RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

IVAR MASSABÒ

Estensioni di una struttura paracomplessa su un corpo algebricamente chiuso ad un suo ampliamento trascendente semplice

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 48 (1972), p. 113-125

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1972__48__113_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 48 (1973)

ESTENSIONI DI UNA STRUTTURA PARACOMPLESSA SU UN CORPO ALGEBRICAMENTE CHIUSO AD UN SUO AMPLIAMENTO TRASCENDENTE SEMPLICE

IVAR MASSABÒ *)

Il risultato di questa nota è stato ottenuto generalizzando uno studio delle strutture paracomplesse sul corpo degli operatori differenziali fratti (cfr. [I] pp. 332-335). Il problema affrontato è stato quello di caratterizzare tutte le possibili estensioni di una struttura paracomplessa data su un corpo algebricamente chiuso ad un suo ampliamento trascendente.

1. Notazioni e definizioni.

Nel seguito denoteremo con $\mathcal{K}$ un corpo commutativo; se η è un automorfismo di $\mathcal{K}$ denoteremo con k^{η} il trasformamto di k mediante η, con $\mathcal{K}_{\eta}$ il sottocorpo di $\mathcal{K}$ fisso rispetto ad η.

DEFINIZIONE 1. *Diremo che* $\mu=(\eta, \theta)$ *è una struttura paracomplessa su* $\mathcal{K}$ *se:*

i) η *è un automorfismo involutorio di* $\mathcal{K}$.

ii) θ *è un ordinamento di* $\mathcal{K}_{\eta}$.

iii) *per ogni* $k \in \mathcal{K}$ *risulta* kk^{η}, *necessariamente appartenente a* $\mathcal{K}_{\eta}$, *positivo o nullo rispetto a* θ *cioè* $kk^{\eta} \geqslant o$ (θ).

Diremo inoltre η *coniugio della struttura paracomplessa* μ *su* $\mathcal{K}$.

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

Indirizzo dell'Autore: Istituto Matematico, Via L. B. Alberti, 4 Università di Genova, 16132, Genova.

Supporremo che $\mu=(\eta, \theta)$ sia una struttura paracomplessa assegnata sul corpo.

DEFINIZIONE 2. *Diremo che* Γ *è una retta* $\mathcal{K}_\eta$*-proiettiva contenuta in* $P^1(\mathcal{K})=\mathcal{K}\cup\{\infty\}$ *se* Γ *è immagine di* $\mathcal{K}_\eta\cup\{\infty\}$ *mediante una proiettività di* $P^1(\mathcal{K})$; *chiameremo* $\mathcal{K}_\eta\cup\{\infty\}$ *retta* $\mathcal{K}_\eta$*-proiettiva prototipo.*

DEFINIZIONE 3. *Diremo segmento aperto* $\overline{\alpha\beta}$ *di* $\mathcal{K}_\eta$ *di estremi* α *e* β (α, $\beta\in\mathcal{K}_\eta$) *l'insieme dei punti* $z\in\mathcal{K}_\eta$ *tali che* $\alpha<z<\beta$ (θ); *definizioni analoghe varranno per segmenti chiusi, semiaperti a destra, semiaperti a sinistra.*

OSSERVAZIONE 1. Il gruppo delle proiettività di $P^1(\mathcal{K})$ opera transitivamente sulle rette $\mathcal{K}_\eta$-proiettive contenute in $P^1(\mathcal{K})$.

DEFINIZIONE 4. *Diremo che un sottoinsieme* γ *di* Γ, *retta* $\mathcal{K}_\eta$*-proiettiva in* $P^1(\mathcal{K})$, *è un arco aperto di* Γ *se è immagine di un segmento aperto di* $\mathcal{K}_\eta$ *mediante una qualche proiettività di* $P^1(\mathcal{K})$; ovvie le definizioni di archi chiusi, semiaperti a destra, semiaperti a sinistra.

Poiché l'insieme vuoto è un arco consideriamo anche la retta Γ come arco. Così il complementare rispetto a Γ di un arco di Γ è ancora un arco.

DEFINIZIONE 5. *Sia* Γ *una retta* $\mathcal{K}_\eta$*-proiettiva di* $P^1(\mathcal{K})$, *diremo filtro d'archi su* Γ *un insieme* $\mathfrak{F}$ *di archi di* Γ *tale che:*

i) *ogni arco di* Γ *contenente un arco di* $\mathfrak{F}$ *appartiene a* $\mathfrak{F}$.

ii) *l'intersezione di due archi appartenenti ad* $\mathfrak{F}$ *sta in* $\mathfrak{F}$.

iii) *nessun arco di* $\mathfrak{F}$ *è vuoto.*

DEFINIZIONE 6. *Diremo nocciolo di un filtro* $\mathfrak{F}$ *l'insieme intersezione di tutti gli archi di* $\mathfrak{F}$.

DEFINIZIONE 7. *Diremo che un punto* $s\in\Gamma$ *è un punto aderente ad un filtro d'archi* $\mathfrak{F}$ *su* Γ *se ogni arco aperto di* Γ *contenente* s *ha intersezione non vuota con ogni arco del filtro* $\mathfrak{F}$.

NOTA. Un filtro d'archi a nocciolo vuoto ammette al più un punto aderente.

DEFINIZIONE 8. *Diremo sezione di* $\mathcal{K}_\eta$ *una coppia di sottoinsiemi* (A, B) *di* $\mathcal{K}_\eta$ *complementari e tali che ogni elemento di* A *precede ogni elemento di* B *nell'ordinamento* θ.

La sezione (A, B) *si dirà propria se* A *e* B *sono entrambi non vuoti altrimenti impropria.*

DEFINIZIONE 9. *Diremo sezione continua di* $\mathcal{K}_\eta$ *una sezione* (A, B) *di* $\mathcal{K}_\eta$ *tale che:*
o A *possiede massimo o* B *possiede minimo o* $A=\emptyset$ *e* $B=\mathcal{K}_\eta$ *o* $A=\mathcal{K}_\eta$ *e* $B=\emptyset$.

Diremo lacuna di $\mathcal{K}_\eta$ *una sezione propria* (A, B) *di* $\mathcal{K}_\eta$ *tale che: né* A *ha massimo né* B *ha minimo*
(quindi le due sezioni improprie sono continue).

Sia (A, B) una sezione propria su $\mathcal{K}_\eta$ allora rimane univocamente determinato il filtro d'archi su $P^1(\mathcal{K}_\eta)=\mathcal{K}_\eta \cup \{\infty\}$ avente per base i segmenti aperti $\overline{\alpha\beta}$ con $\alpha \in A$ e $\beta \in B$.

Alla sezione impropria $(\emptyset, \mathcal{K}_\eta)$ associamo il filtro d'archi generato dagli archi del tipo

$$\{x \mid x \in \mathcal{K}_\eta \ .\&.\ x<\beta\ (\theta)\} \text{ con } \beta \in \mathcal{K}_\eta$$

e alla sezione impropria $(\mathcal{K}_\eta, \emptyset)$ il filtro degli archi del tipo

$$\{x \mid x \in \mathcal{K}_\eta \ .\&.\ \alpha<x\ (\theta)\} \text{ con } \alpha \in \mathcal{K}_\eta$$

In tal modo si realizza una corrispondenza bigettiva tra le sezioni di $\mathcal{K}_\eta$ e i filtri d'archi a nocciolo vuoto su $\mathcal{K}_\eta \cup \{\infty\}$.

OSSERVAZIONE 2. La corrispondenza dianzi descritta è tale che ad ogni sezione continua viene associato un filtro d'archi a nocciolo vuoto il cui punto aderente è l'elemento di separazione della sezione, alle sezioni improprie vengono associati filtri d'archi aventi come punto aderente il punto ∞ e alle lacune vengono associati filtri d'archi privi di punti aderenti.

DEFINIZIONE 10. *Se* $\mathcal{K}'$ *è una estensione del corpo* $\mathcal{K}$ *e* $\mu=(\eta, \theta)$ *è una struttura paracomplessa su* $\mathcal{K}$, *diremo che la struttura paracomplessa* $\mu'=(\gamma, \sigma)$ *su* $\mathcal{K}'$ *estende* μ *(o che è una estensione di* μ*) se:*

i) γ *subordina* η *su* $\mathcal{K}$.

ii) σ *induce* θ *su* $\mathcal{K}_\eta$.

2. Estensioni trascendenti semplici di corpi paracomplessi algebricamente chiusi.

Siano $\mathcal{K}$ un corpo algebricamente chiuso, $\mu=(\eta, \theta)$ una struttura paracomplessa di $\mathcal{K}$ e $\mathcal{K}(x)$ l'estensione trascendente (semplice) di $\mathcal{K}$.

Se γ è il coniugio di una struttura paracomplessa di $\mathcal{K}(x)$ che estende μ allora x^γ è un elemento di $\mathcal{K}(x)$ della forma:

$$x^\gamma=\frac{ax+b}{cx+d}$$

con $a, b, c, d\in\mathcal{K}$ e $ad\text{-}bc=1$.

Detta $h(z)$ *la funzione*

$$h(z)=\frac{az^\eta+b}{cz^\eta+d} \qquad z\in\mathcal{K}$$

il luogo di punti di $\mathcal{K}$ di equazione $z=h(z)$ è non vuoto e rappresenta, con l'eventuale aggiunta del punto ∞, una retta $\mathcal{K}_\eta$-proiettiva in $\mathcal{K}\cup\{\infty\}$ che indicheremo con Γ_γ sicché ad ogni coniugio γ resta associata in modo unico una retta Γ_γ $\mathcal{K}_\eta$-proiettiva in $P^1(\mathcal{K})$.

TEOREMA 1. *L'applicazione* $\gamma\mapsto\Gamma_\gamma$ *è una applicazione bigettiva dell'insieme dei coniugi di strutture paracompresse di* $\mathcal{K}(x)$ *che estendono* μ *all'insieme delle rette* $\mathcal{K}_\eta$*-proiettive contenute in* $\mathcal{K}\cup\{\infty\}$.

Se γ è il coniugio di una struttura paracomplessa di $\mathcal{K}(x)$ che estende $\mu=(\eta, \theta)$ allora gli elementi del sottocorpo $\mathcal{K}(x)_\gamma$ si possono identificare con le funzioni razionali e coefficienti in $\mathcal{K}$ che assumono valori in $\mathcal{K}_\eta\cup\{\infty\}$ su Γ_γ.

Sia $\mathcal{F}$ un filtro d'archi a nocciolo vuoto su Γ_γ, l'insieme delle funzioni razionali a coefficienti in $\mathcal{K}$ che assumono valori (strettamente) positivi, rispetto a θ, su qualche arco di $\mathcal{F}$ determina un ordinamento $\theta_\mathcal{F}$ di $\mathcal{K}(x)_\gamma$ e risulta $(\gamma, \theta_\mathcal{F})$ una struttura paracomplessa su $\mathcal{K}(x)$ che estende μ.

TEOREMA 2. *L'applicazione* $\mathfrak{F} \mapsto (\gamma, \theta)$ *è una applicazione bigettiva tra l'insieme dei filtri d'archi a nocciolo vuoto su* Γ_γ *e l'insieme delle strutture paracomplesse di* $\mathcal{K}(x)$ *che estendono* μ *e aventi* γ *come coniugio.*

OSSERVAZIONE 3. I teoremi 1) e 2) possono sintetizzarsi nell'asserzione di esistenza di un isomorfismo canonico tra « insiemi fibrati » come risulta dal seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{array}{l}\text{filtri d'archi}\\ \text{a nocciolo vuoto}\end{array}} \arrow[r, equal] \arrow[d, "\text{supporto}"'] & \boxed{\begin{array}{l}\text{strutture paracomples-}\\ \text{se su } \mathcal{K}(x) \text{ che esten-}\\ \text{dono } \mu.\end{array}} \arrow[d, "\text{coniugio}"] \\
\boxed{\begin{array}{l}\text{rette } \mathcal{K}_\eta\text{-priettive con-}\\ \text{tenute in } P^1(\mathcal{K}).\end{array}} \arrow[r, equal] & \boxed{\begin{array}{l}\text{coniugi di qualche strut-}\\ \text{tura paracomplessa di}\\ \mathcal{K}(x) \text{ che estende } \mu.\end{array}}
\end{tikzcd}$$

in cui le frecce verticali rappresentano le applicazioni che associano ad ogni filtro d'archi la retta supporto e ad ogni struttura paracomplessa il suo coniugio. Le applicazioni bigettive orizzontali essendo quelle dianzi definite.

OSSERVAZIONE 4. Due strutture paracomplesse su $\mathcal{K}(x)$ che estendono μ sono equivalenti, nel senso che esiste un automorfismo di $\mathcal{K}(x)$ che muta l'una nell'altra, allorché provengono da filtri d'archi a nocciolo vuoto con punti aderenti.

3. Dimostrazioni dei teoremi enunciati.

Per provare il teorema 1) determiniamo dapprima gli automorfismi involutori di $\mathcal{K}(x)$ che estendono l'automorfismo involutorio η di $\mathcal{K}$.

Poiché ogni automorfismo γ di $\mathcal{K}(x)$ è completamente individuato dalle immagini degli elementi di $\mathcal{K}$ e dall'immagine x^γ di x, che può essere scritta sotto la forma:

$$x^\gamma = \frac{ax+b}{cx+d}$$

con a, b, c, $d \in \mathcal{K}$ e $ad\text{-}bc = 1$ (cfr. [2] pp. 158-159), risulta allora che ogni automorfismo γ di $\mathcal{K}(x)$ che estende η deve soddisfare alle due condizioni seguenti:

$$k^\gamma = k^\eta \quad \text{per ogni } k \in \mathcal{K}$$

esistono a, b, c, $d \in \mathcal{K}$ con $ad\text{-}bc = 1$ tali che

$$x^\gamma = \frac{cx+d}{ax+b}$$

così γ individua, in modo unico, una matrice unitaria a coefficienti in $\mathcal{K}$.

La condizione di involutorietà per un automorfismo γ di $\mathcal{K}(x)$ che estende η, ossia, $\gamma \circ \gamma = \text{id.}$, può così ora essere espressa nella forma: esiste $m \in \mathcal{K}$, $m \neq 0$ tale che:

$$\begin{Vmatrix} a^\eta & b^\eta \\ c^\eta & d^\eta \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} m & o \\ o & m \end{Vmatrix} \tag{1}$$

ovvero:

$$\begin{aligned} a^\eta a + b^\eta c &= m \\ a^\eta b + b^\eta d &= o \\ c^\eta a + d^\eta c &= o \\ c^\eta b + d^\eta d &= m \end{aligned} \tag{2}$$

(dalla prima e quarta delle relazioni (2) segue che $m \in \mathcal{K}_\eta$ in quanto: $m - m^\eta = a^\eta a - d^\eta d \in \mathcal{K}_\eta$).

Questo prova:

LEMMA 1. Condizione necessaria e sufficiente affinché un automorfismo γ di $\mathcal{K}(x)$ estenda l'automorfismo (involutorio) η di $\mathcal{K}$ è che esistano a, b, c, $d \in \mathcal{K}$ con $ad\text{-}bc = 1$ e $m \in \mathcal{K}_\eta$, $m \neq o$ tale che:

$$x^\gamma = \frac{ax+b}{cx+d}$$

$$k^\gamma = k^\eta \text{ per ogni } k \in \mathcal{K}$$

e risulti verificata la (1) o equivalentemente la (2).

OSSERVAZIONE 5. Se γ è un automorfismo involutorio di $\mathcal{K}(x)$ che estende η, in base al lemma 1), esistono a, b, c, $d \in \mathcal{K}$ con ab-$bc=1$ e soddisfacenti le (2) e tali che

$$x^\gamma = \frac{ax+b}{cx+d}$$

Se è $c \neq o$, quest'ultima può porsi nella forma:

$$x^\gamma = \frac{a}{c} + \frac{m}{c^\eta c\left(x - \left(\frac{a}{c}\right)^\eta\right)} \tag{3}$$

(infatti, tenendo presente le (2) si ha

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a\left(x+\frac{d}{c}\right) + \frac{bc-ad}{c}}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2\left(x+\frac{d}{c}\right)}\,\frac{c^\eta}{c^\eta} =$$

$$= +\frac{a}{c}\,\frac{bc^\eta c - adc^\eta}{c^2c^\eta\left(x+\frac{d}{c}\right)} = \frac{a}{c} + \frac{mc}{c^2c^\eta\left(x+\frac{d}{c}\right)} = \frac{a}{c} + \frac{m}{c^\eta c\left(x-\left(\frac{a}{c}\right)^\eta\right)}\Bigg)$$

sicché γ altro non è che una « trasformazione per raggi vettori reciproci »; mentre se è $c=o$ (deve allora essere $d \neq o$ nonché $a \neq o$) x^γ assume la forma:

$$x^\gamma = \frac{a}{b}x + \frac{b}{d} \tag{4}$$

OSSERVAZIONE 6. Notiamo che nel caso x^γ si possa scrivere nella forma data dalla (3) risulta:

$$\left(x-\left(\frac{a}{c}\right)^{\eta}\right)\cdot\left(x-\left(\frac{a}{c}\right)^{\eta}\right)^{\gamma}=\left(x-\left(\frac{a}{c}\right)^{\eta}\right)\left(\frac{a}{c}+\frac{m}{cc^{\eta}}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{1}{x-\left(\frac{a}{c}\right)^{\eta}}-\frac{a}{c}\right)=\frac{m}{cc^{\eta}}.$$

Osservazione 7. Notiamo ancora che nel caso x^{η} si possa scrivere nella forma (4), le relazioni (2) si presentano:

$$aa^{\eta}=m$$

$$a^{\eta}b+b^{\eta}d=o$$

$$dd^{\eta}=m$$

sicché $m>o$ (θ).

Passiamo ora a studiare i coniugi di strutture paracomplesse di $\mathcal{K}(x)$ che estendono la struttura paracomplessa $\mu=(\eta,\theta)$ sul corpo algebricamente chiuso $\mathcal{K}$.

Se γ è il coniugio di una struttura paracomplessa di $\mathcal{K}(x)$ che estende μ risulta per ogni $s\in\mathcal{K}_{\eta}$ che $ss^{\gamma}\in\mathcal{K}(x)$ tale che $ss^{\gamma}\geqslant o$ (θ) sicché ricordando le osservazioni 6), 7), in virtù del lemma 1) si ha il seguente:

Lemma 2. Condizione necessaria e sufficiente affinché un automorfismo γ di $\mathcal{K}(x)$ sia il coniugio di una struttura paracomplessa di $\mathcal{K}(x)$ che estende μ, è che:

esistano $a, b, c, d\in\mathcal{K}$ con $ad-bc=1$ *e* $m\in\mathcal{K}_{\eta}$ $m>o$ (θ) tali che:

$$k^{\gamma}=k^{\eta}\text{ per ogni }k\in\mathcal{K}$$

$$x^{\gamma}=\frac{ax+b}{cx+d}$$

nonché:

$$\begin{Vmatrix}a^{\eta} & b^{\eta}\\ c^{\eta} & d^{\eta}\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}a & b\\ c & d\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}m & o\\ o & m\end{Vmatrix}$$

ovvero:

$$a^{\eta}a+b^{\eta}c=m$$

$$a^{\eta}b+b^{\eta}d=o$$

$$c^{\eta}a+d^{\eta}c=o$$

$$c^{\eta}b+d^{\eta}d=m$$

Poiché φ determina l'espressione

$$x^{\gamma}=\frac{ax+b}{cx+d}$$

allora consideriamo la funzione (nella variabile z) seguente

$$h(z)=\frac{az^{\eta}+b}{cz^{\eta}+d} \qquad z\in\mathcal{K}\cup\{\infty\}$$

e diciamo Γ_{φ} il luogo di equazione

$$z=h(z)$$

che risulta essere non vuoto per l'ipotesi fatta su $\mathcal{K}$ di essere algebricamente chiuso e per la condizione di positività di m. Mediante una proiettività di P^1 $(\mathcal{K})$ è possibile trasformare Γ_{γ} in $\mathcal{K}_{\eta}\cup\{\infty\}$. Pertanto Γ_{γ} è una retta $\mathcal{K}_{\eta}$-proiettiva contenuta nella retta $\mathcal{K}$-proiettiva $\mathcal{K}\cup\{\infty\}$.

OSSERVAZIONE 8. Nel caso sia $c\neq o$ la funzione $h(z)$ assume la forma:

$$h(z)=\frac{a}{c}+\frac{m}{cc^{\eta}\left(z-\frac{a}{c}\right)^{\eta}}$$

sicché l'equazione della retta $\mathcal{K}_{\eta}$-proiettiva Γ_{γ} diventa:

$$\left(z-\frac{a}{c}\right)\left(z-\frac{a}{c}\right)^{\eta}=\frac{m}{cc^{\eta}}$$

mentre nel caso $c=o$ l'equazione della retta $\mathcal{K}_\eta$-proiettiva Γ_φ è:

$$z=\frac{a}{d}z^\eta+\frac{b}{d}.$$

Se φ è il coniugio individuato da $x^\varphi=x$, Γ_φ è la retta $\mathcal{K}_\eta$-proiettiva prototipo $\mathcal{K}_\eta \cup \{\infty\}$.

Dall'osservazione 8) appare chiaro che ogni retta Γ $\mathcal{K}_\eta$-proiettiva determina il coniugio di una struttura paracomplessa di $\mathcal{K}(x)$ che estende μ e il teorema 1) resta così dimostrato.

Esempio. Si consideri il caso particolare $\mathcal{K}=\boldsymbol{C}$ corpo dei numeri complessi dotato della ardinaria struttura paracomplessa. Allora l'insieme dei coniugi di strutture paracomplesse che estendono quella ordinaria è in corrispondenza bigettiva con le rette proiettive reali Γ contenute nella retta complessa (ovvero i cerchi o rette di $\boldsymbol{R}^2 \cup \{\infty\}$). In questo caso ogni filtro d'archi a nocciolo vuoto ha un punto aderente. Il filtro d'archi resta individuato dal punto aderente $z_0 \in \Gamma$ e da una orientazione di Γ. Si ottiene così che la totalità delle strutture paracomplesse di $\boldsymbol{C}(x)$ che estendono la struttura paracomplessa ordinaria di $\boldsymbol{C}$ è una varietà reale di dimensione quattro.

Questo risultato non può essere generalizzato a corpi $\mathcal{K}$ algebricamente chiusi a causa dell'esistenza di lacune e quindi di filtri d'archi privi di punti aderenti.

Dimostrazione del teorema 2. Consideriamo il coniugio φ di una struttura paracomplessa di $\mathcal{K}(x)$ che estende μ, per il teorema 1), sia $z=h(z)$ la equazione della retta $\mathcal{K}_\eta$-proiettiva in $P^1(\mathcal{K})$ Γ_γ, ad esso associata, alora ogni elemento $p \in \mathcal{K}(x)$ viene trasformato mediante φ in uno q tale che

$$q(z)=p(h(z))^\eta \qquad z \in \mathcal{K} \cup \{\infty\}$$

e pertanto il sottocorpo di $\mathcal{K}(x)$ fisso rispetto a φ, ossia $\mathcal{K}(x)_\varphi$, è costituito da quelle funzioni razionali che assumono valori in $\mathcal{K}_\eta \cup \{\infty\}$ su Γ_φ.

Sia $\mathfrak{F}$ un filtro d'archi a nocciolo vuoto su Γ_φ e consideriamo l'insieme Q delle funzioni razionali a coefficienti in $\mathcal{K}$ che assumono valori positivi rispetto a θ su qualche arco di $\mathfrak{F}$. A partire da Q possiamo definire su $\mathcal{K}(x)_\varphi$ un ordinamento $\theta_{\mathfrak{F}}$ in tal modo:

$$\alpha > \beta\ (\theta_{\mathfrak{F}}) \text{ se } \alpha(z) - \beta(z) \in Q$$

Risultato $\theta_{\mathfrak{F}}$ ristretto a $\mathcal{K}_\eta$ coincidere con θ e se $ss^\varphi \geqslant 0\ (\theta_{\mathfrak{F}})$ qualunque sia $s \in \mathcal{K}(x)$, ne segue che

$(\varphi, \theta_{\mathfrak{F}})$ è una srtuttura paracomplessa di $\mathcal{K}(x)$ che estende μ. L'applicazione così costruita che al filtro d'archi $\mathfrak{F}$ di Γ_φ associa la struttura paracomplessa $(\varphi, \theta_{\mathfrak{F}})$ che estende $\mu = (\eta, \theta)$ è evidentemente ben definita.

Sia ora (φ, δ) una struttura paracomplessa di $\mathcal{K}(x)$ che estende μ, trasformiamo, mediante una proiettività Π di $P^1(\mathcal{K})$ la retta $\mathcal{K}_\eta$-proiettiva prototipo $\mathcal{K}_\eta \cup \{\infty\}$; paralellamente il sottocorpo $\mathcal{K}(x)_\varphi$ si muta (tramite l'automorfismo associato alla proiettività Π) nel sottocorpo $\mathcal{K}(x)_o$ delle funzioni razionali su $\mathcal{K}_\eta$, isomorfo al corpo $\mathcal{K}_\eta(x)$. Riduciamo così il problema a quello di caratterizzare l'ordinamento δ_o (trasformato di δ) di $\mathcal{K}(x)_o$.

Diciamo $\varepsilon \in \mathcal{K}(x)_o$ la funzione identica $\varepsilon(z) = z$, questo elemento di $\mathcal{K}(x)_o$ confrontato con gli elementi di $\mathcal{K}_\eta$ li ripartisce in due classi A e B, ponendo in A quelli che precedono ε, nell'ordinamento δ_o, ed in B quelli che seguono ε. Così (A, B) è una sezione di $\mathcal{K}_\eta$ e per quanto detto nel paragrafo **1** individua un filtro d'archi $\mathfrak{F}_o$ su $\mathcal{K}_\eta \cup \{\infty\}$ a nocciolo vuoto.

Possono presentarsi i seguenti casi per la sezione (A, B):

i) A *e* B sono non vuote e A possiede massimo;

ii) A e B sono non vuote e B possiede minimo;

iii) A è vuota (quindi) B è tutta $\mathcal{K}_\eta$;

iv) B è vuota (quindi) A è tutta $\mathcal{K}_\eta$;

VI A e B sono non vuote, né A ha massimo né B ha minimo, e ricordiamo che in uno qualsiasi dei casi i), ii), iii), iv) è (A, B) una sezione continua mentre è una lacuna in v).

Supponiamo sia (A, B) una lacuna di $\mathcal{K}_\eta$ allora il filtro d'archi $\mathfrak{F}_o$ a noccolo vuoto su $\mathcal{K}_\eta \cup \{\infty\}$ non ha punti aderenti.

Per un polinomio monoico di primo grado la condizione di positività rispetto a δ_o coincide con l'essere positivo, rispetto a θ, in un segmento

$\overline{\alpha\beta}$ con $\alpha \in A$ e $\beta \in B$ ovvero con l'essere positivo, rispetto a θ, su qualche arco di $\mathfrak{F}$.

Poiché i soli polinomi irriducibili su $\mathcal{K}_\eta$ sono:

i polinomi di primo grado;

i polinomi di secondo grado: ax^2+bx+c con $b^2-4ac<0$ (θ) (infatti il corpo $\mathcal{K}$ è algebricamente chiuso ed è $\mathcal{K}=\mathcal{K}_\eta(\sqrt{-2})$) ogni funzione razionale diversa da quella nulla su $\mathcal{K}_\eta$ ha la forma:

$$p(z)=a_o \frac{Q_1(z)\cdot Q_2(z) \ldots Q_t(z)}{P_1(z)\cdot P_2(z) \ldots P_s(z)}$$

ove $a_o \in \mathcal{K}_\eta$, $a_o \neq o$ e P_1, P_2, ..., P_s, Q_2, ..., Q_t sono polinomi a valori in $\mathcal{K}_\eta$ per $z \in \mathcal{K}_\eta$; quelli eventuali di secondo grado sono della forma $(z-$ $-n)^2+m^2$ con n, $m \in \mathcal{K}_\eta$ e $m \neq o$ che ovviamente assumono valori positivi e sono positivi e sono positivi anche nell'ordinamento δ_o di $\mathcal{K}(x)_o$ in quanto somme di quadrati.

Quindi p è positivo rispetto a δ_o se e solo se nell'elenco seguente

$$a_o\ , P_1\ , P_2\ , \ldots, P_s\ , Q_1\ , Q_2\ , \ldots, Q_t$$

vi è un numero pari di elementi negativi e si ha ciò se e solo se $p(z)$ è positiva, rispetto a θ, in un segmento $\overline{\alpha\beta}$ con $\alpha \in A$, $\beta \in B$ ovvero se $p(z)$ è positiva, rispetto a θ, su qualche arco del filtro $\mathfrak{F}_o$.

Riportandoci alla situazione originaria mediante la proiettività Π^{-1} gli archi di $\mathfrak{F}_o$ si trasformano in archi di Γ_φ e questi ultimi formano un filtro d'archi $\mathfrak{F}$ su Γ_φ a nocciolo vuoto senza punti aderenti, così il criterio di positività per gli elementi di $\mathcal{K}(x)_\varphi$, rispetto a δ, consiste nella positività, rispetto a θ, dei valori assunti dalle funzioni razionali su qualche arco di $\mathfrak{F}$.

Se (A, B) è invece una sezione continua il filtro d'archi $\mathfrak{F}$ su $\mathcal{K}_\eta \cup$ $\cup \{\infty\}$ a nocciolo vuoto ha un punto aderente che coincide con l'elemento di separazione della sezione se questa è propria, con ∞, se è impropria.

In modo analogo si prova che: se A ha massimo (rispettivamente B ha minimo) $m_o \in \mathcal{K}_\eta$ il criterio di positività consiste nella positività, rispetto a θ, dei valori assunti localmente alla destra (rispettivamente alla sinistra) di m_o ovvero nella positività rispetto a θ, dei valori assunti su qualche arco di $\mathfrak{J}_o$ se (A, B) è la sezione impropria $(\mathcal{K}_\eta, \emptyset)$ (rispettivamente $(\emptyset, \mathcal{K}_\eta)$) nell'assumere valori positivi, rispetto a θ, in intorni destri (rispettivamente sinistri) del punto ∞.

L'applicazione che ad ogni filtro d'archi su Γ_φ a nocciolo vuoto associa la struttura paracomplessa $(\varphi, \theta_{\mathfrak{F}})$ dinanzi definita risulta essere bigettiva, come asserito nel teorema 2).

Notiamo ancora che mediante la proprietà di $\mathcal{K} \cup \{\infty\}$

$$z \mapsto \frac{1}{z-m_o}$$

$$z \mapsto -\frac{1}{z-m_o}$$

$$z \mapsto -z$$

i casi i) ii) iii) si riconducono al caso iv) da cui segue l'affermazione contenuta nell'osservazione 3.

BIBLIOGRAFIA

[1] DARBO G.: *Aspetti algebrico-categoriali della teoria dei dispositivi*, Symposia Mat., Vol. IV, 1970.

[2] JACOBSON N.: *Lectures in abstract algebra*, Vol. III, 1964, Van Nostrand Company, Princeton New Jersey.

Manoscritto pervenuto in redazione il 13 aprile 1972.