

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

CARLA MASSAZA

**Sugli anelli che soddisfano alla condizione
topologica di Artin-Rees**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 49 (1973), p. 205-215

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1973__49__205_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1973__49__205_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Sugli anelli che soddisfano alla condizione topologica di Artin-Rees.

CARLA MASSAZA (*)

SUMMARY - In the present paper, we study the rings and modules satisfying a topological version of the classical Artin-Rees condition: we generalize to a non noetherian situation some properties of modules over noetherian rings, which lead us to the concept of «generalized Zariski-ring».

Introduzione.

Il classico lemma di Artin-Rees può enunciarsi così: se A è un anello noetheriano, α è un suo ideale ed F è un sottomodulo di un A -modulo E di tipo finito, allora si ha: $\alpha(\alpha^n E \cap F) = (\alpha^{n+1} E) \cap F$, per n sufficientemente grande. Un corollario immediato è il seguente: nelle ipotesi suddette, si ha $\alpha^n E \cap F \subseteq \alpha F$, per n opportuno. Questo ultimo enunciato può anche essere espresso in una forma equivalente, che è nota come versione topologica del lemma di Artin-Rees: (α) se A è noetheriano, α è un suo ideale ed E è un A -modulo di tipo finito, la topologia α -adica di E induce la topologia α -adica su ogni sottomodulo F di E .

In questo lavoro diremo che un A -modulo E soddisfa alla *condizione topologica di Artin-Rees* (brevemente: E è un A -modulo A.R.), se E soddisfa alla tesi di (α) , per ogni ideale α di A . Dalla definizione precedente si trae, in particolare, la nozione di anello A.R.: è dunque un anello A tale che per ogni coppia di ideali $\alpha, \mathfrak{b}$ la topologia

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Geometria dell'Università - Via Principe Amedeo 8, 10123 Torino.

Lavoro eseguito con contributo del C.N.R., nell'ambito del G.N.S.A.G.A.

α -adica di b è indotta dalla topologia α -adica di A . Lo scopo del lavoro è quello di mettere in evidenza alcune proprietà degli anelli A.R.

Nel n. 1 si definiscono gli A -moduli A.R. mediante le due condizioni (algebraica e topologica) tra loro equivalenti, e si danno esempi per chiarire le relazioni tra la condizione A.R. e le condizioni di noetherianità (degli anelli) e di finitezza (dei moduli).

Nel n. 2 si prova che la condizione A.R. si conserva nel passaggio ad anelli quozienti e ad anelli di frazioni, mentre non è una proprietà di carattere locale e non si conserva per estensioni polinomiali.

Nel n. 3 si estendono ai moduli A.R. sopra un anello A.R. varie proprietà delle topologie α -adiche, ben note per moduli di tipo finito su un anello noetheriano; in analogia al caso noetheriano, esse ci portano alla definizione di anello di Zariski generalizzato e ci consentono inoltre di stabilire la seguente proposizione: siano A un anello A.R., α_1 ed α_2 ideali di A tali che risulti $\alpha_1 \subseteq \alpha_2$; allora l'anello A , se è separato e completo per la topologia α_2 -adica, è anche tale per la topologia α_1 -adica. Il lavoro si conclude con un esempio di anello non soddisfacente a quest'ultima proprietà.

1. Tutti gli anelli che si considerano sono supposti commutativi e dotati di unità.

LEMMA 1. *Le condizioni seguenti si equivalgono:*

- (a) *Per ogni ideale α dell'anello A ed ogni sottomodulo F dell' A -modulo E , la topologia α -adica di E induce in F la topologia α -adica di F ;*
- (b) *Per ogni ideale α dell'anello A ed ogni sottomodulo F dell' A -modulo E , esiste un numero naturale n tale che sia: $\alpha^n E \cap F \subseteq \alpha F$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia σ la topologia indotta in F dalla topologia α -adica di E , avente cioè come base di 0-intorni l'insieme di ideali $\{\alpha^n E \cap F\}_{n \in \mathbb{N}}$, e sia $\mathcal{T}$ la topologia α -adica di E , avente come base di 0-intorni l'insieme di ideali $\{\alpha^n F\}_{n \in \mathbb{N}}$. Dall'inclusione $\alpha^n E \cap F \supseteq \alpha^n F$ segue che $\mathcal{T}$ è più fine di σ . Queste due topologie coincidono se e solo se, per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che sia $\alpha^m E \cap F \subseteq \alpha^n F$. Ora, tale condizione equivale manifestamente alla seguente: esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $\alpha^n E \cap F \subseteq \alpha F$. Di qui l'asserto.

DEFINIZIONE. Si dice che un A -modulo E *soddisfa alla condizione topologica di Artin-Rees* (brevemente: E è A.R.) se per E valgono le condizioni equivalenti (a) e (b). In particolare, un anello A è A.R. se è un A -modulo A.R.

Dal lemma 1 segue:

COROLLARIO 2. *Un anello A è A.R. se e solo se, per ogni coppia $\alpha, \mathfrak{b}$ di ideali di A , esiste un numero naturale n tale che risulti: $\alpha^n \cap \mathfrak{b} \subseteq \alpha\mathfrak{b}$, $\alpha \cap \mathfrak{b}^n \subseteq \alpha\mathfrak{b}$.*

OSSERVAZIONE 1. La locuzione abbreviata E è A.R. è chiaramente imprecisa. Infatti essa equivale alla validità per R della versione topologica del lemma di Artin-Rees che è (almeno apparentemente) più debole della condizione algebrica riportata all'inizio dell'introduzione. Sarebbe stato quindi più corretto denominare con A.R. gli A -moduli soddisfacenti alla tesi del lemma di Artin-Rees e con t.A.R. quelli soddisfacenti alla versione topologica del detto lemma. Tuttavia abbiamo preferito usare la notazione A.R. per due motivi: 1) nel nostro lavoro ci basiamo esclusivamente sulla condizione topologica e non sull'altra; 2) non possiamo del tutto escludere che le due condizioni coincidano, non essendo riusciti a provare il contrario.

OSSERVAZIONE 2. *Se A è un anello A.R., tutti gli ideali di A sono A -moduli A.R.* Infatti siano α e $\mathfrak{b}$ ideali di A ; i sotto- A -moduli di $\mathfrak{b}$ sono gli ideali $\mathfrak{c}$ di A contenuti in $\mathfrak{b}$; dall'ipotesi che A sia A.R. segue che: $\alpha^n \cap \mathfrak{c} \subseteq \alpha\mathfrak{c}$, per n opportuno, e quindi: $\alpha^n \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c} \subseteq \alpha\mathfrak{c}$.

OSSERVAZIONE 3. Non è difficile verificare che un A -modulo E è A.R. se la condizione (b) del lemma 1 è verificata per le coppie α, F , dove $F \subseteq \alpha E$.

Esaminiamo ora alcuni esempi, che chiariscano le relazioni tra la condizione A.R. e le condizioni di noetherianità (degli anelli) e di finitezza (dei moduli), che intervengono nelle ipotesi del lemma classico di Artin-Rees (cfr. [2], cap. 3, cor. 1, pag. 61).

ESEMPIO 1. *Dominio d'integrità A.R., ma non noetheriano.*

Sia A un anello di valutazione non discreta e di rango 1 (cfr. [3], cap. 3, § 4, n. 4): tale anello non è noetheriano (cfr. [3], cap. 3, pag. 109, prop. 9), ma soddisfa alla tesi del lemma di Artin-Rees. Infatti si verifica facilmente che negli anelli di valutazione di rango 1 ogni ideale proprio genera la topologia naturale della valutazione, e quindi, se α e $\mathfrak{b}$ sono due ideali propri qualunque, esiste un numero naturale n_0 tale che sia $\alpha^{n_0} \subseteq \mathfrak{b}$; risulta dunque, per $n \geq n_0$: $\alpha(\alpha^n \cap \mathfrak{b}) = \alpha^{n+1} = \alpha^{n+1} \cap \mathfrak{b}$.

ESEMPIO 2. *Anelli A.R., noetheriani e non, i cui moduli sono tutti A.R.*

Sia A un anello con ideali propri tutti nilpotenti. Allora ogni sua topologia di tipo α -adico si riduce alla topologia discreta, e perciò ogni A -modulo E soddisfa alla tesi del lemma di Artin-Rees: infatti, per ogni ideale α di A , esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che sia $\alpha^{n_0} = (0)$, e quindi, detto F un qualunque sottomodulo di E , risulta, per $n \geq n_0$: $\alpha(\alpha^n E \cap F) = (0) = \alpha^{n+1} E \cap F$.

a) L'anello $k[X]/(X^2) \simeq k[x]$, dove k è un campo, è noetheriano, e inoltre il suo unico ideale proprio (x) ha quadrato nullo: abbiamo così un esempio di *anello noetheriano, i cui moduli sono tutti A.R.*

b) Nell'anello $k[X_n]_{n \in \mathbb{N}}$ dei polinomi nelle indeterminate $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, a coefficienti in un campo k , consideriamo l'ideale α , formato dai polinomi di ordine ≥ 2 (*). L'anello quoziente $A = k[X_n]_{n \in \mathbb{N}}/\alpha \simeq k[x_n]_{n \in \mathbb{N}}$ non è noetheriano e i suoi ideali propri sono tutti nilpotenti. Infatti un qualunque elemento di A si può scrivere, in modo unico, come polinomio di grado ≤ 1 nelle x_n , e quindi:

1) A non è noetheriano, perchè l'ideale $\mathfrak{m} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ non è finitamente generabile;

2) ogni ideale $\mathfrak{b}$ di A contenente un elemento con termine noto non nullo è improprio, in quanto:

$$\begin{aligned} a_0 + \sum a_n x_n \in \mathfrak{b} &\Rightarrow (\forall h \in \mathbb{N}) x_h (a_0 + \sum a_n x_n) = \\ &= a_0 x_h \in \mathfrak{b} \Rightarrow (\forall h \in \mathbb{N}) x_h \in \mathfrak{b} \Rightarrow \sum a_n x_n \in \mathfrak{b} \Rightarrow a_0 \in \mathfrak{b}, \end{aligned}$$

dove a_0 è un elemento invertibile; pertanto ogni ideale proprio ha come quadrato l'ideale nullo. Abbiamo così un esempio di *anello non noetheriano, i cui moduli sono tutti A.R.*

ESEMPIO 3. *Anello noetheriano i cui moduli non sono tutti A.R.*

Siano $\mathbb{Z}$ l'anello degli interi relativi ed $E = \mathbb{Z}[X_n]_{n \in \mathbb{N}}$ l'insieme dei polinomi, a coefficienti in $\mathbb{Z}$, nelle indeterminate $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$; E , pensato come $\mathbb{Z}$ -modulo, non è A.R. Consideriamo infatti l'ideale $\alpha = 5\mathbb{Z}$ ed il sottomodulo F di base $\{5^n X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$: per ogni numero naturale n , l'elemento $5^n X_n$ sta in $\alpha^n E \cap F$, ma non appartiene ad αF .

ESEMPIO 4. *Anello A.R. i cui moduli di tipo finito non sono tutti A.R.*

(*) Diciamo ordine di un polinomio il grado minimo dei suoi monomi.

Siano: A l'anello di una valutazione v , avente come gruppo ordinato $(\mathbf{R}, +)$ (per l'esistenza, cfr. [3], cap. 3, pag. 107, es. 6), $\mathfrak{m}$ l'ideale massimo di A , $E = A \oplus A$. Dall'esempio 1 segue che A è un anello A.R., e chiaramente E è un A -modulo finito, ma tuttavia E non è A.R., in quanto il sottoinsieme F di E così definito: $F = \{(f_1, f_2): v(f_1) > 1, v(f_2) \geq 1\}$ è un sottomodulo di E tale che, per ogni $n \in \mathbf{N}$, risulta: $\mathfrak{m}^n E \cap F \not\subseteq \mathfrak{m} F$; infatti, se x è un elemento di A di valutazione nulla ed a_n è un elemento di A con valutazione $1/n$, l'elemento $z_n = a_n^n(x, x)$ appartiene ad $\mathfrak{m}^n E \cap F$, in quanto: $a_n^n(x, x) \in \mathfrak{m}^n E$ per definizione, $a_n^n(x, x) \in F$, perchè $v(a_n^n x) = 1$; tuttavia $z_n \notin \mathfrak{m} F$, perchè gli elementi (b_1, b_2) di $\mathfrak{m} F$ sono tali che: $v(b_1) > 1, v(b_2) > 1$.

2. In questo paragrafo intendiamo esaminare il comportamento della condizione A.R. nel passaggio al quoziente, alle frazioni e ai polinomi.

È immediato verificare che vale il seguente

LEMMA 3. *Sia $f: G \rightarrow G'$ un omomorfismo tra gruppi. Per ogni coppia H_1, H_2 di sottogruppi di G , risulta:*

$$f(H_1) \cap f(H_2) = f(H_1 \cap (H_2 + \ker f)).$$

PROPOSIZIONE 4. *L'anello quoziente di un anello A.R. è anch'esso A.R. L' A -modulo quoziente di un A -modulo A.R. è anch'esso A.R.*

DIMOSTRAZIONE. Siano: A un anello A.R., $\mathfrak{i}$ un suo ideale, $\pi: A \rightarrow A/\mathfrak{i}$ l'omomorfismo canonico di A sul suo anello quoziente, $\tilde{\mathfrak{a}}, \tilde{\mathfrak{b}}$ ideali di $A/\mathfrak{i}$. Gli insiemi $\mathfrak{a} = \pi^{-1}(\tilde{\mathfrak{a}})$ e $\mathfrak{b} = \pi^{-1}(\tilde{\mathfrak{b}})$ sono due ideali di A e quindi, poichè A è A.R., esiste n_0 per cui risulta: $\mathfrak{a}^{n_0} \cap \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}\mathfrak{b}$; ne segue che $\pi(\mathfrak{a}^{n_0} \cap \mathfrak{b}) \subseteq \pi(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$. D'altra parte, essendo $\mathfrak{b} \supseteq \ker \pi$, per il lemma 3, si ha: $\pi(\mathfrak{a}^{n_0} \cap \mathfrak{b}) = \pi(\mathfrak{a}^{n_0}) \cap \pi(\mathfrak{b})$. Se ne conclude che: $\pi(\mathfrak{a}^{n_0}) \cap \pi(\mathfrak{b}) \subseteq \pi(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$, ossia, tenendo conto che π è un omomorfismo e che $\pi(\mathfrak{a}) = \tilde{\mathfrak{a}}, \pi(\mathfrak{b}) = \tilde{\mathfrak{b}}: \tilde{\mathfrak{a}}^{n_0} \cap \tilde{\mathfrak{b}} \subseteq \tilde{\mathfrak{a}}\tilde{\mathfrak{b}}$; pertanto anche $A/\mathfrak{i}$ è un anello A.R.

La dimostrazione relativa agli A -moduli è del tutto analoga.

PROPOSIZIONE 5. *Un sottomodulo di un A -modulo A.R. è anch'esso A.R.*

DIMOSTRAZIONE. Siano: M un A -modulo A.R., $\mathfrak{a}$ un ideale di A , E un sottomodulo di M ed F un sottomodulo di E ; poichè F è anche

un sottomodulo di M , esiste n tale che risulti: $a^n M \cap F \subseteq aF$, e quindi: $a^n E \cap F \subseteq aF$.

OSSERVAZIONE. In generale, un sottoanello di un anello A.R. non è un anello A.R. Basta considerare, ad esempio, un dominio d'integrità non A.R. come sottoanello del suo campo dei quozienti.

PROPOSIZIONE 6. *Il localizzato di un anello A.R. rispetto ad un sistema moltiplicativo è un anello A.R.*

Il localizzato di un A -modulo A.R. rispetto ad un sistema moltiplicativo S è un A_S -modulo A.R.

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che l'operazione di localizzazione è permutabile con l'intersezione di A -moduli e con il prodotto di un ideale per un modulo (cfr. [1], cap. 2, pagg. 89 e 98).

OSSERVAZIONE. *La condizione A.R. non è di carattere locale.* Costruiamo infatti un anello non soddisfacente alla condizione A.R., i cui localizzati rispetto agli ideali primi sono tutti noetheriani, e quindi A.R. Notiamo che, in particolare, otterremo così un esempio di anello non noetheriano, i cui localizzati sono tutti noetheriani. Siano $\mathbf{Z}[X_n]_{n \in \mathbf{N}}$ l'anello dei polinomi a coefficienti interi, nelle indeterminate $\{X_n\}_{n \in \mathbf{N}}$, ed $\mathfrak{a}$ il suo ideale di base $\{p_n X_n\}_{n \in \mathbf{N}}$, dove p_n indica l' n -esimo numero primo, in ordine di grandezza crescente.

L'anello $A = (\mathbf{Z}[X_n]_{n \in \mathbf{N}}/\mathfrak{a}) \simeq \mathbf{Z}[x_n]_{n \in \mathbf{N}}$ soddisfa alle condizioni volute, in quanto:

a) A non è A.R. Consideriamo infatti gli ideali:

$$\begin{aligned} \mathfrak{b} &= (x_1 x_2, x_3 x_4 x_5, \dots, x_{h+1} x_{h+2} \dots x_{h+n+1}, \dots), \\ \mathfrak{c} &= (x_1^2, x_2^2, x_3^3, x_4^3, x_5^3, \dots, x_{h+1}^{n+1}, x_{h+2}^{n+1}, \dots, x_{h+n+1}^{n+1}, \dots), \end{aligned}$$

dove $h = (n^2 + n - 2)/2$; si vede che l'elemento $z_{n+1} = x_{h+1}^{n+1} \dots x_{h+n+1}^{n+1}$ appartiene a $\mathfrak{b}^{n+1} \cap \mathfrak{c}^{n+1}$, mentre non appartiene a $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$;

b) i localizzati di A rispetto ai suoi ideali primi sono tutti noetheriani. Infatti gli ideali primi di A sono le immagini, mediante la proiezione canonica $\pi: \mathbf{Z}[X_n]_{n \in \mathbf{N}} \rightarrow A$, degli ideali primi contenenti $\mathfrak{a}$; questi ultimi, dovendo contenere $p_n X_n$, contengono uno almeno tra p_n ed X_n , e perciò sono di uno dei tipi seguenti:

$$1) \mathfrak{p}_1 = (X_n)_{n \in \mathbf{N}},$$

2) $\mathfrak{p}_2 = (X_n, p_{n_0}, g(X_{n_0}))_{n_0 \neq n_0}$, dove $g(X_{n_0})$ è un polinomio irriducibile in $\mathbf{Z}[X_{n_0}]$, eventualmente nullo.

Dall'isomorfismo $\mathbf{Z}[x_n]_{\mathfrak{p}} \simeq (\mathbf{Z}[X_n]_{\pi^{-1}(\mathfrak{p})}/\mathfrak{a}_{\pi^{-1}(\mathfrak{p})})$ segue che i localizzati in questione sono isomorfi al campo razionale, oppure sono anelli del tipo $\mathbf{Z}[X_{n_0}]_{(p_{n_0} \mathfrak{a}(X_{n_0}))}/(p_{n_0} X_{n_0})$: pertanto sono noetheriani.

Notiamo infine che *la condizione A.R. non si conserva per estensioni polinomiali*. Proveremo infatti che *l'anello dei polinomi a coefficienti in un certo anello di valutazione non discreta di rango 1* (cfr. n. 1, es. 1) *non è A.R.*

Siano: k un campo, Q il gruppo ordinato additivo dei razionali, v una valutazione di k avente Q come gruppo ordinato, A l'anello di v , $A[X]$ l'anello dei polinomi a coefficienti in A . Prolunghiamo v ad una valutazione $v': k(X) \rightarrow \mathbf{Z} \times Q$, dove $\mathbf{Z} \times Q$ ha ordinamento lexicografico, ponendo $v'(X) = (1, 0)$ (cfr. [3], cap. 6, pag. 160, lemma 1). Detto A' l'anello di valutazione di v' , risulta $A[X] \subseteq A'$, in quanto $v'(\sum_{h=0}^n a_h X^h) \geq \inf(v(a_h) + hv'(X)) \geq 0$. In A' consideriamo gli ideali seguenti:

$\mathfrak{a}' =$ insieme degli elementi di valutazione positiva,

$\mathfrak{b}' =$ insieme degli elementi di valutazione $\geq (1, 1)$,

e costruiamo in $A[X]$ gli ideali $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}' \cap A[X]$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}' \cap A[X]$. Se $z \in A$ è tale che $v(z) = (n-1)^{-1}$, risulta: $z \in \mathfrak{a}$, $z^{n-1}X \in \mathfrak{a}^n$ e inoltre $z^{n-1}X \in \mathfrak{b}$, in quanto $v'(z^{n-1}X) = (1, 1)$, mentre $z^{n-1}X \notin \mathfrak{a}\mathfrak{b}$, essendo, per ogni $a \in \mathfrak{a}$, $b \in \mathfrak{b}$, $v'(ab) = v'(a) + v'(b) > (1, 1)$. Se ne conclude che, per ogni n , si ha: $\mathfrak{a}^n \cap \mathfrak{b} \not\subseteq \mathfrak{b}\mathfrak{a}$, e quindi $A[X]$ non è A.R.

3. In [2], cap. 3, n. 2, 3, vengono dimostrate alcune notevoli proprietà delle topologie α -adiche sugli anelli noetheriani (prop. 5, corollario, prop. 6). In questo numero mostriamo che quelle proprietà sono valide, più generalmente, quando si sostituiscono, negli enunciati di [2], «anello noetheriano» con «anello A.R.» ed « A -modulo finito» con « A -modulo A.R.». I teoremi di [2] conducono alla definizione di anello di Zariski; i nuovi ci condurranno alla definizione di *anello di Zariski generalizzato*.

Esaminando le dimostrazioni delle suddette proposizioni di [2], ci si accorge che le condizioni di noetherianità degli anelli e di finitezza dei moduli intervengono soltanto:

a) per dire che si tratta di anelli ed A -moduli A.R.,

b) per dire che gli anelli quozienti di quelli considerati sono an-

cora A.R. (in quanto noetheriani) e che i sottomoduli ed i quozienti dei moduli considerati sono ancora A.R. (in quanto finiti su un anello noetheriano).

Poichè la condizione A.R. si conserva passando ai quozienti (prop. 4) ed ai sottomoduli (prop. 5), da quanto ora osservato segue che gli enunciati e le dimostrazioni di [2] rimangono valide sostituendo le condizioni di noetherianità degli anelli e di finitezza dei moduli con la condizione A.R. Riportiamo dunque i nuovi enunciati, senza dimostrazione.

PROPOSIZIONE 7. *Siano A un anello A.R., α un ideale di A , E un A -modulo A.R. Il sottomodulo $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \alpha^n E$, chiusura di $\{0\}$ nella topologia α -adica di E , è l'insieme degli elementi $x \in E$ per i quali esiste $a \in \alpha$ tale che risulti $(1 - a)x = 0$.*

Il classico teorema di Krull per le topologie lineari degli anelli noetheriani si generalizza dunque nel modo seguente:

COROLLARIO 8. *Siano A un anello A.R. ed α un suo ideale. L'ideale $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \alpha^n$, chiusura di $\{0\}$ nella topologia α -adica di A , è l'insieme degli elementi $x \in A$ per i quali esiste $a \in \alpha$ tale che sia $(1 - a)x = 0$. In particolare, la topologia α -adica è separata se e solo se l'insieme $1 + \alpha$ non possiede divisori dello zero.*

OSSERVAZIONE. Dal corollario precedente segue che ogni topologia α -adica su un dominio d'integrità A.R. è separata. In particolare, troviamo che ogni topologia α -adica su un anello di valutazione di rango 1 è separata (d'altra parte, si vede facilmente che ogni topologia siffatta e non discreta coincide con quella naturale della valutazione).

Il teorema seguente generalizza la proposizione 6 di [2], pag. 66, che porta alla definizione di anello di Zariski.

TEOREMA 9. *Siano A un anello A.R. ed α un suo ideale. Le proprietà seguenti si equivalgono:*

- a) α è contenuto nel radicale di A .
- b) Ogni A -modulo A.R. è separato per la topologia α -adica.
- c) Se E è un A -modulo A.R., ogni suo sottomodulo è chiuso nella topologia α -adica di E .
- d) Ogni ideale massimale di A è chiuso per la topologia α -adica.

Poichè gli anelli noetheriani sono particolari anelli A.R., dal teorema 9 si ottiene il seguente enunciato, che raffina in parte la prop. 6 di [2], pag. 66.

COROLLARIO 10. *Se A è un anello noetheriano ed α è un suo ideale contenuto nel radicale di A , allora ogni A -modulo E di tipo A.R. è separato per la topologia α -adica ed ogni sottomodulo di E è chiuso nella topologia α -adica di E .*

Dal teorema 9 otteniamo anche la seguente estensione agli anelli A.R. di una proprietà valida negli anelli noetheriani:

COROLLARIO 11. *Se A è un anello A.R. ed α è un suo ideale contenuto nel radicale di A , ogni ideale di A è separato per la topologia α -adica ed è chiuso nella topologia α -adica di A .*

DEFINIZIONE. Diciamo che un anello topologico A è un *anello di Zariski generalizzato* se è A.R. e se esiste un ideale α , di definizione per la topologia, per il quale valgano le condizioni equivalenti del teorema 9.

OSSERVAZIONI.

1) Un anello A.R. separato e completo per una topologia α -adica è di Zariski generalizzato, in quanto α risulta contenuto nel radicale di A .

2) L'anello quoziente di un anello di Zariski generalizzato è ancora un anello di Zariski generalizzato, in quanto sia la condizione A.R. che la condizione $\alpha \subseteq \text{rad } A$ si conservano passando al quoziente.

3) Un anello A semilocale ed A.R., di radicale $\mathfrak{r}$, munito della topologia $\mathfrak{r}$ -adica, è un anello di Zariski generalizzato.

Dal corollario 11 si ottengono le seguenti proprietà topologiche, che generalizzano analoghe proprietà degli anelli noetheriani:

PROPOSIZIONE 12. *Siano: A un anello A.R., $\alpha_1 \subseteq \alpha_2 \subseteq \text{rad } A$ due suoi ideali, $\hat{A}_1, \hat{A}_2$ i completamenti di A rispetto alle topologie α_1 -adica ed α_2 -adica rispettivamente. Il prolungamento per continuità dell'identità $i: A \rightarrow A$ è una funzione iniettiva $\hat{i}: \hat{A}_1 \rightarrow \hat{A}_2$:*

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dal corollario 11 e dalla prop. 9 di [4], cap. 3, pag. 45.

COROLLARIO 13. *Siano A un anello A.R. ed $\alpha_1 \subseteq \alpha_2$ due suoi ideali. Se A è separato e completo nella α_2 -topologia, allora esso è tale anche nella α_1 -topologia.*

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dal corollario 11 e dal corollario 2 di [4], cap. 3, pag. 45.

OSSERVAZIONE 1. *La tesi della proposizione 12 esprime una proprietà più forte della tesi del corollario 13.* Infatti quest'ultima è verificata in tutti gli anelli di valutazione, in quanto non è difficile vedere che le uniche topologie lineari separate di un anello di valutazione sono la topologia naturale e la topologia discreta, e pertanto se A è separato e completo nella α_2 -topologia esso è tale anche per la α_1 -topologia, perchè quest'ultima o coincide con la α_2 -topologia o è la topologia discreta; tuttavia esistono anelli di valutazione che non soddisfano alla tesi della proposizione 12. Sia infatti A un anello di valutazione di rango 2 (cfr. [3], cap. 6, § 4, n. 4): si vede facilmente che esiste un ideale α di definizione per la sua topologia naturale, che è separata, mentre il suo ideale massimale m definisce una topologia non separata. L'anello separato di A rispetto alla α -topologia è dunque A stesso, mentre l'anello separato di A rispetto alla m -topologia è il suo quoziente rispetto all'ideale $i = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} m^n \neq (0)$; ne segue che (con le notazioni della proposizione 12) $\hat{i}/A: A \rightarrow A/i$ non è una funzione iniettiva, e quindi neppure $\hat{i}$ è iniettiva.

OSSERVAZIONE 2. *Esistono anelli nei quali la tesi del corollario 13 è falsa.* Consideriamo infatti l'anello $A = k[[X_n]]$ delle serie formali nelle X_n , a coefficienti in un campo k , aventi un numero finito di termini per ogni grado. A è separato e completo rispetto alla topologia α_2 -adica, dove $\alpha_2 = (X_n)_{n \geq 1}$ (cfr. [2], cap. 3, es. 12, pag. 107), e l'ideale $\alpha_1 = (X_1^n X_n)_{n \geq 2}$ è contenuto in α_2 . Le serie formali $s_h = \sum_{n \geq h} (X_1^n X_n)^n$, ($h \geq 2$), soddisfano alle condizioni seguenti:

$$a) \ s_h \notin \alpha_1, \text{ perchè gli elementi di } \alpha_1 \text{ sono del tipo } \sum_{k=2}^r X_1^k X_k \varphi_k(X_n),$$

dove le φ_k sono serie formali, mentre i termini $(X_1^n X_n)^n$, $n > r$, non possono comparire come addendi in alcun elemento siffatto;

$$b) \ s_h \in \alpha_2^{h+1};$$

$$c) \ s_{h+1} - s_h = -(X_1^h X_h)^h \in \alpha_1^h;$$

ne segue che la successione $S = \{s_h\}_{h \geq 2}$ è di Cauchy nella α_1 -topologia e tende a zero nella α_2 -topologia: se essa convergesse nella α_1 -topolo-

gia, dovrebbe dunque convergere a zero, ma questo è falso, perchè, per ogni h , risulta $s_h \notin \alpha_1$. Se ne conclude che A è separato e completo nella α_2 -topologia, ma non nella α_1 -topologia.

Notiamo infine che l'anello A ora costruito è un esempio di *anello locale completo, che tuttavia non soddisfa alla condizione A.R.*, in quanto in esso non vale la tesi del corollario 13.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BOURBAKI: *Algèbre Commutative*, cap. 2, Hermann, Paris, 1961.
- [2] BOURBAKI: *Algèbre Commutative*, cap. 3, Hermann, Paris, 1967.
- [3] BOURBAKI: *Algèbre Commutative*, cap. 6, Hermann, Paris, 1964.
- [4] BOURBAKI: *Topologie Générale*, cap. 3, Hermann, Paris, 1960.
- [5] GRECO - SALMON: *Topics in m-adic Topologies*, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- [6] ZARISKI - SAMUEL: *Commutative Algebra*, vol. II, Van Nostrand Company, New York, 1958.

Manoscritto pervenuto in redazione il 1° settembre 1972.