

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

SILVANA PETRUCCI

Sui lemmi di preparazione per gli anelli di serie ristrette

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 49 (1973), p. 125-135

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1973__49__125_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1973__49__125_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Sui lemmi di preparazione per gli anelli di serie ristrette.

SILVANA PETRUCCI (*)

SOMMARIO - Sia (A, m, τ) una terna costituita da un anello commutativo A , un ideale m di A e da una topologia lineare τ in A . Si dimostra che la prima forma del lemma di preparazione per l'anello delle serie ristrette $A\{X\}$ (ogni serie la cui ridotta modulo m è un polinomio è associata ad un polinomio) vale se e solo se la terna $(A, \overline{m}, \tau)$ è henseliana e gli elementi di m sono topologicamente nilpotenti. La seconda forma del lemma di preparazione (« divisibilità » per una serie la cui ridotta modulo m è un polinomio) sussiste invece se e solo se A è τ -completo e gli elementi di m sono topologicamente nilpotenti.

SUMMARY - Let A be a commutative ring, m an ideal of A , τ a linear topology in A . Then the first version of the preparation lemma for the ring of restricted power series $A\{X\}$ (a series, which is a polynomial modulo m , is associate with a polynomial) holds if and only if $(A, \overline{m}, \tau)$ is a henselian triple and the elements of m are topologically nilpotent. On the contrary, the second version of the lemma (the divisibility property for series which are polynomial modulo m) holds if and only if A is τ -complete and the elements of m are topologically nilpotent.

1. Richiameremo in questo numero alcuni fatti generali relativi agli anelli topologici, in particolare a quelli muniti di una topologia lineare. Le nozioni che più interessano ai fini del presente lavoro sono quella di completamento rispetto ad una topologia e quella di terna henseliana data in [3] in cui intervengono gli anelli di serie ristrette. Richiameremo quindi le due versioni del lemma di preparazione per

(*) Indirizzo dell'Autore: Istituto Matematico - Via L. B. Alberti 4 - 16132 Genova.

Durante la preparazione del presente lavoro, l'A. ha fruito di una borsa di studio del C.N.R. per laureandi.

gli anelli di serie ristrette date in [2] che vogliamo caratterizzare rispettivamente in termini di terna henseliana e di anello completo colla condizione aggiuntiva che certi elementi siano topologicamente nilpotenti. Le suddette caratterizzazioni, in cui consistono i risultati essenziali del presente lavoro, sono espresse dal teorema 2 e dal teorema 3.

Sia A un anello commutativo con identità. Si dice che A è un anello topologico se A è dotato di una struttura topologica τ compatibile colla struttura di anello. Si dice che A è linearmente topologizzato (oppure che la topologia τ è lineare) se esiste un sistema fondamentale di intorno di 0 costituito da ideali di A .

Nel seguito noi considereremo esclusivamente anelli linearmente topologizzati A per i quali esiste una base numerabile per gli intorno di 0; in tal caso si può supporre che la topologia in A sia data da una successione di ideali α_n ($n \in \mathbb{N}$) tali che $A = \alpha_0 \supset \alpha_1 \supset \dots \supset \alpha_n \supset \dots$. Noi supporremo inoltre che la topologia sia separata, cioè sia: $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n = (0)$.

Una successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di elementi di A dicesi di Cauchy se, per ogni intero k , esiste un intero n_k tale che $x_m - x_n \in \alpha_k$ per ogni $m, n \geq n_k$. Nell'insieme I delle successioni di Cauchy sia $\mathcal{R}$ la relazione di equivalenza data da $(x_n) \mathcal{R} (y_n) \Leftrightarrow x_n - y_n \rightarrow 0$. L'insieme $\hat{A} = I/\mathcal{R}$ dicesi il completamento di A per la topologia τ ; esso è dotato di una struttura naturale di anello e si ha un'immersione canonica $\varphi: A \rightarrow \hat{A}$ ponendo $\varphi(x) =$ classe di equivalenza della successione costante $x_n = x$ (si ha $\ker \varphi = \bigcap \alpha_n = (0)$).

In modo analogo si può definire il completamento $\hat{m}$ di un ideale m di A che si immerge canonicamente in $\hat{A}$. L'anello $\hat{A}$ viene munito della topologia lineare $\hat{\tau}$ data dagli ideali $\hat{\alpha}_n$; rispetto a tale topologia $\hat{A}$ è separato ed è anche completo, cioè in $\hat{A}$ ogni successione di Cauchy converge. L'ideale $\hat{m}$ è chiuso in $\hat{A}$ essendo completo in uno spazio separato e quindi è chiuso anche in $A + \hat{m}$ (munito della topologia τ' indotta dalla $\hat{\tau}$).

Si può anche definire il completamento di un anello A , con topologia lineare $\tau = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in modo puramente algebrico e spesso utile ai fini del nostro lavoro. Posto infatti $\tilde{A} = \varprojlim A/\alpha_n$, si può provare che $\tilde{A}$ è canonicamente isomorfo a $\hat{A}$. Mediante tale isomorfismo si ottiene anche $\hat{m} \simeq \varprojlim m/(m \cap \alpha_n) \simeq \varprojlim (m + \alpha_n)/\alpha_n$.

DEFINIZIONE 1. Sia A un anello topologico e sia x un elemento di A . Si dice che x è *topologicamente nilpotente* se 0 è un limite della successione $(x^n)_{n \geq 0}$.

Se A è dotato di topologia lineare $\tau = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$, l'insieme $\mathfrak{n}$ di tutti gli elementi topologicamente nilpotenti è un ideale chiuso di A . Se, infatti, $\varphi: A \rightarrow \hat{A}$ è l'omomorfismo canonico si ha $\mathfrak{n} = \varphi^{-1}(\varprojlim \mathfrak{n}_n)$ dove $\mathfrak{n}_n = \text{nil}(A/\alpha_n)$. Se A è separato e completo, si ha inoltre $\mathfrak{n} \subset \text{rad } A$ (cfr. [1], pag. 83).

Richiamiamo ora alcune definizioni e proprietà relative alle serie ristrette.

DEFINIZIONE 2. Sia A un anello topologico e sia

$$f = \sum_{(i_1, \dots, i_r)} a_{i_1, \dots, i_r} X_1^{i_1} \dots X_r^{i_r}$$

una serie formale dell'anello $A[[X_1, \dots, X_r]]$. La serie f si dice *ristretta* se per ogni intorno V di 0 tutti i coefficienti della serie, tranne al più un numero finito, appartengono a V .

Se A è un anello dotato di una topologia lineare $\tau = (\alpha_n)$, le serie formali ristrette su A costituiscono un sottoanello di $A[[X_1, \dots, X_r]]$ che si indica con $A\{X_1, \dots, X_r\}$. Sia $\tilde{\alpha}_n$ l'ideale di $A\{X_1, \dots, X_r\}$ costituito da tutte le serie ristrette a coefficienti in α_n . Indichiamo con $\tilde{\tau}$, o semplicemente con τ se non vi è ambiguità, la topologia di $A\{X_1, \dots, X_r\}$ data dagli ideali $\tilde{\alpha}_n$. Indichiamo invece con σ la topologia di $A\{X_1, \dots, X_r\}$ data dagli ideali $\tilde{\alpha}_n(X_1, \dots, X_r)^k$, al variare di n, k in $\mathbb{N}^+$. Si può provare che $A\{X_1, \dots, X_r\}$ è separato e completo per σ (vedi [2], prop. 1).

Nel seguito indicheremo con $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ una terna costituita da un anello A , da un ideale $\mathfrak{m}$ di A , e da una topologia lineare τ in A .

DEFINIZIONE 3. Una terna $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ si dice terna *henseliana*, oppure *H-terna*, se soddisfa alle condizioni seguenti:

1) $\mathfrak{m} \subset \text{rad } A$;

2) per ogni serie ristretta $r \in A\{X\}$, la cui immagine canonica in $(A/\mathfrak{m})\{X\}$ è prodotto di un polinomio unitario $\bar{p}$ e di una serie ristretta $\bar{q}$, con $\bar{p}, \bar{q}$ coprimi, esiste un'unica coppia (p, q) formata da un polinomio unitario $p \in A[X]$ e da una serie ristretta $q \in A\{X\}$ (tra loro coprimi) ⁽¹⁾

(¹) La condizione che la serie q e il polinomio p siano coprimi è superflua in quanto è sempre verificata (cfr. [4], pag. 310, teor. 2). In un primo tempo Valabrega aveva chiamato terne henseliane quelle per cui la condizione suddetta non era richiesta e terne henseliane forti quelle soddisfacenti a quella condizione; successivamente Valabrega ha dimostrato l'equivalenza delle due nozioni, onde l'aggettivo « forte » è stato da noi omesso nelle definizioni.

tali che $r = pq$ e le immagini canoniche di p e q in $(A/\mathfrak{m})\{X\}$ siano rispettivamente $\bar{p}$ e $\bar{q}$. Inoltre, se r è un polinomio, anche q è un polinomio.

La denominazione «terna henseliana» nella def. 3 è giustificata dal seguente risultato che estende un teorema classico:

LEMMA DI HENSEL (versione Bourbaki). *Siano A un anello separato e completo per una topologia lineare τ , $\mathfrak{m}$ un ideale chiuso di A costituito da elementi topologicamente nilpotenti. Allora la terna $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ è henseliana.*

DIM. Cfr. [1], pag. 84 (vi è solo da osservare che dalle ipotesi del teorema si trae subito che $\mathfrak{m} \subset \text{rad } A$).

OSSERVAZIONE. P. Valabrega ha mostrato in [3] (cfr. pag. 292, teor. 5) che l'ipotesi «gli elementi di $\mathfrak{m}$ sono topologicamente nilpotenti» può essere sostituita dalla « $(A, \mathfrak{m})$ è una coppia henseliana» (coppia henseliana = terna henseliana quando τ è la topologia discreta).

Diamo invece adesso l'esempio di un anello A separato e completo per una topologia τ e di un ideale $\mathfrak{m}$ non chiuso e costituito da elementi topologicamente nilpotenti. Sia $A = k[[X_0, X_1, \dots, X_n, \dots]]$ munito della topologia $(X_0, X_1, \dots, X_n, \dots)$ -adica e sia $\mathfrak{m} = (X_0 - X_1, X_0 - X_2^2, \dots, X_0 - X_n^n, \dots)$; si ha $X_0 \notin \mathfrak{m}$, $X_0 \in \overline{\mathfrak{m}}$, dunque $\mathfrak{m}$ non è chiuso, mentre è ovvio che ogni elemento di $\mathfrak{m}$ è topologicamente nilpotente.

Diamo adesso le due versioni del lemma di preparazione per le serie ristrette dimostrate in [2] (cfr. teor. 10 e cor. 1 al teor. 11); lo scopo essenziale del presente lavoro è, come già detto all'inizio, di caratterizzare le terne $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ per cui è valido uno dei due lemmi.

TEOREMA. *Sia $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ una terna tale che: A è τ -completo, $\mathfrak{m}$ è chiuso e costituito da elementi topologicamente nilpotenti. Si ha allora:*

1) Lemma di preparazione «prima forma»: *per ogni serie ristretta $f \in A\{X\}$ la cui serie ridotta è un polinomio unitario di grado n , esiste una ed una sola coppia (p, u) costituita da un polinomio unitario $p \in A[X]$ e da una serie ristretta invertibile $u \in A\{X\}$ tale che $f = pu$, e p ha grado n .*

2) Lemma di preparazione «seconda forma». *Sia $f \in A\{X\}$ una serie ristretta la cui serie ridotta è un polinomio unitario di grado n . Per ogni serie $g \in A\{X\}$ esiste una ed una sola coppia costituita da una serie $h \in A\{X\}$ e da un polinomio $r \in A[X]$ di grado $\leq n-1$ tali che $g = hf + r$.*

2. In questo numero diamo alcune proprietà relative alle terne henseliane che serviranno per le successive applicazioni.

LEMMA 1. *Sia $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ una terna tale che $\mathfrak{m}$ è costituito da elementi topologicamente nilpotenti. Allora anche gli elementi di $\hat{\mathfrak{m}}$ sono topologicamente nilpotenti ed inoltre si ha: $\hat{\mathfrak{m}} \subset \text{rad } \hat{A}$.*

DIM. Si ha $\hat{\mathfrak{m}} = \varprojlim \mathfrak{m}_n$ dove $\mathfrak{m}_n = \mathfrak{m} + \mathfrak{a}_n/\mathfrak{a}_n$.

Poichè gli elementi di $\mathfrak{m}$ sono topologicamente nilpotenti, gli elementi di $\mathfrak{m}_n$ sono nilpotenti, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Se infatti $\bar{x} \in \mathfrak{m}_n$, si ha $x = m + a$ con $m \in \mathfrak{m}$, $a \in \mathfrak{a}_n$; esiste allora un intero k tale che $m^k \in \mathfrak{a}_n$, da cui $x_k \in \mathfrak{a}_n$, cioè $\bar{x}^k = 0$.

Si ha quindi $\hat{\mathfrak{m}} = \varprojlim \mathfrak{m}_n \subset \varprojlim \text{nil}(A/\mathfrak{a}_n) = \mathfrak{n}$ dove $\mathfrak{n}$ è l'insieme degli elementi topologicamente nilpotenti di $\hat{A}$, donde il primo asserto.

Il secondo asserto è conseguenza del primo, in quanto $\hat{A}$ è separato e completo (cfr. n° 1).

LEMMA 2. *Siano A un anello, $\mathfrak{m}$ un ideale di A tali che $\mathfrak{m} \subset \text{rad } A$. Se A' è un sottoanello di A contenente $\mathfrak{m}$, si ha $\mathfrak{m} \subset \text{rad } A'$.*

DIM. Sia $x \in \mathfrak{m}$, allora esiste $z \in A$ tale che $(1+x)z = 1$. Basta dimostrare che $z \in A'$. Poichè $z = 1 - xz \in 1 + \mathfrak{m} \subset A'$ si ha la tesi.

Il seguente lemma compare anche in [4] (cfr. proposizione 2) con l'ipotesi aggiuntiva, peraltro non sfruttata, che A sia completo. Noi preferiamo, per completezza, riscrivere la dimostrazione, aggiungendovi qualche dettaglio.

LEMMA 3. *Sia $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ una terna henseliana. Se A' è un sottoanello topologico di A contenente $\mathfrak{m}$, allora la terna $(A', \mathfrak{m}, \tau')$ è henseliana (τ' essendo la topologia indotta dalla τ in A').*

DIM. Per ipotesi si ha $\mathfrak{m} \subset \text{rad } A$ e $\mathfrak{m} \subset A'$; dal lemma 2 si trae allora $\mathfrak{m} \subset \text{rad } A'$. Basta quindi provare che vale la tesi del lemma di Hensel per la terna $(A', \mathfrak{m}, \tau')$.

L'immersione $A' \rightarrow A$ e gli omomorfismi canonici $A \rightarrow A/\mathfrak{m}$, $A' \rightarrow A'/\mathfrak{m}$, $A'/\mathfrak{m} \rightarrow A/\mathfrak{m}$ possono estendersi agli anelli di serie ristrette, in modo da ottenere il seguente diagramma commutativo.

$$\begin{array}{ccc} A'\{X\} & \xrightarrow{i} & A\{X\} \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ (A'/\mathfrak{m})\{X\} & \xrightarrow{j} & (A/\mathfrak{m})\{X\} \end{array}$$

di cui $A'\{X\}$ e $(A'/\mathfrak{m})\{X\}$ possono riguardarsi come sottoanelli rispettivi di $A\{X\}$ e $(A/\mathfrak{m})\{X\}$.

Sia $r \in A'\{X\}$ tale che per $\bar{r} \in (A'/\mathfrak{m})\{X\}$ si abbia la decomposizione $\bar{r} = \bar{p}\bar{q}$ con $\bar{q} \in (A'/\mathfrak{m})\{X\}$ e $\bar{p} \in (A'/\mathfrak{m})[X]$ polinomio unitario coprimo con $\bar{q}$.

La decomposizione $\bar{r} = \bar{p}\bar{q}$ vale anche in $(A/\mathfrak{m})\{X\}$ e la terna $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ è henseliana; esiste allora un'unica coppia (p, q) con $p \in A[X]$ polinomio unitario e $q \in A\{X\}$, aventi rispettivamente immagine $\bar{p}$ e $\bar{q}$ in $(A/\mathfrak{m})\{X\}$ e tali che $r = pq$ in $A\{X\}$. Proviamo che i coefficienti di p e q stanno in A' .

Posto $q = \sum_0^{\infty} a_k X^k$, si ha $\psi(q) = \sum_0^{\infty} \bar{a}_k X^k = \bar{q} \in (A'/\mathfrak{m})\{X\}$ e quindi per ogni a_k esiste $a'_k \in A'$ tale che $\bar{a}_k = \bar{a}'_k$, donde $a_k - a'_k \in \mathfrak{m} \subset A'$. Ne segue $a_k \in A'$ e quindi $q \in A'\{X\}$. Analogamente si prova che $p \in A'[X]$. Inoltre la decomposizione di r in $A'\{X\}$ è unica, essendo tale la decomposizione in $A\{X\}$.

Indicheremo sempre, da ora in poi, con τ' la topologia indotta in $A + \hat{\mathfrak{m}}$ dalla topologia $\hat{\tau}$ di $\hat{A}$.

PROPOSIZIONE 1 *Sia $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ una terna. Se $\mathfrak{m}$ è costituito da elementi topologicamente nilpotenti, allora la terna $(A + \hat{\mathfrak{m}}, \hat{\mathfrak{m}}, \tau')$ è henseliana.*

DIM. L'anello $\hat{A}$ è separato e completo, $\hat{\mathfrak{m}}$ è chiuso e gli elementi di $\hat{\mathfrak{m}}$ sono topologicamente nilpotenti in virtù del lemma 1; allora valgono le ipotesi, e quindi la tesi del lemma di Hensel; inoltre $\hat{\mathfrak{m}} \subset \text{rad } \hat{A}$, sempre in virtù del lemma 1. La terna $(\hat{A}, \hat{\mathfrak{m}}, \hat{\tau})$ risulta perciò henseliana.

La conclusione segue allora dal lemma 3, in quanto $A + \hat{\mathfrak{m}}$ è un sottoanello topologico di $\hat{A}$ contenente $\hat{\mathfrak{m}}$.

PROPOSIZIONE 2. *Sia $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ una terna. Sia x un elemento di $\hat{\mathfrak{m}} \cap \hat{\mathfrak{a}}_n$; esiste allora un elemento $y \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{a}_n$ tale che $x - y \in \hat{\mathfrak{m}} \cap \hat{\mathfrak{a}}_{n+1}$.*

DIM. Fissato $x \in \hat{\mathfrak{m}} \cap \hat{\mathfrak{a}}_n$, sia (y_k) una successione di elementi di $\mathfrak{m}$ tale che $x = \lim y_k$. Si ha allora $x - y_k \in \hat{\mathfrak{a}}_{n+1}$ se $k \geq k_n$. Sia $y = y_{k_n}$, per un certo $k \geq k_n$; poichè $y \in \mathfrak{m} \subset \hat{\mathfrak{m}}$ e $x \in \hat{\mathfrak{m}}$ si ha: $x - y \in \hat{\mathfrak{m}}$ e inoltre $x - y \in \hat{\mathfrak{a}}_{n+1}$, quindi $x - y \in \hat{\mathfrak{m}} \cap \hat{\mathfrak{a}}_{n+1}$. Dalle relazioni $x \in \hat{\mathfrak{a}}_n$, $x - y \in \hat{\mathfrak{a}}_{n+1} \subset \hat{\mathfrak{a}}_n$, segue $y \in \hat{\mathfrak{a}}_n \cap A = \mathfrak{a}_n$ (in quanto $\mathfrak{a}_n$ è chiuso) e quindi $y \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{a}_n$ come volevasi.

3. In questo numero vogliamo caratterizzare le terne $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ che soddisfano alla prima forma del lemma di preparazione per le serie ristrette.

PROPOSIZIONE 3. *Sia $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ una terna per cui valga il 1° lemma di preparazione per le serie ristrette; allora gli elementi di $\mathfrak{m}$ sono topologicamente nilpotenti.*

DIM. Sia m un elemento di $\mathfrak{m}$; posto $f(X) = 1 - mX$, $f(X)$ è una serie ristretta avente immagine canonica $\bar{f} = \bar{1}$ in $(A/\mathfrak{m})\{X\}$. Poichè la terna $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ soddisfa al 1° lemma di preparazione per ipotesi, $f(X)$ è invertibile in $A\{X\}$; ciò comporta che $g(X) = \sum_0^\infty m^k X^k \in A[[X]]$ sia una serie ristretta. Ne deriva che $\lim m^k = 0$, da cui la tesi.

PROPOSIZIONE 4. *Se $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ è una terna per cui vale il 1° lemma di preparazione, la terna $(A + \hat{\mathfrak{m}}, \hat{\mathfrak{m}}, \tau')$ è henseliana.*

DIM. Gli elementi di $\mathfrak{m}$ sono topologicamente nilpotenti in virtù della prop. 3; valgono quindi le ipotesi della prop. 1, dalla quale si trae l'asserto.

LEMMA 4. *Sia $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ una terna per cui valga la 1ª forma del lemma di preparazione per le serie ristrette. Se $f(X) = \sum_0^\infty a_k X^k$ è una serie ristretta la cui serie ridotta in $(A/\mathfrak{m})\{X\}$ è un polinomio unitario di grado n e se (p, u) è la coppia che dà la decomposizione di $f(X)$ si ha: $p(X) = X^n + \sum_0^{n-1} (a_k + m_k) X^k$ con $m_k \in \overline{\mathfrak{m}}$ e $u(X) = \sum_0^\infty b_k X^k$ con $b_0 \in 1 + \overline{\mathfrak{m}}$ e $b_k \in \overline{\mathfrak{m}}$ per $k \geq 1$.*

DIM. Indichiamo con $\bar{f}$, $\bar{p}$, $\bar{u}$ le serie ridotte in $(A/\overline{\mathfrak{m}})\{X\}$ di f , p , u rispettivamente. Vale l'uguaglianza $\bar{f} = \bar{p}\bar{u}$ dove $\bar{f}$ è un polinomio unitario di grado n , poichè è tale la serie ridotta di f in $(A/\mathfrak{m})\{X\}$, ed anche $\bar{p}$ è un polinomio unitario di grado n , essendo tale $p \in A[X]$.

Poichè $A/\overline{\mathfrak{m}}$ è separato, si può applicare il lemma 7 di [2] alla decomposizione $\bar{f} = \bar{p}\bar{u}$; si deduce che $\bar{u} = \bar{1}$ e, di conseguenza, che $\bar{f} = \bar{p}$. Dalle due uguaglianze ottenute si ha subito l'asserto.

TEOREMA 1. *Se la terna $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ soddisfa al 1° lemma di preparazione, vale l'uguaglianza $\overline{\mathfrak{m}} = \hat{\mathfrak{m}}$.*

DIM. È sufficiente provare l'inclusione $\hat{m} \subset \overline{m}$, in cui quanto l'inclusione opposta è diretta conseguenza delle definizioni di chiusura e di completamento di un ideale.

Sia dunque $y \in \hat{m}$. Allora $1 + y$ è invertibile in $A + \hat{m}$ in quanto dalla prop. 4 si trae in particolare $\hat{m} \subset \text{rad}(A + \hat{m})$. Posto $z = 1 + y$, si ha allora $1 = z^{-1}(1 + y)$ da cui $1 - z^{-1} \in \hat{m}$.

Poniamo $h(X) = 1 + y + X$. Ci proponiamo di determinare una successione $\{b_n\}$ di elementi di $A + \hat{m}$ tale che, posto $g(X) = z^{-1} + b_1X + \dots + b_nX^n + \dots$ si abbia $g(X) \in (A + \hat{m})\{X\}$ (anello di serie ristrette rispetto alla topologia τ') e $h(X)g(X) \in A\{X\}$.

Poniamo $b_1 = (1 - z^{-1})z^{-1}$, da quanto precede risulta $b_1 \in \hat{m} = \hat{m} \cap \hat{a}_0$. Dalla prop. 2 si deduce l'esistenza di un elemento $a_1 \in m = m \cap a_0$ tale che $a_1 - b_1 \in \hat{m} \cap \hat{a}_1$. Poniamo adesso $b_2 = (a_1 - b_1)z^{-1}$ e si ha quindi $b_2 \in \hat{m} \cap \hat{a}_1$.

Procediamo ora per induzione; cioè, determinato $b_{n-1} \in \hat{m} \cap \hat{a}_{n-2}$, poniamo $b_n = (a_{n-1} - b_{n-1})z^{-1}$ dove a_{n-1} è un elemento di $m \cap a_{n-2}$ tale che $a_{n-1} - b_{n-1} \in \hat{m} \cap \hat{a}_{n-1}$ (l'esistenza di a_{n-1} è assicurata sempre dalla prop. 2); si ottiene pertanto $b_n \in \hat{m} \cap \hat{a}_{n-1}$.

La serie $g(X)$ è ristretta per costruzione; inoltre, mediante calcolo diretto, si verifica che, posto $f(X) = h(X)g(X)$, si ha $f(X) = 1 + X + a_1X^2 + \dots + a_{n-1}X^n + \dots$, da cui risulta che $f(X)$ è una serie ristretta a coefficienti in A , in quanto a_n è un elemento di $m \cap a_{n-1}$ per ogni n .

Poichè la terna $(A + \hat{m}, \hat{m}, \tau')$ è henseliana in virtù della prop. 4 e la serie ridotta di $f(X)$ in $(A + \hat{m}/\hat{m})\{X\}$ è $\bar{1} + X$, $f(X)$ si scompone in $(A + \hat{m})\{X\}$ in modo unico nel prodotto di un polinomio unitario e di una serie ristretta aventi rispettivamente immagini $\bar{1} + X$ e $\bar{1}$ in $(A + \hat{m}/\hat{m})\{X\}$. Ora il polinomio e la serie suddetti sono proprio $h(X)$ e $g(X)$; infatti la serie ridotta di $h(X) = 1 + y + X$ è $\bar{1} + X$ e la ridotta di $g(X)$ è $\bar{1}$ in quanto $z^{-1} \in 1 + \hat{m}$ e $b_n \in \hat{m}$ per ogni n .

Applichiamo il lemma 4 alla serie $f(X) \in A\{X\}$; otteniamo una decomposizione $f(X) = (1 + m + X)u(X)$ dove $m \in \overline{m}$ e le ridotte rispettive di $1 + m + X$ e $u(X)$ in $(A/\overline{m})\{X\}$ (e quindi anche in $(A + \hat{m}/\hat{m})\{X\}$) sono $\bar{1} + X$ e $\bar{1}$. Dalla unicità della decomposizione di $f(X)$ in $(A + \hat{m})\{X\}$ si trae allora $h(X) = 1 + y + X = 1 + m + X$ da cui segue $y = m \in \overline{m}$, cioè $\hat{m} \subset \overline{m}$, c.v.d

TEOREMA 2. Sia (A, m, τ) una terna. Sono condizioni equivalenti:

- i) il primo lemma di preparazione vale per la terna (A, m, τ) ;
- ii) la terna $(A, \overline{m}, \tau)$ è henseliana e l'ideale m è costituito da elementi topologicamente nilpotenti.

DIM. Se vale la condizione i), l'ideale m è costituito da elementi topologicamente nilpotenti in virtù della prop. 3. Inoltre la terna $(A + \hat{m}, \hat{m}, \tau')$, che risulta henseliana per la prop. 4, coincide con la terna $(A, \overline{m}, \tau)$ in virtù del teor. 1. È così provata la prima implicazione.

Dimostriamo ora che ii) implica i). La dimostrazione ricalca sostanzialmente quella data nel teor. 10 di [2].

Sia $f(X) \in A\{X\}$ una serie ristretta la cui serie ridotta in $(A/m)\{X\}$ è un polinomio unitario di grado n ; allora la serie ridotta $\bar{f}(X) \in (A/\overline{m})\{X\}$ è ancora un polinomio unitario di grado n . Dall'ipotesi che la terna $(A, \overline{m}, \tau)$ è henseliana e dalla decomposizione $\bar{f} = \bar{f} \cdot \bar{1}$ in $(A/\overline{m})\{X\}$ seguono l'esistenza e l'unicità di un polinomio $p(X) \in A[X]$ e di una serie $u(X) \in A\{X\}$ tali che $f(X) = p(X)u(X)$ e $\bar{f} = \bar{p}$, $\bar{u} = \bar{1}$ in $(A/\overline{m})\{X\}$.

Posto $u(X) = \sum_0^\infty u_k X^k$ si ha $u_0 \in 1 + \overline{m}$, $u_k \in \overline{m}$ se $k \geq 1$. Si ha per ipotesi $\overline{m} \subset \text{rad } A$ e quindi u_0 è invertibile in A ; inoltre, se n è l'ideale di tutti gli elementi topologicamente nilpotenti, n è chiuso (cfr. n° 1) e quindi, poichè $\overline{m} \subset \bar{n} = n$, anche $\overline{m}$ è costituito da elementi topologicamente nilpotenti. La serie $u(X)$ è pertanto invertibile ([2], prop. 2).

L'unicità della decomposizione $f(X) = p(X)u(X)$ si dimostra poi come nel teor. 10 di [2] (sostituendo a m la chiusura $\overline{m}$).

4. In questo numero caratterizziamo mediante il teorema 3 le terne che soddisfano al secondo lemma di preparazione.

PROPOSIZIONE 5. *Se (A, m, τ) è una terna per cui vale il 2° lemma di preparazione, gli elementi di m sono topologicamente nilpotenti.*

DIM. Sia m un elemento di m . Posto $f(X) = 1 - mX$, l'immagine canonica della serie $f(X)$ in $(A/m)\{X\}$ è $\bar{f}(X) = \bar{1}$. Per ipotesi vale il 2° lemma di preparazione; esiste quindi una serie $h(X) \in A\{X\}$ tale che $1 = (1 - mX)h(X)$, in quanto il resto è necessariamente nullo. Ne segue $h(X) = \sum_0^\infty m^k X^k$, onde la serie $\sum_0^\infty m^k X^k$ è ristretta e quindi $\lim m^k = 0$ come volevasi.

PROPOSIZIONE 6. *Se (A, m, τ) è una terna per cui vale il 2° lemma di preparazione, l'anello A è completo per la topologia τ .*

DIM. Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di Cauchy di elementi di A ; per ogni intero k esiste un intero n_k tale che $a_{n+1} - a_n \in a_k$ se $n \geq n_k$.

Se poniamo $f_n(X) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1})X^k$, la successione $(f_n(X))_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy per la topologia σ di $A\{X\}$ (cfr. n° 1). Infatti, comunque fissati due interi k ed r , se $n \geq \max(n_k, r)$ si ha $f_{n+1}(X) - f_n(X) = (a_{n+1} - a_n)X^{n+1} \in a_k X^{n+1} \subset \tilde{a}_k X^r$. L'anello $A\{X\}$ è separato e completo per σ (cfr. n° 1), esiste quindi, ed è unica, una serie $f(X) \in A\{X\}$ tale che $f(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(X)$ (nella topologia σ e quindi anche nella topologia $\tilde{\tau}$).

L'immersione canonica $\varphi: A \rightarrow \hat{A}$ si estende ad un unico omomorfismo continuo $u: A\{X\} \rightarrow \hat{A}$ tale che $u(a) = a$ per ogni elemento $a \in A$ e $u(X) = 1$ (cfr. [1], prop. 4, pag. 82). Dalla continuità di u e dal fatto che $f_n(X) \rightarrow f(X)$ si deduce che $f_n(1) \rightarrow u(f) \in \hat{A}$, cioè che $a_n \rightarrow u(f) \in \hat{A}$.

Per ipotesi la terna (A, m, τ) soddisfa al 2° lemma di preparazione; esistono quindi $h(X) \in A\{X\}$ ed $r \in A$ tali che $f(X) = (X-1)h(X) + r$. Dal confronto delle immagini secondo u dei due membri della relazione precedente si trae: $u(f) = u(r) = r \in A$. Possiamo quindi concludere che $a_n \rightarrow u(f) = r \in A$, cioè che l'anello A è completo per τ .

TEOREMA 3. *Sia (A, m, τ) una terna. Sono condizioni equivalenti:*

- i) *il secondo lemma di preparazione vale per la terna (A, m, τ) ;*
- ii) *l'anello A è completo per la topologia τ e l'ideale m è costituito da elementi topologicamente nilpotenti.*

Dim. Se vale la condizione i), l'anello A è completo in virtù della prop. 6 e l'ideale m è costituito da elementi topologicamente nilpotenti in virtù della prop. 5.

Supponiamo ora che valga ii).

Segue subito dal teorema 2 che per la terna (A, m, τ) vale il 1° lemma di preparazione. Infatti, come già osservato, gli elementi di $\overline{m}$ sono topologicamente nilpotenti e di conseguenza la terna $(A, \overline{m}, \tau)$ è henseliana (lemma di Hensel).

Ogni serie $f \in A\{X\}$, la cui immagine in $(A/m)\{X\}$ è un polinomio unitario di grado n , si decompone pertanto, in modo unico, nel prodotto di un polinomio unitario $p \in A[X]$ di grado n e di una serie invertibile $u \in A\{X\}$. Ne segue $p = fu^{-1}$.

Siano ora rispettivamente $h \in A\{X\}$ e $r \in A[X]$ la serie ristretta e il polinomio di grado inferiore ad n che verificano la relazione $g = ph + r$ (cfr. [2], teor. 11). Si ha allora $g = f(u^{-1}h) + r$; tale de-

composizione di g è unica, essendo unica la decomposizione di f . La terna (A, m, τ) soddisfa pertanto alla condizione i) ed il teorema è completamente dimostrato.

BIBLIOGRAFIA

- [1] N. BOURBAKI, *Algèbre Commutative*, Capp. III, IV, Hermann, Paris, 1961.
- [2] P. SALMON, *Sur les series formelles restreintes*, Bull. Soc. Math. France **92** (1964), 385-410.
- [3] P. VALABREGA, *Anelli henseliani topologici, I*, Annali di Matematica pura e applicata, **4** (1972), 283-303.
- [4] P. VALABREGA, *Anelli henseliani topologici, II*, Annali di Matematica pura e applicata, **4** (1972), 305-316.

Manoscritto pervenuto in redazione il 3 luglio 1972.