di $\mathbb{C}^n$, che indicheremo con ${}_A B(X)$ e chiameremo *A-base spettrale di X*. Ove non sorgano ambiguità, abbrevieremo come al solito ${}_A B(X)$ scrivendo: $B(X)$. La cardinalità di $B(X)$ è in genere inferiore alla dimensione (su $\mathbb{C}$) di $E_0(X)$, poichè due elementi di $S_0(X)$ possono avere la stessa ennupla associata pur essendo linearmente indipendenti (*esempio*: sia $n = 1$, ed $X = C^\infty(\mathbb{R}^2)$; X può essere pensato come modulo sulla $\mathbb{C}$-algebra generata dalla derivazione rispetto alla variabile x; alle due funzioni — linearmente indipendenti — $f(x, y) = e^x$ e $g(x, y) = e^{x+y}$ è associato il medesimo $p = 1$).

La notazione ${}_A B(X)$ è legittimata dal seguente lemma:

Lemma 2. *${}_A B(X)$ non dipende dalla base di $E_0(X)$ scelta in $S_0(X)$.*

Dim. Sia $f \in S_0(X)$, $f \neq 0$; esistono $f_1, \dots, f_s \in S$ e $c_1, \dots, c_s \in \mathbb{C}$ ($c_i \neq 0$ per ogni $i = 1, \dots, s$) tali che $f = \sum_{i=1}^{s} c_i f_i$. Sia $q_i = (q_{i1}, \dots, q_{in})$ l'elemento di $B(X)$ associato ad f_i ($i = 1, \dots, s$); per ogni $h = 1, \dots, n$ esiste $p_h \in \mathbb{C}$ tale che $(D_h - p_h) f = 0 = \sum_{i=1}^{s} c_i (D_h - p_h) f_i = \sum_{i=1}^{s} c_i (q_{ih} - p_h) f_i$, ed allora $p_h = q_{ih}$ ($i = 1, \dots, s$).

Si può concludere che, se $p = (p_1, \dots, p_n)$, si ha: $p = q_i$ ($i = 1, \dots, s$).

Osservazione 2. Se $T: X \to Y$ è un A-omomorfismo tra A-moduli, si potrebbe considerare la corrispondenza univoca ${}_A B(T)$ indotta da T tra ${}_A B(X)$ e ${}_A B(Y)$, e provare il carattere funtoriale di ${}_A B$. Però in questo lavoro non c'è bisogno di tale strumento.

Supponiamo che sia $p = (p_1, \dots, p_n) \in {}_A B(X)$; poniamo:

$$ {}_A E_{0,p}(X) = \{ f \in E_0(X), \text{ e } D_i f = p_i f \ (i = 1, \dots, n) \} $$

usando l'abbreviazione $E_{0,p}(X)$ quando non sorgono ambiguità. $E_{0,p}(X)$ è un A-modulo: la cosa meno evidente è che, se $a \in A$ ed $f \in E_{0,p}(X)$, allora si ha: $af \in E_{0,p}(X)$; per provarlo osserviamo che se $af \neq 0$ e $D_i(af) = q_i af$ allora si ha: $q_i(af) = D_i(af) = a(D_i f) = a(p_i f) = p_i(af)$, onde $p_i = q_i$ ($i = 1, \dots, n$).

È poi evidente che, per ogni $p \in B(X)$,

$$ E_{0,p}(X) \cap \Big(\bigcup_{\substack{q \neq p \\ q \in B(X)}} E_{0,q}(X) \Big) = \{0\}; $$

tenendo conto delle definizioni, risulta così provato il seguente

Lemma 3. $E_0(X) = \bigoplus_{A\, p \in B(X)} E_{0,p}(X)$.

Sia ancora $p \in B(X)$; poniamo:

$$ {}_A E_{\infty,p}(X) = \{ f / f \in E_\infty(X), \text{ ed } Af \cap S_0(X) \subset E_{0,p}(X) \} $$

usando — come al solito — l'abbreviazione $E_{\infty,p}(X)$ quando non sorgano ambiguità. È facile verificare che $E_{\infty,p}(X)$ è un A-modulo, ed è evidente che

$$ E_{\infty,p}(X) \cap \Big(\bigcup_{\substack{q \neq p \\ q \in B(X)}} E_{\infty,q}(X) \Big) = \{0\}. $$

Vogliamo provare il seguente

TEOREMA 1. $E_\infty(X) = \bigoplus_{A\ \mathfrak{p}\in B(X)} E_{\infty,\mathfrak{p}}(X)$
tenuto conto di quanto già provato in precedenza, è sufficente dimostrare che $f \in E_\infty(X)$, *allora* $Af = \bigoplus_{A\ \mathfrak{p}\in B(Af)} E_{\infty,\mathfrak{p}}(Af)$.

DIM. Sia $N = \bigoplus_{A\ \mathfrak{p}\in B(Af)} E_{\infty,\mathfrak{p}}(Af)$; supponiamo che $Af \neq N$; dato che $Af \supset N$ ciò implica che $Af/N \neq \{0\}$; sia $t \in Af/N$, $t \neq 0$: $\dim_{\mathbf{C}} At < +\infty$, quindi per il lemma 1 si ha: $B(Af/N) \neq \varphi$. Supponiamo ad esempio che sia $0 = (0, \dots, 0) \in B(Af/N)$. Ciò vuol dire che esiste $a \in A$ tale che $af \notin N$, mentre $D_i af \in N$ $(i = 1, \dots, n)$.

Sia $N_0 = E_{\infty,0}(Af)$; $N_1 = \bigoplus_{A\ \substack{\mathfrak{p}\neq 0\\ \mathfrak{p}\in B(Af)}} E_{\infty,\mathfrak{p}}(Af)$: allora $N = N_0 \oplus_A N_1$ e quindi, per ogni $i = 1, \dots, n$, $D_i af = m_{0i} + m_{1i}$ ove $m_{0i} \in N_0$, $m_{1i} \in N_1$. Vogliamo provare che $af \in N$; per fare ciò avremo bisogno dei lemmi seguenti:

LEMMA 4. *Esiste* $m_1 \in N_1$ *tale che* $m_{1i} = D_i m_1$ $(i = 1, \dots, n)$.

DIM. Consideriamo la sequenza:

$$0 \longrightarrow N_1 \xrightarrow{I} N_1^n \xrightarrow{L} N_1^{n(n-1)/2} \tag{$*$}$$

ove $I(h) = (D_1 h, \dots, D_n h)$ ed

$$L(h_1, \dots, h_n) = (D_1 h_2 - D_2 h_1, \dots, D_{n-1} h_n - D_n h_{n-1}) \qquad (h, h_1, \dots, h_n \in N_1).$$

È immediato verificare che $(m_{11}, \dots, m_{1n}) \in \operatorname{Ker} L$; provare il lemma equivale a provare che $(m_{1i}) \in \operatorname{Im} I$. È sufficiente provare che la sequenza $(*)$ è esatta: per ipotesi, I è iniettiva; resta allora da provare che $\dim_{\mathbf{C}} \operatorname{Im} L \geqslant kn - k$, ove $k = \dim_{\mathbf{C}} N_1$. Ciò non presenta difficoltà *nel caso in cui uno degli operatori* D_i: $N_1 \to N_1$ *è isomorfismo*. Supponiamo ad esempio che D_1 sia isomorfismo; sia $\{s_1, \dots, s_k\}$ una base di N_1; i vettori $D_1(0, s_j, 0, \dots, 0)$ $(j = 1, \dots, k)$ generano un sottospazio V_2, in $N_1^{n(n-1)/2}$, di dimensione k. Analogamente, i vettori $D_1(0, 0, s_j, 0, \dots, 0)$ generano un sottospazio V_3 di dimensione k.... Si ottengono così $n-1$ sottospazi V_i contenuti in $\operatorname{Im} L$, e tali che $V_i \cap \left(\bigcup_{z\neq i} V_z\right) = \{0\}$; allora $\bigoplus_{i=2}^{n} V_i$ è un sottospazio di $\operatorname{Im} L$, di dimensione $nk - k$.

Se nessuno degli operatori $D_i\colon N_1 \to N_1$ è isomorfismo, si può costruire una famiglia $\{T_1, \dots, T_n\}$ di operatori tali che $T_1\colon N_1 \to N_1$ è isomorfismo, utilizzare il risultato, testè provato, per la famiglia $\{T_i\}$, ed infine risalire all'esattezza della sequenza $(*)$. *In dettaglio*: possiamo trovare $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbf{C}^n$ tale che $\sum_{i=1}^{n} q_i D_i$ sia isomorfismo (di N_1 in N_1), e tale che $q_i \neq 0$ per ogni i; in effetti, supponiamo (per assurdo) che, assegnato un qualunque $q \in \mathbf{C}^n$, esista $bf \in N_1$ tale che $bf \neq 0$ e $\sum_{i=1}^{n} q_i D_i bf = 0$; per il lemma 1, fissato q si può allora trovare $b'f \in N_1$ tale che $\dim_{\mathbf{C}} Ab'f = 1$ e $\sum_{i=1}^{n} q_i D_i b'f = \left(\sum_{i=1}^{n} q_i r_i\right) b'f = 0$ ove $(r_i) \in \mathbf{C}^n$, r_i non tutti nulli poichè $0 \notin B(N_1)$.

Essendo $\dim_{\mathbf{C}} N_1 < +\infty$, l'insieme $B(N_1)$ è finito, onde esiste solo un numero finito di direzioni (r_i), ed allora esiste una direzione $(q_i) = q$ non coincidente con alcuno degli «assi» di $\mathbf{C}^n$ e non ortogonale ad alcuna delle direzioni (r_i). Fissata q, consideriamo la matrice $C = (c_{ij})$ ove:

$$c_{ij} = \begin{cases} q_1 & \text{se } i = j = 1 \\ q_j & \text{se } i \neq j \\ -q_i & \text{se } i = j \neq 1 \end{cases}$$

è facile verificare che $\det C \neq 0$.

Consideriamo $D = (D_1, \dots, D_n)$ e poniamo $(T_i) = T = CD$; consideriamo la sequenza:

$$(**) \qquad 0 \to N_1 \xrightarrow{I'} N_1^n \xrightarrow{L'} N_1^{n(n-1)/2}$$

ove: $I'(h) = (T_1 h, \dots, T_n h)$; $L'(h_1, \dots, h_n) = (T_1 h_2 - T_2 h_1, \dots, T_{n-1} h_n - T_n h_{n-1})$, $(h, h_1, \dots, h_n \in N_1)$.

T_1 è isomorfismo (di N_1 in sè), quindi I' è iniettiva; per la parte precedente della dimostrazione di questo lemma, la sequenza $(**)$ è esatta; proviamo che dall'esattezza di $(**)$ segue l'esattezza di $(*)$: sia $m = (m_1, \dots, m_n) \in N_1^n$; se $Lm = 0$, si ha: $D_i m_j = D_j m_i$ $(i, j = 1, \dots, n)$; poniamo $m' = (m'_i) = Cm$: è facile verificare che $T_i m'_j = T_j m'_i$ $(i, j = 1, \dots, n)$, onde (per l'esattezza di $(**)$) esiste $x \in N_1$ tale che $m' = I'x$. Da ciò segue $Cm = I'x = (CI)x = C(Ix)$; essendo C non-singolare si può concludere che $m = Ix$.

LEMMA 5. *Esiste $m_0 \in N_0$ tale che $D_i m_0 = m_{0i}$ $(i = 1, \dots, n)$.*

DIM. Per il lemma precedente, $D_i(af) = m_{0i} + D_i m_1$ onde $D_i(af - m_1) = m_{0i} \in N_0$. Supponiamo che $af - m_1 \notin N_0$; allora esiste $b \in A$ tale che $\dim_{\mathbb{C}} b(af - m_1) = 1$, e $D_i b(af - m_1) = q_i(af - m_1)$ ove $q_i \neq 0$ per qualche indice i. Sia $q_1 \neq 0$: $q_1(af - m_1) = D_1 b(af - m_1) = b(D_1(af - m_1)) = bm_{0i} \in N_0$, ma allora $af - m_1 \in N_0$.

Possiamo ora concludere la dimostrazione del teorema: abbiamo trovato $m_1 \in N_1$ tale che $af - m_1 \in N_0$ onde $af \in N_0 \oplus_A N_1 = N$.

OSSERVAZIONE 3. Se non si fanno ipotesi sulla commutatività di A, la definizione di A-base spettrale può essere data lo stesso; però può accadere — v. osservazione 1 — che $E_\infty(X) \neq \{0\}$ mentre $B(X) = \emptyset$, per cui il teorema 1 non è più valido. Inoltre, gli insiemi $E_{0,p}(X)$, $E_{\infty,p}(X)$ non sono più — in generale — degli A-moduli.

DEFINIZIONE 1. *Diciamo A-spettro dell'A-modulo X la famiglia degli A-moduli $E_{\infty,p}(X)$ al variare di p in $B(X)$.*

Il seguente corollario consente di affermare che, dato un A-modulo X, lo A-spettro di X è « conservato » da ogni A-endomorfismo di X; cioè che la decomposizione spettrale di $E_\infty(X)$ ottenuta con il teorema 1 è in realtà una decomposizione di $E_\infty(X)$ in somma diretta di A'-moduli per ogni $\mathbb{C}$-algebra A' (non necessariamente commutativa) tale che

$$A \subset A' \subset \mathrm{Hom}_A(X, X).$$

COROLLARIO 1. *Se $f \in E_{\infty,p}(X)$, allora $e(f) \in E_{\infty,p}(X)$ per ogni $e \in \mathrm{Hom}_A(X, X)$.*

DIM. Cominciamo con il provare che nell'ipotesi che $p = 0 = (0, \ldots, 0)$, per ogni $i = 1, \ldots, n$, esiste $m_i \in \mathbb{N}$ tale che $D_i^{m_i} f = 0$.

Supponiamo per assurdo che $D_1^m f \neq 0$ per ogni $m \in \mathbb{N}$; sia $q = \dim_{\mathbb{C}} Af$: allora $f, D_1 f, D_2 f, \ldots, D_v f$ sono elementi non indipendenti: sia p_1 il primo intero superiore ad 1 tale che $D_1^{p_1} f$ è combinazione lineare a coefficienti complessi di $f, D_1 f, \ldots, D_1^{p_1 - 1} f$; possiamo scrivere:

$$\left(D_1^{p_1} - \sum_{i=0}^{p_1-1} c_i D_1^i\right) f = 0\,;$$

per l'ipotesi fatta, dovrà esistere $a_{11} \in \mathbb{C}$ tale che:

$$D_1^{p_1} - \sum_{i=0}^{p_1-1} c_i D_1^i = (D_1 - a_{11}) \prod_{i=1}^{p_1-1} (D_1 - a_{1i}),$$

ed inoltre $T_1 = \prod_{i=1}^{p_1-1} (D_1 - a_{1i})$ è tale che $T_1 f \neq 0$.

Consideriamo $T_1 f$; possiamo costruire $T_2 f$ e trovare $a_{21} \in \mathbb{C}$ (ma questa volta non necessariamente diverso da 0) tali che $T_2 T_1 f \neq 0$, $(D_2 - a_{21}) T_2 T_1 f = 0 \dots$ e così via fino a trovare T_n ed $a_{n1} \in \mathbb{C}$ tali che $(D_n - a_{n1}) T_n \dots T_1 f = 0$, $T_n \dots T_1 f \neq 0$.

Per ogni $i = 1, \dots, n$ si ha: $(D_i - a_{i1})\ T_n \dots T_1 f = 0$, ed inoltre si ha: $\dim_{\mathbb{C}} A(T_n \dots T_1 f) = 1$, onde $(a_{11}, \dots, a_{n1}) \in B(Af) \subset B\big(E_{\infty,0}(X)\big) = \{0\}$ e ciò in contraddizione con il fatto che $a_{11} \neq 0$.

Sempre nel caso $p = 0$, supponiamo allora che $e(f) \notin E_{\infty,p}(X)$; in base al lemma 1, possiamo trovare $b \in A$ tale che $\dim_{\mathbb{C}} Abe(f) = 1$ e tale che, per qualche indice i, $D_i\big(be(f)\big) = kbe(f)$ $(k \neq 0)$: si arriva ad una contraddizione osservando che, per qualche $m \in \mathbb{N}$, $D_i^m f = 0$ mentre $D_i^m\big(be(f)\big) = k^m be(f)$. Alla conclusione della dimostrazione del corollario si perviene osservando che le considerazioni fatte nel caso $p = 0$ possono adattarsi a qualunque $p \in \mathbb{C}^n$.

Può interessare anche la seguente formulazione del corollario 1, equivalente alla precedente:

COROLLARIO 1 bis. *Se X è un A-modulo, allora lo A-spettro di X è costituito di moduli sull'algebra* $\mathrm{Hom}_A(X, X)$.

Sia X un A-modulo, $B(X)$ la A-base spettrale di X; possiamo dare le seguenti definizioni, di immediato contenuto intuitivo nel caso in cui X è un A-modulo costituito di funzioni di classe C^∞ su $\mathbb{R}^n$, ed A è l'algebra degli operatori differenziali lineari a coefficienti costanti (in n variabili):

DEFINIZIONE 2. *Diciamo X atomico su $B(X)$ se, dato $p \in B(X)$, p è associato ad un solo (a meno di costanti moltiplicative) elemento di ${}_A S_0(X)$.*

Sia $f \in E_{\infty,p}(X)$; diciamo che f è di posto $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{N}^n$ se $\prod_{i=1}^{n} (D_i - p_i)^{w_i} f \neq 0$ (p_i essendo l'i-ma coordinata di p), mentre

$\prod_{i=1}^{n}(D_i - p_i)^{w'_i} f = 0$ per ogni $w' = (w'_1, \ldots, w'_n) \in \mathbf{N}^n$ tale che $w' \neq w$, e: $\sum_{i=1}^{n} w'_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} w_i$.

DEFINIZIONE 3. *Diciamo X completo su $B(X)$ se per ogni $p \in B(X)$ e per ogni $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbf{N}^n$ esiste almeno un elemento $f \in E_{\infty,p}(X)$ di posto w.*

Supponiamo che X sia uno spazio vettoriale su $\mathbf{C}$, e che $D, T\colon X \to X$ siano operatori lineari; poniamo $A = \mathbf{C}[D]$, $A' = \mathbf{C}[T]$; supponiamo che X sia atomico e completo sulla base $\mathbf{C}$ sia come A-modulo che come A'-modulo. Quali relazioni sussistono allora tra ${}_AE_\infty(X)$ ed ${}_{A'}E_\infty(X)$?

Possono darsi due casi: o D, T commutano tra loro (ed allora si verifica facilmente che ${}_AE_\infty(X) = {}_{A'}E_\infty(X)$ e che le « decomposizioni spettrali » coincidono; al più possono essere diversi i moduli associati allo stesso punto della base spettrale $\mathbf{C}$); oppure D e T non commutano tra loro. L'esempio seguente indica che — in tal caso — non si può dire molto sulle relazioni tra ${}_AE_\infty(X)$ ed ${}_{A'}E_\infty(X)$.

ESEMPIO. Sia $X = C^\infty(\mathbf{R})$; sia D l'ordinaria derivazione; definiamo $T\colon X \to X$ ponendo: $\big(T(f)\big)(x) = e^x f'(x)$ $(f \in X)$; poniamo $A = \mathbf{C}[D]$; $A' = \mathbf{C}[T]$; è facile verificare che X è atomico e completo sulla base $\mathbf{C}$ sia come A-modulo che come A'-modulo; le uniche funzioni in X appartenenti sia a ${}_AE_\infty(X)$ che a ${}_{A'}E_\infty(X)$ sono le funzioni costanti.

Evidentemente, considerazioni ed esempi analoghi ai precedenti possono essere fatti per n qualunque. Le considerazioni e l'esempio precedente pongono — già nel caso $n = 1$ — un certo numero di problemi che non mi risulta siano stati finora risolti. Tra essi, mi pare che le questioni più naturali siano le seguenti:

I) se $C^\infty(\mathbf{R})$ è A- ed A'-modulo atomico e completo sulla base $\mathbf{C}$, quali relazioni sussistono tra D e T, (ove $A = \mathbf{C}[D]$ ed $A' = \mathbf{C}[T]$)?

II) è possibile « rappresentare » in modo semplice e naturale ogni endomorfismo continuo di $C^\infty(\mathbf{R})$ a partire dalle algebre $A = \mathbf{C}[T]$ tali che T è un endomorfismo continuo, e $C^\infty(\mathbf{R})$ è atomico e completo, come A-modulo, sulla base $\mathbf{C}$?

4. Applicazioni.

Sia A come nel n. 3; proviamo il seguente:

TEOREMA 2. *Sia X un A-modulo atomico e completo sulla base $B(X)$; sia $T \in \mathrm{Hom}_A(X, X)$. Sono condizioni equivalenti;*

i) $T(E_\infty(X)) = E_\infty(X)$;

ii) *per ogni* $p \in B(X)$, $T(E_{\infty,p}(X)) = E_{\infty,p}(X)$;

iii) *per ogni* $p \in B(X)$, $E_{\infty,p}(\mathrm{Ker}\, T) \neq E_{\infty,p}(X)$.

DIM. È ovvia l'equivalenza delle prime due condizioni, in base alle definizione ed al teorema 1; come pure il fatto che dalla seconda condizione segue la terza, in quanto T « conserva lo spettro ». Resta da verificare che la terza condizione implica la seconda. Per questo, è comodo utilizzare la nozione di « posto » di un elemento di $E_{\infty,p}(X)$: la condizione di completezza di X su $B(X)$ assicura che — nel caso $p = (0, \dots, 0) = 0$ — per ogni $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbf{N}^n$ esiste almeno un elemento in $E_{\infty,0}(X)$ che occupa il posto w; e, d'altra parte, la condizione di atomicità di X su $B(X)$ assicura che se $f, g \in E_{\infty,0}(X)$ occupano lo stesso posto w, allora esiste $k \in \mathbf{C}$, $k \neq 0$ tale che $\prod_{i=1}^{n} D_i^{w_i}(f + kg) = 0$: infatti $D_j \prod_{i=1}^{n} D_i^{w_i} f = 0$ e $D_j \prod_{i=1}^{n} D_i^{w_i} g = 0$ $(j = 1, \dots, n)$, onde $\prod_{i=1}^{n} D_i^{w_i} f$ e $\prod_{i=1}^{n} D_i^{w_i} g$ differiscono per una costante moltiplicativa.

Per verificare che la terza condizione implica la seconda, supponiamo ancora (l'ipotesi non è restrittiva, e serve solo a semplificare le notazioni) che $p = 0$; supponiamo che sia $T(E_{\infty,0}(X)) \neq E_{\infty,0}(X)$. Allora, esiste $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbf{N}^n$ tale che non vi è alcun elemento di $T(E_{\infty,0}(X))$ che occupi i posti $w' = (w'_1, \dots, w'_n)$ ove $w'_i \geqslant w_i$ per ogni indice i. Pertanto si ha: $\prod_{i=1}^{n} D_i^{w_i} f = 0$ per ogni $f \in T(E_{\infty,0}(X))$, e quindi $E_{\infty,0}\left(\mathrm{Ker} \prod_{i=1}^{n} D_i^{w_i} T\right) = E_{\infty,0}(X)$. Supponiamo allora che $E_{\infty,0}(\mathrm{Ker}\, T) \neq$ $\neq E_{\infty,0}(X)$; esisterà $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{N}^n$ tale che se $z'_i \geqslant z_i$ per ogni indice i non vi è nessun elemento in $E_{\infty,0}(\mathrm{Ker}\, T)$ che occupi la posizione $z' = (z'_i, \dots, z'_n)$. Consideriamo, in $E_{\infty,0}(X)$, un elemento g che occupa la posizione $w + z$ (l'esistenza di un tale elemento è assicurata dalla completezza di X); l'elemento $\prod_{i=1}^{n} D_i^{w_i} g$ non appartiene a $\operatorname{Ker} T$, ma ciò è assurdo, in quanto $E_{\infty,0}\left(\operatorname{Ker} \prod_{i=1}^{n} D_i^{w_i}\right) = E_{\infty,0}(X)$.

COROLLARIO 2. *Sia X un A-modulo atomico e completo su $B(X)$; supponiamo X dotato di una topologia che lo rende A-modulo topologico. Supponiamo che — per tale topologia — $E_{\infty,p}(X)$ sia denso in X per ogni $p \in B(X)$. Allora, se $T \neq 0$ è un A-endomorfismo continuo di X, si ha: $T(E_\infty(X)) = E_\infty(X)$.*

DIM. Il corollario è conseguenza immediata dei teoremi 1 e 2.

Il corollario 2 consente (come caso particolare) di ritrovare subito — in forma unitaria ed in modo diretto, cioè senza far ricorso alla dualità — i seguenti risultati noti (a, b, c):

considerismo l'equazione di convoluzione $T * x = v$; per ogni v polinomio-esponenziale esiste una soluzione x polinomio esponenziale quando:

a) $T \in [\mathcal{H}(\mathbf{C}^n)]'$, v polinomio-esponenziale in n variabili complesse;

b) T distribuzione a supporto compatto in $\mathbf{R}^n$, v polinomio-esponenziale in n variabili reali;

c) $T = M/N$, ove M, N sono distribuzioni a supporto compatto in $\mathbf{R}^n$ tali che il quoziente delle loro trasformate di Fourier è analitico su $\mathbf{C}^n$, e v è un polinomio-esponenziale in n variabili reali.

BIBLIOGRAFIA

[1] P. BOERO, *Metodi omologici elementari ..., II*, Rend. Sem. Mat. Padova, XLI, (1968), 349-361.

[2] *Sur le spectre de l'union et du quotient des varietés de fonctions entières sur* $\mathbf{C}^2$, Pub. Math., Nice, 1971.

[3] L. EHRENPREIS, *Mean periodic functions, I*, Am. J. Math., LXXVII, (1955), 293-328.

[4] B. MALGRANGE, *Existence et approximation des solutions ...*, Ann. Inst. Fourier, VI (1955-56), 271-355.

Manoscritto pervenuto in redazione il 1° settembre 1972.