

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

FRANCA BUSULINI

**Contributo sulle proiettività tra due rette in
un piano desarguesiano**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 47 (1972), p. 43-55

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1972__47__43_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

CONTRIBUTO SULLE PROIETTIVITÀ
TRA DUE RETTE IN UN PIANO DESARGUESIANO

FRANCA BUSULINI *)

Questa Nota è un seguito della [3]; sono per essa importanti le definizioni ivi date, di asse proiettante e coppia proiettante.

In un piano grafico desarguesiano si chiama proiettività π tra due rette distinte S, S_2 un prodotto di prospettività. È noto che π si può ottenere come prodotto di due prospettività soltanto: $\pi = \lambda \lambda_1$ [7, 4, 5, 6, 2, 3], tali che la retta intermediaria S_1 sia assegnata in modo generico, mentre i centri s, s_1 di λ, λ_1 (centri di proiezione della π) sono vincolati anche dalla scelta di S_1 . La retta $A = s s_1$ verrà chiamata *asse proiettante* e la coppia di punti della π in cui A sega S, S_2 , ove siano distinti, si dirà *coppia proiettante*, in quanto essi si possono assumere come centri di proiezione della π [3].

Supposto il piano desarguesiano non pascaliano, indicheremo, con K il corpo (non commutativo) delle coordinate affini e con H il gruppo moltiplicativo del centro di K ; S, S_2 verranno assunti come assi cartesiani X, Y e generalmente S_1 come retta impropria.

La proprietà sopra richiamata $\pi = \lambda \lambda_1$ e la scelta opportuna della retta intermediaria S_1 consentono di pervenire rapidamente all'equazione della proiettività π (P. 1): $\gamma \alpha x + \beta x + y \gamma + \delta = 0$. Sarà molto utile l'osservazione, cfr. (3), che i coefficienti di detta equazione sono individuati a meno di un $r \in H$.

Sussistono le seguenti caratterizzazioni della prospettività (PP. 5, 2, 3):

*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del Comitato nazionale per la matematica del C.N.R.

C. n. e s. affinché una proiettività, $\pi = \lambda\lambda_1$ tra due rette distinte X, Y con il punto comune unito, sia una prospettività è che si verifichi una delle seguenti condizioni

- (i) *essa abbia almeno una coppia proiettante;*
- (ii) *nella rispettiva equazione $\gamma \in H$;*
- (iii) *scelto $S_1 = L_\infty$, le ascisse dei centri di proiezione siano congrue mod H .*

Con riferimento agli assi proiettanti si ha (PP. 6, 7):

In ogni proiettività π tra due rette distinte X, Y con il punto comune o unito, l'insieme dei « coefficienti angolari » dei suoi assi proiettanti per o è un sistema laterale di H rispetto al gruppo moltiplicativo di K ;

(i) se la π non è una prospettività, gli unici suoi assi proiettanti sono quelli per o ;

(ii) se la π è una prospettività, assi proiettanti, oltre quelli per o , sono le congiungenti ogni coppia di punti corrispondenti distinti della π , e questi soltanto.

La P. 14 completa l'indagine sugli assi proiettanti.

Inoltre (P. 10):

Una proiettività tra due rette distinte X, Y con il punto comune o non unito, assumendo $S_1 = L_\infty$ e i centri di proiezione coppia proiettante, ha l'equazione $y = -\delta x^{-1} \alpha^{-1}$, $\delta \neq 0$; e viceversa. Le sue coppie proiettanti sono $s_1 = (r\alpha^{-1}, 0)$, $s = (0, -r^{-1}\delta)$, $r \in H$, e queste soltanto.

Le PP. 12, 13 ci danno le coppie proiettanti di una qualsiasi proiettività tra due rette distinte X, Y con il punto comune non unito, completando il risultato espresso dalle PP. 1, 10, 11, 12 della [3], cfr. p. 52.

1. Sia Σ un piano grafico desarguesiano e non pascaliano. Ricordiamo che:

Due punteggiate di Σ riferite come *sezioni* di uno stesso fascio di rette di centro s si corrispondono nella *prospettività* λ , di *centro* di prospettività s .

Diremo proiettività π tra due rette di Σ una corrispondenza che sia

una prospettività o il prodotto di un numero finito qualsiasi di prospettività.

Data una proiettività $\pi = \lambda\lambda_1$ fra due rette S, S_2 di « retta intermedia » S_1 chiederemo (figg. 1, 2, 3):

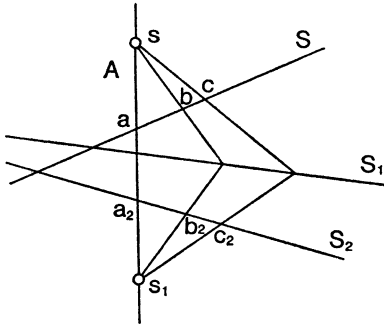


Fig. 1.

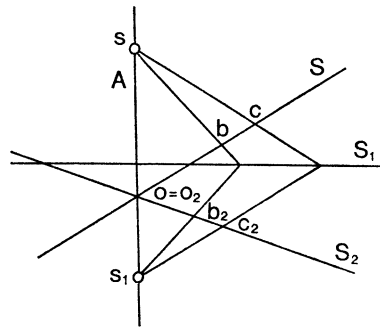


Fig. 2.

1) i punti s, s_1 centri delle λ, λ_1 centri di proiezione; ovviamente $s, s_1 \notin S_1, s \notin S, s_1 \notin S_2$;

2) la retta $A = s s_1$ asse proiettante.

Rileviamo che l'asse proiettante A sega le rette S, S_2 in una coppia di punti corrispondenti della π . Se in particolare i centri di proiezione sono $s = a_2 \in S_2$ e $s_1 = a \in S$ (quindi $S \neq S_2$) la coppia (a, a_2) , dicesi una coppia proiettante della π .

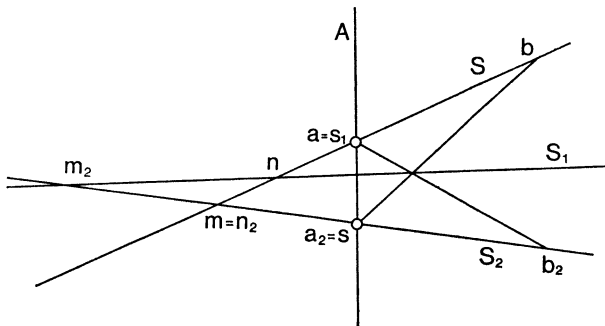


Fig. 3.

Indichiamo con K il corpo (non commutativo) delle coordinate affini e con H il gruppo moltiplicativo del centro di K .

2. Sia π una proiettività tra due rette distinte S, S_2 che assumiamo rispettivamente come assi cartesiani X, Y . È noto che π si può ottenere come prodotto di due prospettività soltanto: $\pi = \lambda \lambda_1$ [7, 4, 5, 6, 2, 3].

Scegliamo la retta impropria L_∞ come retta intermediaria, rimanendo così escluse dalla nostra considerazione le proiettività in cui (x_∞, y_∞) è una coppia di punti corrispondenti.

Poichè, come abbiamo supposto, L_∞ è retta intermediaria, i due centri di proiezione s, s_1 sono punti propri; siano: $s = (a, b)$, $s_1 = (a_1, b_1)$, con naturalmente

$$(1) \quad b \neq 0, \quad a_1 \neq 0.$$

Con semplici calcoli si ottiene l'equazione della π :

$$(2) \quad ya_1^{-1}x - b_1a_1^{-1}x - ya_1^{-1}a + b_1a_1^{-1}a - b = 0,$$

che con le posizioni

$$(3) \quad \alpha = ra_1^{-1}, \quad \beta = -rb_1a_1^{-1}, \quad \gamma = -ra_1^{-1}a, \quad \delta = r(b_1a_1^{-1}a - b);$$

$r \in H,$

si scrive

$$(4) \quad yax + \beta x + y\gamma + \delta = 0.$$

Viceversa un'equazione (4) rappresenta una proiettività del tipo della π se essa si può scrivere nella forma (2). Basta perciò invertendo le (3) porre

$$(5) \quad a_1 = \alpha^{-1}r, \quad b_1 = -\beta\alpha^{-1}, \quad a = -\alpha^{-1}\gamma, \quad b = r^{-1}(\beta\alpha^{-1}\gamma - \delta).$$

Però dovendo la (2) soddisfare alle condizioni (1), la (4) dovrà soddisfare alla condizione

$$(6) \quad \beta\alpha^{-1}\gamma - \delta \neq 0.$$

3. Sia ora π una proiettività tra le due rette distinte X, Y con la coppia di punti corrispondenti (x_∞, y_∞) .

Per determinarne l'equazione, la supporremo (come ci è lecito) generata dal prodotto di due prospettività con retta intermediaria S_1 di equazione $\xi=1$; ne segue che il centro di proiezione s dovrà essere improprio. Siano: $s_\infty=(m)$, $s_1=(a_1, b_1)$, con naturalmente

$$(7) \quad m \neq 0, \quad a_1 \neq 0, 1.$$

Con semplici calcoli si ottiene l'equazione della π :

$$(8) \quad mx + y(1 - a_1^{-1}) + ba_1^{-1} - m = 0,$$

che con le posizioni

$$(9) \quad \beta = rm, \quad \gamma = r(1 - a_1^{-1}), \quad \delta = r(b_1 a_1^{-1} - m); \quad r \in H,$$

si scrive

$$(10) \quad \beta x + y\gamma + \delta = 0.$$

Viceversa un'equazione (10) rappresenta una proiettività del tipo della π se essa si può scrivere nella forma (8). Basta perciò invertendo le (9) porre

$$(11) \quad \begin{aligned} m &= r^{-1}\beta, & a_1 &= (1 - r^{-1}\gamma)^{-1}, \\ b_1 &= r^{-1}(\beta + \delta)(1 - r^{-1}\gamma)^{-1}; & r &\neq \gamma^{-1}. \end{aligned}$$

Però dovendo la (8) soddisfare alle condizioni (7), la (10) dovrà soddisfare alle condizioni

$$(12) \quad \beta, \gamma \neq 0.$$

Come conclusione:

P. 1. *Una proiettività fra due rette distinte X, Y è rappresentata da un'equazione [1]:*

$$y\alpha x + \beta x + y\gamma + \delta = 0,$$

con

$$\beta\alpha^{-1}\gamma - \delta \neq 0$$

oppure

$$\alpha = 0, \quad \beta, \gamma \neq 0.$$

4. Sia π una prospettività fra le due rette distinte X, Y di centro di prospettività proprio $\bar{s} = (a, b)$. Naturalmente

$$(13) \quad a, b \neq 0.$$

Con semplici calcoli si ottiene l'equazione della π

$$(14) \quad ya^{-1}x - ba^{-1}x - y = 0,$$

che con le posizioni

$$(15) \quad \alpha = ra^{-1}, \quad \beta = -rba^{-1}, \quad \gamma = -r; \quad r \in H,$$

si scrive

$$(16) \quad y\alpha x + \beta x + y\gamma = 0; \quad \gamma \in H.$$

Viceversa si ha per le coordinate di \bar{s}

$$(17) \quad a = -\gamma\alpha^{-1}, \quad b = -\beta\alpha^{-1}; \quad \gamma \in H.$$

Dovendo la (14) soddisfare alle condizioni (13), la (16) dovrà soddisfare alle condizioni

$$(18) \quad \alpha, \beta \neq 0.$$

Se la prospettività ha come centro il punto improprio della retta $\eta = n\xi$, $n \neq 0$, la sua equazione è

$$(19) \quad nx + y = 0, \quad n \neq 0,$$

o più in generale

$$(20) \quad \beta x + \gamma y = 0, \quad \gamma \in H, \quad \beta \neq 0.$$

Viceversa la (20) rappresenta la prospettività di centro improprio $(n) = (\beta\gamma^{-1})$.

Come conclusione:

P. 2. *Una prospettività fra due rette distinte X, Y è rappresentata da un'equazione*

$$\gamma \alpha x + \beta x + \gamma y = 0, \quad \text{con } \gamma \in H, \quad \beta \neq 0;$$

e viceversa.

Come conseguenza della P. 2, tenuto conto delle espressioni di γ date dalle (3), (9):

$$\gamma = -r a_1^{-1} a, \quad \gamma = r(1 - a_1^{-1}),$$

si ha che

P. 3. *C. n. e s. affinché una proiettività $\pi = \lambda \lambda_1$ fra due rette distinte X, Y con il punto comune unito sia una prospettività è che*

(i) *scelto $S_1 = L_\infty$, le ascisse dei centri di proiezione siano congrue mod H ;*

(ii) *se (x_∞, y_∞) è coppia della π , l'ascissa del centro di proiezione proprio appartenga ad H .*

OSSERVAZIONE. La condizione $\beta \neq 0$ della P. 2 porta in forza delle (3) a $b_1 \neq 0$. Inoltre $\delta = 0, b_1 \neq 0 \Rightarrow a_1^{-1} a = b_1^{-1} b$; ne segue con riferimento alla (i) della P. 3: $a_1^{-1} a \in H \Leftrightarrow b_1^{-1} b \in H$.

Come corollario della precedente P. 3, (i) si ha (fig. 4)

P. 4. *Date due rette A, S_1 , tre punti $o, s, s_1 \in A$ e $\notin S_1$, due punti $u, v_2 \in S_1$ e $\notin A$, detto x_1 un punto generico di S_1 ; introdotto sulla retta A un sistema di ascisse di origine o e punto improprio $A \cap S_1$, tutti gli esagoni $s_1 u o v_2 s x_1$ sono pascaliani se e solo se le ascisse di s, s_1 sono congrue mod H .*

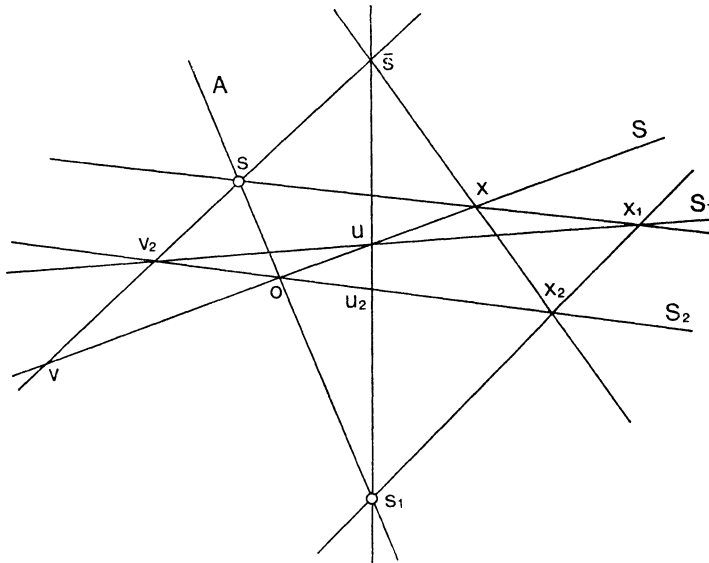


Fig. 4.

Infatti, posto $S = o u$, $S_2 = o v_2$, dire che tutti gli esagoni $s_1 u o v_2 s x_1$ sono pascaliani equivale a dire che la π fra S, S_2 , generata mediante i centri di proiezione s, s_1 e retta intermediaria S_1 , è una prospettività (fig. 4).

Infine da [3, PP. 1, 10], cfr. p. 52, segue

P. 5. *C. n. e s. affinché una proiettività tra due rette distinte con il punto comune unito sia una prospettività è che essa abbia almeno una coppia proiettante.*

5. Passiamo ora a studiare le proiettività tra due rette distinte con il punto comune unito.

Facciamo dapprima tale ipotesi con riferimento alla π di equazione (2). Detta $\eta = n\xi$ ($n \neq 0$) l'equazione di un asse proiettante per $o = X \cap Y$, risulta $s = (a, na)$, $s_1 = (n^{-1}b_1, b_1)$; $a, b_1 \neq 0$, (abbiamo fissati a e b_1 perchè univocamente determinati dalla equazione della π , cfr. (5)).

Pertanto l'equazione (2) diviene

$$(21) \quad yb_1^{-1}nx - nx - yb_1^{-1}na = 0,$$

cioè $y\alpha x + \beta x + y\gamma = 0$ con

$$(22) \quad \alpha = rb_1^{-1}n, \quad \beta = -rn, \quad \gamma = -rb_1^{-1}na; \quad r \in H.$$

Viceversa

$$(23) \quad n = -r^{-1}\beta, \quad b_1 = -\beta\alpha^{-1}, \quad a = -\alpha^{-1}\gamma.$$

L'ipotesi che o è unito facciamola ora nella π di equazione (8). L'equazione di un asse proiettante A per o è $\eta = m\xi$ ($m \neq 0$), inoltre $s_\infty = (m)$, $s_1 = (a_1, ma_1)$ con $a_1 \neq 0, 1$.

Pertanto l'equazione (8) non presenta variazioni, salvo l'ovvia scomparsa del termine noto.

Tenuto conto delle espressioni dei coefficienti angolari n, m in entrambi i casi considerati, cfr. (23), (11), possiamo concludere con la

P. 6. In ogni proiettività π tra due rette distinte con il punto comune o unito, l'insieme dei « coefficienti angolari » dei suoi assi proiettanti per o è un sistema laterale di H rispetto al gruppo moltiplicativo di K .

Questo risultato è particolarmente interessante nel caso delle proiettività tra due rette distinte con il punto comune unito e che non siano prospettività. Come noto [7, 5] esse esistono in un piano desarguesiano e non pascaliano quale è il nostro. Per tali proiettività gli unici assi proiettanti sono quelli per o , come risulta dalla proprietà seguente

P. 7. In ogni proiettività π tra due rette distinte con il punto comune o unito

(i) che non sia una prospettività, gli unici assi proiettanti sono quelli per o ;

(ii) che sia una prospettività, assi proiettanti, oltre quelli per o , sono le congiungenti ogni coppia di punti corrispondenti distinti della π , e questi soltanto.

Infatti la P. 6 appena verificata garantisce l'esistenza di assi proiettanti per o . Per proseguire ci richiameremo ad alcune proprietà della Nota [3].

La (i) è vera, giacchè se vi fosse un altro asse proiettante esso segherebbe le due rette distinte secondo una coppia proiettante [3, PP. 6, 7], in contrasto con [3, P. 10].

La (ii) è vera, giacchè in forza della [3, P. 1] ogni retta congiungente una coppia di punti corrispondenti distinti è asse proiettante e, oltre quelli per o , non ve ne sono ovviamente altri.

Le proprietà della Nota 3 intervenute nella dimostrazione sono le seguenti:

P. 1. In una prospettività fra due rette distinte ogni coppia di punti corrispondenti distinti è proiettante.

PP. 6, 7. Ogni prospettività fra due rette distinte è individuata da due coppie di punti corrispondenti e da un asse proiettante non contenente alcuna di queste coppie; in quanto si può scegliere come centri di proiezione della π una coppia di punti generici dell'asse proiettante A , in particolare se $a \neq a_2$ la coppia proiettante (a, a_2) , (fig. 3).

P. 10. Le uniche prospettività tra due rette distinte non dotate di coppie proiettanti sono quelle con il punto comune unito, che non siano prospettività.

6. Ogni prospettività tra due rette distinte X, Y con il punto comune o non unito è dotata di coppia proiettante [3, P. 10]. Assumendo questi punti come centri di proiezione, la retta intermediaria $S_1 \neq o$ sega X, Y nei corrispondenti di o (fig. 3).

L'equazione di una tale π^* con $S_1^* = L_\infty$, $s^* = (0, b)$, $s_1^* = (a_1, 0)$; $a_1, b \neq 0$ è (cfr. (2)): $ya_1^{-1}x - b = 0$, cioè

$$(24) \quad y = bx^{-1}a_1.$$

Viceversa ogni equazione del tipo della (24) rappresenta una prospettività tra gli assi cartesiani X, Y con la coppia proiettante (s_1^*, s^*) e retta intermediaria L_∞ .

Conveniamo di indicare la coppia proiettante (s_1^*, s^*) con (a_1, b) . Si ha che

P. 8. *C. n. e s. affinché*

$$(25) \quad y = bx^{-1}a_1, \quad y = \bar{b}x^{-1}\bar{a}_1$$

rappresentino la medesima proiettività tra due rette distinte X, Y è

$$(26) \quad a_1^{-1}\bar{a}_1 = b\bar{b}^{-1} = r \in H.$$

Infatti, la condizione è sufficiente: $\bar{b}x^{-1}\bar{a}_1 = r^{-1}bx^{-1}a_1r = bx^{-1}a_1$. La condizione è necessaria: se le (25) rappresentano la medesima π^* , allora $a_1^{-1} = r\bar{a}_1^{-1}$, $b = r\bar{b}$; $r \in H$, quindi la tesi.

Come immediato corollario

P. 9. *La (26) è c. n. e s. affinché (a_1, b) e (\bar{a}_1, \bar{b}) siano coppie proiettanti di una proiettività tra due rette con il punto comune non unito [con riferimento ad un sistema di coordinate avente le due rette come assi cartesiani e la retta impropria come retta intermediaria], [3, PP. 11, 12].*

Pertanto

P. 10. *Una proiettività tra due rette distinte X, Y con il punto comune o non unito, assumendo $S_1 = L_\infty$ e i centri di proiezione coppia proiettante, ha l'equazione $y = -\delta x^{-1}\alpha^{-1}$, $\delta \neq 0$; e viceversa. Le sue coppie proiettanti sono $s_1 = (r\alpha^{-1}, 0)$, $s = (0, -r^{-1}\delta)$, $r \in H$, e queste soltanto.*

Si verificano le

P. 11. *C. n. e s. affinché (x_∞, y_∞) sia coppia proiettante della proiettività tra due rette distinte X, Y di equazione $\beta x + y\gamma + \delta = 0$ (P. 1) è $\gamma \in H$. In particolare se $\delta = 0$ la proiettività è una prospettività, PP. 2, 5.*

P. 12. *Le coppie proiettanti (a_1, b) della proiettività tra due rette distinte X, Y di equazione $\beta x + y\gamma + \delta = 0$ (P. 1), $\delta \neq 0$, sono*

$$(i) \quad \begin{cases} a_1 = -\beta^{-1}\delta(r^{-1}\gamma + 1)^{-1}, \\ b = -r^{-1}\delta(r^{-1}\gamma + 1)^{-1} = \delta\gamma^{-1}[(r^{-1}\gamma + 1)^{-1} - 1], \quad r \in H, \end{cases}$$

e queste soltanto.

P. 13. *Le coppie proiettanti* (a_1, b) *della proiettività tra due rette distinte* X, Y *di equazione* $\gamma\alpha x + \beta x + \gamma y + \delta = 0$ ($\beta\alpha^{-1}\gamma - \delta \neq 0$, P. 1), $\delta \neq 0$, *sono*

$$(ii) \begin{cases} a_1 = -[(r^{-1}\gamma + 1)\delta^{-1}\beta - r^{-1}\alpha]^{-1}, \\ b = -r^{-1}\delta(r^{-1}\gamma + 1)^{-1} = \delta\gamma^{-1}[(r^{-1}\gamma + 1)^{-1} - 1], \quad r \in H, \end{cases}$$

e queste soltanto.

OSSERVAZIONE. Una diversa rappresentazione degli stessi insiemi di coppie proiettanti (i), (ii) si ottiene cambiando r in $-r$.

Abbiamo così completato l'esame delle coppie proiettanti per una qualsiasi proiettività tra due rette distinte X, Y con il punto comune non unito. La P. 10 contiene ovviamente un caso particolare notevole della P. 13.

Le PP. 1, 10 della [3], cfr. p. 52, ci danno l'informazione sulle coppie proiettanti per ogni altra proiettività tra due rette distinte.

Infine è immediato che [3, PP. 6, 7], cfr. p. 52.

P. 14. *Gli assi proiettanti di una proiettività tra due rette distinte con il punto comune non unito sono le congiungenti le sue coppie proiettanti, e questi soltanto.*

Questa proprietà completa l'indagine sugli assi proiettanti di una proiettività tra due rette distinte espressa dalle PP. 6, 7.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BARLOTTI, A.: *Alcune osservazioni relative ai gruppi di proiettività su di una retta nei piani grafici*, Atti Conv. teoria gruppi finiti, Firenze (1960), pp. 153-154.
- [2] BUSULINI, F.: *Geometria dello spazio basata sul concetto di affinità fra rette*, Atti Ist. Ven., t. 121 (1962-63), pp. 341-383.
- [3] BUSULINI, F.: *Alcuni nuovi aspetti del teorema fondamentale della geometria proiettiva in un piano desarguesiano*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, t. 41 (1968), pp. 1-11.

- [4] HESSEMBERG, G.: *Grundlagen der Geometrie*, Berlin (1930).
- [5] PICKERT, G.: *Projective Ebenen*, Springer, Berlin (1955).
- [6] ROBINSON, G.: *The foundations of Geometry*, Toronto (1959).
- [7] SCHUR, F.: *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Leipzig (1909).

Manoscritto pervenuto in redazione il 24 settembre 1971.