

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANGELO FAVINI

Su una estensione del metodo d'interpolazione complesso

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 47 (1972), p. 243-298

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1972__47__243_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1972__47__243_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SU UNA ESTENSIONE DEL METODO D'INTERPOLAZIONE COMPLESSO

ANGELO FAVINI *)

Introduzione.

Un'estensione del metodo d'interpolazione reale a n -ple di spazi di Banach è stata fatta da A. Yoshikawa [12].

Il presente lavoro è invece dedicato allo studio del metodo d'interpolazione complesso per una terna di spazi di Banach, di cui si trova già un cenno in J. L. Lions, [8]: l'estensione da tre a n non presenta difficoltà nuove.

La prima parte è dedicata alla prova di risultati interpolatori corrispondenti a quelli già stabiliti per coppie di spazi, (cfr. [1], [4], [9], [10]).

Viene poi studiata la relazione fra terne e coppie di spazi d'interpolazione complessa, e in particolare, si prova (vedi, per la notazione, la Definizione 2) che, se A_0 , A_1 sono spazi di Banach,

$$[A_0, A_1, A_1]_{\theta, \rho} = [A_0, A_1]_{\theta + \rho}.$$

(cfr. la Nota al Teorema 6).

Viene poi provato che, sotto una certa condizione, $A_0 \cap A_1 \cap A_2$ è denso in $[A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}$; inoltre, si stabilisce un legame di immersione dipendente dai due parametri θ e ρ , precisamente,

$$A_2 \hookrightarrow A_1 \hookrightarrow A_0 \text{ normalmente} \Rightarrow [A_2, A_1, A_0]_{\theta, \rho} \hookrightarrow [A_2, A_1, A_0]_{\theta', \rho'},$$

con $0 \leq \theta + \rho \leq 1$, $0 \leq \theta' + \rho' \leq 1$, $\theta \leq \theta'$, $\rho \leq \rho'$ (cfr. Teorema 8).

*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico « S. Pincherle », Bologna.

Poi si ottiene, fra l'altro, che in generale valgono le seguenti immersioni

$$(I) \quad [A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho} \hookrightarrow [A_0, [A_1, A_2]_{\rho/(\theta+\rho)}]_{\theta+\rho},$$

$$[A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho} \hookrightarrow [[A_0, A_1]_{\theta+\rho}, [A_0, A_2]_{\theta+\rho}]_{\rho/(\theta+\rho)}.$$

Si considerano infine tre esempi. I primi due sono dati dagli spazi $B^{\lambda, p}$ e $H^{\lambda, p}$ e si verifica che per essi le inclusioni (I) sopra richiamate sono delle identità; il terzo esempio è una estensione a due operatori del calcolo operazionale che si trova nel lavoro di M. Schechter [9].

Una terna d'interpolazione (B_0, B_1, B_2) è una terna di spazi di Banach complessi, B_0, B_1, B_2 , immersi con continuità in uno spazio vettoriale topologico $\mathcal{A}$.

Se su $B_0 \cap B_1 \cap B_2 = \{x \in \mathcal{A}, x \in B_i, i=0, 1, 2\}$ si introduce la norma

$$\|x\|_{B_0 \cap B_1 \cap B_2} = \max\{\|x\|_{B_0}, \|x\|_{B_1}, \|x\|_{B_2}\},$$

$B_0 \cap B_1 \cap B_2$ diventa uno spazio di Banach.

Analogamente, se $B_0 + B_1 + B_2$ è lo spazio vettoriale degli elementi x di $\mathcal{A}$ per cui esistono $x_i \in B_i$ ($i=0, 1, 2$) tali che

$$x = x_0 + x_1 + x_2,$$

la funzione

$$x \rightarrow \|x\|_{B_0+B_1+B_2} = \inf\{\|x_0\|_{B_0} + \|x_1\|_{B_1} + \|x_2\|_{B_2}\}$$

dove l'estremo inferiore è calcolato su tutte le terne x_0, x_1, x_2 con $x = x_0 + x_1 + x_2$, è una norma su $B_0 + B_1 + B_2$ e $B_0 + B_1 + B_2$ è uno spazio di Banach.

Notiamo che sia $B_0 \cap B_1 \cap B_2$ che $B_0 + B_1 + B_2$ sono immersi con continuità in $\mathcal{A}$.

DEFINIZIONE 1. Siano B_0, B_1, B_2 spazi di Banach immersi con continuità in $\mathcal{A}$. Consideriamo l'insieme $\mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)$ delle funzioni $f = f(z, w)$, definite su $\overline{\Omega}$, a valori in $B_0 + B_1 + B_2$, dove

$$\Omega = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2, \operatorname{Re} z \geq 0, \operatorname{Re} w \geq 0, 0 \leq \operatorname{Re} z + \operatorname{Re} w \leq 1\},$$

che sono:

- (a) continue e limitate da $\overline{\Omega}$ a $B_0 + B_1 + B_2$;
- (b) olomorfe da Ω a $B_0 + B_1 + B_2$;
- (c) $\forall t, \tau \in \mathbf{R}, f(it, i\tau) \in B_0, f(1+it, i\tau) \in B_1, f(it, 1+i\tau) \in B_2$,

la f essendo continua e uniformemente limitata nella topologia di tali spazi.

PROPOSIZIONE 1. *Munito della norma*

$$\|f\|_{\mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)} = \max \left\{ \sup_{t, \tau} \|f(it, i\tau)\|_{B_0}, \sup_{t, \tau} \|f(1+it, i\tau)\|_{B_1}, \sup_{t, \tau} \|f(it, 1+i\tau)\|_{B_2} \right\},$$

$\mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)$ è uno spazio di Banach.

DIMOSTRAZIONE. Analoga a quella di Calderón, relativa a una coppia di spazi di Banach (cfr. [1], p. 129), in base al teorema di convessità in più dimensioni (cfr. [3], p. 521).

DEFINIZIONE 2. Per ogni $(\theta, \rho) \in \overline{\Omega}$, $\theta, \rho \in \mathbf{R}$, lo spazio $[B_0, B_1, B_2]_{\theta, \rho}$ è l'insieme di tutti gli elementi x di $B_0 + B_1 + B_2$ tali che $x = f(\theta, \rho)$ per una $f \in \mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)$, normato con

$$\|x\|_{[B_0, B_1, B_2]_{\theta, \rho}} = \inf_{f(\theta, \rho) = x} \|f\|_{\mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)}.$$

PROPOSIZIONE 2. $[B_0, B_1, B_2]_{\theta, \rho}$ è uno spazio di Banach.

DIMOSTRAZIONE. Notiamo, infatti, che $[B_0, B_1, B_2]_{\theta, \rho}$ è l'immagine di $\mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)$ attraverso l'applicazione lineare da $\mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)$ a $B_0 + B_1 + B_2$ definita da: $f \rightarrow f(\theta, \rho)$.

D'altra parte,

$$\begin{aligned} \|f(\theta, \rho)\|_{B_0 + B_1 + B_2} &\leq \max \left\{ \sup_{t, \tau} \|f(it, i\tau)\|_{B_0 + B_1 + B_2}, \right. \\ &\quad \left. \sup_{t, \tau} \|f(1+it, i\tau)\|_{B_0 + B_1 + B_2}, \sup_{t, \tau} \|f(it, 1+i\tau)\|_{B_0 + B_1 + B_2} \right\} \leq \\ &\leq \|f\|_{\mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)}. \end{aligned}$$

Pertanto, $f \rightarrow f(\theta, \rho)$ è continua da $\mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)$ a $B_0 + B_1 + B_2$.

Così se $\mathcal{N}_{\theta, \rho}$ denota il sottospazio di $\mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)$ di tutte le funzioni f tali che $f(\theta, \rho) = 0$, allora $\mathcal{N}_{\theta, \rho}$ è il nucleo della $f \rightarrow f(\theta, \rho)$ e, per la continuità di tale applicazione, $\mathcal{N}_{\theta, \rho}$ è un sottospazio chiuso di $\mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)$.

Di qui, $[B_0, B_1, B_2]_{\theta, \rho}$ è identificato allo spazio quoziente $\mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)/\mathcal{N}_{\theta, \rho}$ ed è perciò uno spazio di Banach, (cfr. [1], p. 129).

OSSERVAZIONE. Notiamo che

$$B_0 \cap B_1 \cap B_2 \hookrightarrow [B_0, B_1, B_2]_{\theta, \rho} \hookrightarrow B_0 + B_1 + B_2,$$

dove il simbolo $\hookrightarrow$ denota immersione continua.

Infatti, che $[B_0, B_1, B_2]_{\theta, \rho} \hookrightarrow B_0 + B_1 + B_2$ è chiaro.

Sia $x \in B_0 \cap B_1 \cap B_2$. Sia f la funzione tale che

$$f(z, w) = x, \quad (z, w) \in \overline{\Omega}.$$

Allora $f \in \mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)$ e

$$\|f\|_{\mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)} = \max \{ \|x\|_{B_0}, \|x\|_{B_1}, \|x\|_{B_2} \} = \|x\|_{B_0 \cap B_1 \cap B_2},$$

da cui

$$\|x\|_{[B_0, B_1, B_2]_{\theta, \rho}} = \inf_{f(\theta, \rho) = x} \|f\|_{\mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)} \leq \|x\|_{B_0 \cap B_1 \cap B_2}.$$

TEOREMA 1. *Siano (A_0, A_1, A_2) e (B_0, B_1, B_2) due terne di interpolazione, $A_i \hookrightarrow \mathcal{A}$, $B_i \hookrightarrow \mathcal{B}$. Sia T un operatore lineare da $A_0 + A_1 + A_2$ a $B_0 + B_1 + B_2$ tale che $x \in A_i$ implica che $Tx \in B_i$ ($i=0, 1, 2$) e*

$$\|Tx\|_{B_i} \leq C_i \|x\|_{A_i}.$$

Allora, $x \in [A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho} \Rightarrow Tx \in [B_0, B_1, B_2]_{\theta, \rho}$ e

$$\|Tx\|_{[B_0, B_1, B_2]_{\theta, \rho}} \leq C_0^{1-\theta-\rho} C_1^\theta C_2^\rho \|x\|_{[A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}}.$$

DIMOSTRAZIONE. Per comodità di scrittura, useremo a volte, nella

prova di questo risultato e nel seguito, $A_{\theta, \rho}$ per $[A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}$, $B_{\theta, \rho}$ per $[B_0, B_1, B_2]_{\theta, \rho}$, ecc.

Sia dunque x un elemento di $A_{\theta, \rho}$. Allora dalla Definizione 2 segue che $\forall \varepsilon > 0$ esiste $f \in \mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)$ tale che

$$f(\theta, \rho) = x \quad \text{e} \quad \|f\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)} \leq \|x\|_{A_{\theta, \rho}} + \varepsilon.$$

Poniamo:

$$g(z, w) = C_0^{z+w-1} C_1^{-z} C_2^{-w} T(f(z, w)), \quad (z, w) \in \overline{\Omega}.$$

Si ha:

$$\|g(it, i\tau)\|_{B_0} = C_0^{-1} \|T(f(it, i\tau))\|_{B_0} \leq \|f(it, i\tau)\|_{A_0} \leq \|f\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)};$$

$$\begin{aligned} \|g(1+it, i\tau)\|_{B_1} &= C_1^{-1} \|T(f(1+it, i\tau))\|_{B_1} \leq \|f(1+it, i\tau)\|_{A_1} \leq \\ &\leq \|f\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|g(it, 1+i\tau)\|_{B_2} &= C_2^{-1} \|T(f(it, 1+i\tau))\|_{B_2} \leq \|f(it, 1+i\tau)\|_{A_2} \leq \\ &\leq \|f\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)}. \end{aligned}$$

Inoltre, poichè T è un operatore lineare e continuo da A_i a B_i e quindi da $A_0 + A_1 + A_2$ a $B_0 + B_1 + B_2$, e $f \in \mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)$, g risulta limitata e continua da $\overline{\Omega}$ a $B_0 + B_1 + B_2$, olomorfa da Ω a $B_0 + B_1 + B_2$.

Dunque, $g \in \mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)$. D'altro canto, $g(\theta, \rho) = C_0^{\theta+\rho-1} C_1^{-\theta} C_2^{-\rho} T x$. Quindi, poichè

$$\|g\|_{\mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)} \leq \|f\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)} \leq \|x\|_{A_{\theta, \rho}} + \varepsilon,$$

e ε è un numero positivo arbitrario,

$$\|Tx\|_{B_{\theta, \rho}} = C_0^{1-\theta-\rho} C_1^{\theta} C_2^{\rho} \|g(\theta, \rho)\|_{B_{\theta, \rho}} \leq C_0^{1-\theta-\rho} C_1^{\theta} C_2^{\rho} \|x\|_{A_{\theta, \rho}}.$$

Il Teorema 1 sopra stabilito ammette una generalizzazione a certi operatori non lineari (cfr. [4]). Infatti, vale la seguente

PROPOSIZIONE 3. *Supponiamo $A_2 \hookrightarrow A_1 \hookrightarrow A_0$, $B_2 \hookrightarrow B_1 \hookrightarrow B_0$. Sia*

T un operatore derivabile secondo Fréchet da A_0 a B_0 , tale che:

$$u \in A_i \Rightarrow \|Tu\|_{B_i} \leq C_i \|u\|_{A_i} \quad (i=0, 1, 2).$$

Allora,

$$u \in [A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho} \Rightarrow \|Tu\|_{B_{\theta, \rho}} \leq C_0^{1-\theta-\rho} C_1^\theta C_2^\rho \|u\|_{A_{\theta, \rho}}.$$

DIMOSTRAZIONE. Prima di tutto notiamo che se $E_2 \hookrightarrow E_1 \hookrightarrow E_0$, allora $E_0 + E_1 + E_2$ coincide con E_0 , le norme nei due spazi essendo equivalenti, (cfr. [1], p. 160), per il teorema dell'inverso continuo.

Il risultato segue allora dal fatto che, se φ è una funzione di $\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)$, quindi olomorfa da Ω a A_0 , e T è Fréchet-derivabile da A_0 a B_0 , allora $T \circ \varphi$ è separatamente olomorfa, e di qui olomorfa, da Ω a B_0 .

In base a questa osservazione, la Proposizione 3 è conseguenza immediata del Teorema 1.

DEFINIZIONE 3. Se A, B sono spazi di Banach e $H(z, w) \in L(A, B)$ per ogni coppia $(z, w) \in \Xi \subset \mathbb{C}^2$, si dice che H è continua (olomorfa) su Ξ se per ogni $x \in A$, la funzione $(z, w) \rightarrow H(z, w)x$ è continua (olomorfa) da Ξ a B , (cfr. [9], p. 123).

TEOREMA 2. Sia $H(z, w)$ un elemento dello spazio $L(A_0 + A_1 + A_2, B_0 + B_1 + B_2)$, per ogni $(z, w) \in \overline{\Omega}$; inoltre $H(z, w)$ sia una funzione continua e limitata su $\overline{\Omega}$, olomorfa su Ω .

Se

$$H(it, i\tau) \in L(A_0, B_0), \quad H(1+it, i\tau) \in L(A_1, B_1), \quad H(it, 1+i\tau) \in L(A_2, B_2)$$

e sono continui e uniformemente limitati in questi spazi, con

$$\|H(it, i\tau)\|_{A_0 \rightarrow B_0} \leq C_0, \quad \|H(1+it, i\tau)\|_{A_1 \rightarrow B_1} \leq C_1,$$

$$\|H(it, 1+i\tau)\|_{A_2 \rightarrow B_2} \leq C_2,$$

allora

$$H(\theta + it, \rho + i\tau) \in L(A_{\theta, \rho}, B_{\theta, \rho}), \quad \forall t, \tau \in \mathbb{R}$$

e

$$\| H(\theta + it, \rho + i\tau) \|_{A_{\theta, \rho} \rightarrow B_{\theta, \rho}} \leq C_0^{1-\theta-\rho} C_1^{\theta} C_2^{\rho}.$$

DIMOSTRAZIONE. È del tutto analoga a quella del Teorema 1. Basta, per esempio, introdurre la funzione

$$g_{t, \tau}(z, w) = C_0^{z+w-1} C_1^{-z} C_2^{-w} H(z + it, w + i\tau) f(z, w), \quad (z, w) \in \overline{\Omega},$$

con t, τ numeri reali e $f(z, w)$ elemento di $\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)$ per cui

$$f(\theta, \rho) = x, \quad \| f \|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)} \leq \| x \|_{A_{\theta, \rho}} + \varepsilon.$$

TEOREMA 3. Sia B un operatore n -lineare da

$$(A_0^{(1)} + A_1^{(1)} + A_2^{(1)}) \times \dots \times (A_0^{(n)} + A_1^{(n)} + A_2^{(n)}) \text{ a } B_0 + B_1 + B_2,$$

tale che

$$(x_1, \dots, x_n) \in A_i^{(1)} \times \dots \times A_i^{(n)}$$

implica che $B(x_1, \dots, x_n) \in B_i$ ($i=0, 1, 2$) e

$$\| B(x_1, \dots, x_n) \|_{B_i} \leq M_i \| x_1 \|_{A_i^{(1)}} \dots \| x_n \|_{A_i^{(n)}}.$$

Allora

$$(x_1, \dots, x_n) \in A_{\theta, \rho}^{(1)} \times \dots \times A_{\theta, \rho}^{(n)} \Rightarrow B(x_1, \dots, x_n) \in B_{\theta, \rho}$$

e

$$\| B(x_1, \dots, x_n) \|_{B_{\theta, \rho}} \leq M_0^{1-\theta-\rho} M_1^{\theta} M_2^{\rho} \| x_1 \|_{A_{\theta, \rho}^{(1)}} \dots \| x_n \|_{A_{\theta, \rho}^{(n)}}.$$

DIMOSTRAZIONE. Proviamo l'affermazione per il caso di $n=2$. Sia

$$x \in [A_0^{(1)}, A_1^{(1)}, A_2^{(1)}]_{\theta, \rho}, \quad y \in [A_0^{(2)}, A_1^{(2)}, A_2^{(2)}]_{\theta, \rho}.$$

Allora, $\forall \varepsilon > 0$ esistono

$$f \in \mathcal{H}(A_0^{(1)}, A_1^{(1)}, A_2^{(1)}), \quad g \in \mathcal{H}(A_0^{(2)}, A_1^{(2)}, A_2^{(2)})$$

per cui

$$x = f(\theta, \rho), \quad \|f\|_{\mathcal{H}(A_0^{(1)}, A_1^{(1)}, A_2^{(1)})} \leq \|y\|_{A_{\theta, \rho}^{(1)}} + \varepsilon;$$

$$y = g(\theta, \rho), \quad \|g\|_{\mathcal{H}(A_0^{(2)}, A_1^{(2)}, A_2^{(2)})} \leq \|x\|_{A_{\theta, \rho}^{(2)}} + \varepsilon.$$

Sia

$$\Phi(z, w) = M_0^{z+w-1} M_1^{-z} M_2^{-w} B(f(z, w), g(z, w)), \quad (z, w) \in \overline{\Omega}.$$

Come nella dimostrazione del Teorema 1, si riconosce che $\Phi \in \mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)$ e

$$\|\Phi\|_{\mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)} \leq \|f\|_{\mathcal{H}(A_0^{(1)}, A_1^{(1)}, A_2^{(1)})} \|g\|_{\mathcal{H}(A_0^{(2)}, A_1^{(2)}, A_2^{(2)})}.$$

Di qui, poichè $\Phi(\theta, \rho) = M_0^{\theta+\rho-1} M_1^{-\theta} M_2^{-\rho} B(x, y)$, risulta

$$\begin{aligned} \|M_0^{\theta+\rho-1} M_1^{-\theta} M_2^{-\rho} B(x, y)\|_{B_{\theta, \rho}} &\leq \|f\|_{\mathcal{H}(A_0^{(1)}, A_1^{(1)}, A_2^{(1)})} \|g\|_{\mathcal{H}(A_0^{(2)}, A_1^{(2)}, A_2^{(2)})} \leq \\ &\leq [\|x\|_{A_{\theta, \rho}^{(1)}} + \varepsilon][\|y\|_{A_{\theta, \rho}^{(2)}} + \varepsilon]. \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di ε , l'affermazione è così provata. Per $n > 2$, la prova è del tutto analoga.

TEOREMA 4. Sia $x \in A_0 \cap A_1 \cap A_2$. Allora, $\forall(\theta, \rho) \in \overline{\Omega}$, $\theta, \rho \in \mathbf{R}$, vale

$$\|x\|_{[A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}} \leq \|x\|_{A_0}^{1-\theta-\rho} \|x\|_{A_1}^{\theta} \|x\|_{A_2}^{\rho}.$$

DIMOSTRAZIONE. Poniamo:

$$f(z, w) = \left(\frac{\|x\|_{A_1}}{\|x\|_{A_0}} \right)^{z-\theta} \left(\frac{\|x\|_{A_0}}{\|x\|_{A_2}} \right)^{w-\rho} x, \quad (z, w) \in \overline{\Omega}.$$

Si è supposto $x \neq 0$. In caso contrario, l'affermazione è ovvia. Dalla definizione segue che f è continua e limitata da $\overline{\Omega}$ a $A_0 + A_1 + A_2$, olo-morfa da Ω a $A_0 + A_1 + A_2$. Poi,

$$\begin{aligned} \|f(it, i\tau)\|_{A_0} &= \|f(1+it, i\tau)\|_{A_1} = \|f(it, 1+i\tau)\|_{A_2} = \\ &= \|x\|_{A_0}^{1-\theta-\rho} \|x\|_{A_1}^{\theta} \|x\|_{A_2}^{\rho}. \end{aligned}$$

Quindi, $f \in \mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)$. Inoltre, $f(\theta, \rho) = x$. Pertanto,

$$\|x\|_{[A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}} = \inf \|f\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)} \leq \|x\|_{A_0}^{1-\theta-\rho} \|x\|_{A_1}^{\theta} \|x\|_{A_2}^{\rho}.$$

LEMMA 1. Sia $\Theta = \{z \in \mathbf{C}, 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ e V, A, B siano spazi di Banach, con $A+B \hookrightarrow V$.

Sia poi $f: \overline{\Theta} \rightarrow V$, continua e limitata da $\overline{\Theta}$ a V , olomorfa da Θ a V , tale che $f(it) \in A$, ed è continua e limitata da $\mathbf{R}$ a A , $f(1+it) \in B$ ed è continua e limitata da $\mathbf{R}$ a B .

Allora $f(\theta) \in [A, B]_{\theta}$, $0 \leq \theta \leq 1$, (per cui, dunque, si può supporre $f \in \mathcal{H}(A, B)$).

DIMOSTRAZIONE. Poniamo (cfr. [1], p. 160)

$$g(z) = e^{(z-\theta)^2} f(z), \quad z \in \overline{\Theta}.$$

Poichè f è continua e limitata in $\overline{\Theta}$, g è continua e limitata in $\overline{\Theta}$; inoltre, g è chiaramente olomorfa in Θ .

Poi, $g(it) \in A$, $g(1+it) \in B$ e g è continua nella topologia di tali spazi. Infine,

$$\|g(it)\|_A = \|e^{(it-\theta)^2} f(it)\|_A = e^{-t^2} \|e^{\theta^2} f(it)\|_A \xrightarrow{|t| \rightarrow \infty} 0;$$

$$\|g(1+it)\|_B = \|e^{(1+it-\theta)^2} f(1+it)\|_B = e^{-t^2} \|e^{1+\theta^2-2\theta} f(1+it)\|_B \xrightarrow{|t| \rightarrow \infty} 0.$$

Ne segue, per un risultato di Calderón, (cfr. [1], p. 116), che g è continua e limitata da $\overline{\Theta}$ a $A+B$, olomorfa da Θ a $A+B$.

Pertanto, $g(\theta) \in [A, B]_{\theta}$. Ma $g(\theta) = f(\theta)$; di qui, $f(\theta) \in [A, B]_{\theta}$.

PROPOSIZIONE 4. Se $0 \leq \theta, \rho \leq 1$ allora

$$(1) \quad [B_0, B_1, B_2]_{\theta, 0} \hookrightarrow [B_0, B_1]_{\theta};$$

$$(2) \quad [B_0, B_1, B_2]_{0, \rho} \hookrightarrow [B_0, B_2]_{\rho}.$$

DIMOSTRAZIONE. Proviamo la (1). Sia x un elemento di $[B_0, B_1, B_2]_{\theta, 0}$. Allora, per definizione, esiste una $f \in \mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)$ tale che $f(\theta, 0) = x$.

Ora,

$$f(it, i\tau) \in B_0, f(1+it, i\tau) \in B_1, f(it, 1+i\tau) \in B_2, \quad \forall t, \tau \in \mathbf{R}.$$

Di qui, la funzione

$$g(z) = f(z, 0), \quad 0 \leq \Re z \leq 1,$$

soddisfa

$$g(it) = f(it, 0) \in B_0, \quad g(1+it) = f(1+it, 0) \in B_1,$$

con

$$\|g(it)\|_{B_0} \leq \|f\|_{\mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)}, \quad \|g(1+it)\|_{B_1} \leq \|f\|_{\mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)}$$

e tali funzioni sono continue in queste norme.

Inoltre, g è, per le proprietà della $f \in \mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)$, continua e limitata da $\bar{\Theta}$ a $B_0 + B_1 + B_2$, olomorfa da Θ a $B_0 + B_1 + B_2$.

Allora, per il Lemma 1, segue che g è continua e limitata da $\bar{\Theta}$ a $B_0 + B_1$, olomorfa da Θ a $B_0 + B_1$.

Così, $g \in \mathcal{H}(B_0, B_1)$ e

$$x = f(\theta, 0) = g(\theta).$$

Infine,

$$\|g\|_{\mathcal{H}(B_0, B_1)} = \max \left\{ \sup_t \|g(it)\|_{B_0}, \sup_t \|g(1+it)\|_{B_1} \right\} \leq \|f\|_{\mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)}.$$

D'altra parte, f è un elemento di $\mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)$ per cui $f(\theta, 0) = x$. Così

$$\begin{aligned} \|x\|_{[B_0, B_1]_0} &= \inf_{g(\theta)=x} \|g\|_{\mathcal{H}(B_0, B_1)} \leq \inf_{f(\theta, 0)=x} \|f\|_{\mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)} = \\ &= \|x\|_{[B_0, B_1, B_2]_{\theta, 0}}. \end{aligned}$$

La prova della (2) è analoga. Infatti, se $x \in [B_0, B_1, B_2]_{\theta, \rho}$, allora $x = f(0, \rho)$, con $f \in \mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)$. Definiamo:

$$h(w) = f(0, w), \quad 0 \leq \Re w \leq 1.$$

Vale $h(\rho) = f(0, \rho) = x$. Inoltre, come sopra, si prova che h appartiene a $\mathcal{H}(B_0, B_2)$, poichè

$$f(it, i\tau) \in B_0, \quad f(it, 1 + \tau) \in B_2, \quad \forall t, \tau \in \mathbf{R}.$$

Infine, dal fatto che $\|h\|_{\mathcal{H}(B_0, B_2)} \leq \|f\|_{\mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)}$ e che f è arbitrariamente scelto, segue

$$\|x\|_{[B_0, B_2, \rho]} = \inf_{h(\rho)=x} \|h\|_{\mathcal{H}(B_0, B_2)} \leq \inf_{h(0, \rho)=x} \|f\|_{\mathcal{H}(B_0, B_1, B_2)} = \|x\|_{[B_0, B_1, B_2]_{\theta, \rho}}.$$

TEOREMA 5. Sia $(\theta, \rho) \in \overline{\Omega}$, $\theta, \rho \in \mathbf{R}$. Allora

$$(1) \quad [A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho} = [A_0, A_2, A_1]_{\rho, \theta};$$

$$(2) \quad [A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho} = [A_1, A_0, A_2]_{1-\theta-\rho, \rho};$$

$$(3) \quad [A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho} = [A_2, A_1, A_0]_{\theta, 1-\theta-\rho}.$$

DIMOSTRAZIONE Proviamo la (1). Sia x un elemento di $[A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}$. Allora esiste $f \in \mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)$ tale che $f(\theta, \rho) = x$. Poniamo

$$g(z, w) = f(w, z), \quad (z, w) \in \overline{\Omega}.$$

In base alla definizione e alle proprietà di f, g risulta continua e limitata da $\overline{\Omega}$ a $A_0 + A_1 + A_2$, olomorfa da Ω a $A_0 + A_1 + A_2$.

Poi, dal momento che $f(it, i\tau) \in A_0$, $f(1 + it, i\tau) \in A_1$, $f(it, 1 + i\tau) \in A_2$, vale

$$g(it, i\tau) = f(i\tau, it) \in A_0, \quad g(1 + it, i\tau) = f(i\tau, 1 + it) \in A_2,$$

$$g(it, 1 + i\tau) = f(1 + i\tau, it) \in A_1.$$

Dunque, $g \in \mathcal{H}(A_0, A_2, A_1)$ e, per l'arbitrarietà della f ,

$$\begin{aligned} \|x\|_{[A_0, A_2, A_1]_{\rho, \theta}} &= \inf_{g(\rho, \theta)=x} \|g\|_{\mathcal{H}(A_0, A_2, A_1)} \leq \inf_{f(\theta, \rho)=x} \|f\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)} = \\ &= \|x\|_{[A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}}. \end{aligned}$$

Per simmetria, allora, $\|x\|_{[A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}} \leq \|x\|_{[A_0, A_2, A_1]_{\rho, \theta}}$.
Di qui, segue la (1).

(2). Sia $x \in [A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}$; dunque, esiste $f \in \mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)$ tale che $f(\theta, \rho) = x$. Poniamo:

$$g(z, w) = f(1 - z - w, w), \quad (z, w) \in \overline{\Omega}.$$

Si osservi che se $(z, w) \in \overline{\Omega}$ allora anche $(1 - z - w, w) \in \overline{\Omega}$.

Poi, $g(1 - \theta - \rho, \rho) = f(\theta, \rho) = x$. Inoltre, g è una funzione continua e limitata da $\overline{\Omega}$ a $A_0 + A_1 + A_2$, olomorfa da Ω a $A_0 + A_1 + A_2$. In più,

$$g(it, i\tau) = f(1 - it - i\tau, i\tau) = f(1 - i(t + \tau), i\tau) \in A_1;$$

$$g(1 + it, i\tau) = f(-i(t + \tau), i\tau) \in A_0;$$

$$g(it, 1 + i\tau) = f(1 - it - 1 - i\tau, 1 + i\tau) = f(-i(t + \tau), 1 + i\tau) \in A_2.$$

Pertanto, $g \in \mathcal{H}(A_1, A_0, A_2)$ e così,

$$\|x\|_{[A_1, A_0, A_2]_{1-\theta-\rho, \rho}} \leq \|x\|_{[A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}}.$$

Con un ragionamento analogo, supponendo $x \in [A_1, A_0, A_2]_{1-\theta-\rho, \rho}$, si prova che

$$\|x\|_{[A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}} \leq \|x\|_{[A_1, A_0, A_2]_{1-\theta-\rho, \rho}},$$

e la (2) risulta provata.

(3). Per la (1),

$$[A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho} = [A_0, A_2, A_1]_{\rho, \theta}.$$

Ma, per la (2), $[A_0, A_2, A_1]_{\rho, \theta} = [A_2, A_0, A_1]_{1-\theta-\rho, \theta}$.

Di qui, ancora in base alla (1),

$$[A_2, A_0, A_1]_{1-\theta-\rho, \theta} = [A_2, A_1, A_0]_{\theta, 1-\theta-\rho}.$$

PROPOSIZIONE 5. Sia $A_2 \hookrightarrow A_1 \hookrightarrow A_0$. Allora:

$$[A_0, A_1, A_2]_{0,1} = A_2.$$

DIMOSTRAZIONE. Si è visto (cfr. Proposizione 4 (2)) che

$$[A_0, A_1, A_2]_{0, \theta} \hookrightarrow [A_0, A_2]_{\theta}, \quad \forall \theta \in [0, 1].$$

In particolare, per $\theta=1$, $[A_0, A_1, A_2]_{0, 1} \hookrightarrow [A_0, A_2]_1$. Ma, per ipotesi, $A_2 \hookrightarrow A_0$ e quindi $[A_0, A_2]_1 = A_2$ (cfr. [7], p. 132).

D'altro canto, se $x \in A_2$, abbiamo già provato precedentemente che la funzione

$$(z, w) \rightarrow \psi(z, w) = x, \quad (z, w) \in \overline{\Omega},$$

è un elemento di $\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)$. Quindi,

$$\|x\|_{[A_0, A_1, A_2]_{0, 1}} \leq \|\psi\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)} \leq C \|x\|_{A_2}.$$

Perciò $[A_0, A_1, A_2]_{0, 1}$ e A_2 coincidono, con equivalenza delle norme.

Notiamo che, se $A_2 \hookrightarrow A_1 \hookrightarrow A_0$ normalmente¹⁾, allora si ha l'uguaglianza delle norme, perchè $\|\psi\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)} = \|x\|_{A_2}$.

PROPOSIZIONE 6. Sia $A_2 \hookrightarrow A_1 \hookrightarrow A_0$, con $\|x\|_{A_0} \leq \|x\|_{A_1} \leq \|x\|_{A_2}$ ($x \in A_2$). Allora:

$$x \in A_2 \Rightarrow \|x\|_{A_1} = \|x\|_{[A_0, A_1, A_2]_{1, 0}}.$$

DIMOSTRAZIONE. In base alla Proposizione 4 (1)

$$(i) \quad \forall x \in A_2, \quad \|x\|_{[A_0, A_1]_0} \leq \|x\|_{[A_0, A_1, A_2]_{0, 0}}.$$

Poichè $A_1 \hookrightarrow A_0$ risulta $\|x\|_{A_1} = \|x\|_{[A_0, A_1]_1}$ (cfr. [7], p. 132), e quindi, $\|x\|_{A_1} \leq \|x\|_{[A_0, A_1, A_2]_{1, 0}}$.

Supponiamo $x \neq 0$. Per $x=0$, l'affermazione è ovvia.

Poniamo:

$$\varphi(z, w) = \left(\frac{\|x\|_{A_1}}{\|x\|_{A_0}} \right)^{1-z} \left(\frac{\|x\|_{A_0}}{\|x\|_{A_2}} \right)^w x, \quad (z, w) \in \overline{\Omega}.$$

¹⁾ Ricordiamo che uno spazio di Banach E si dice immerso normalmente nello spazio di Banach F se $E \hookrightarrow F$, E è denso in F e $\|x\|_F \leq \|x\|_E$, $\forall x \in E$, (cfr. [7], p. 93).

φ è una applicazione continua e limitata da $\overline{\Omega}$ a $A_0 \cong A_0 + A_1 + A_2$, oморфа da Ω a A_0 . Inoltre,

$$\|\varphi(it, i\tau)\|_{A_0} = \|\varphi(1+it, i\tau)\|_{A_1} = \|\varphi(it, 1+i\tau)\|_{A_2} = \|x\|_{A_1}.$$

Quindi, $\varphi \in \mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)$ e $\varphi(1, 0) = x$. In più

$$(ii) \quad \|x\|_{[A_0, A_1, A_2]_{1,0}} \leq \|\varphi\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)} = \|x\|_{A_1}.$$

Pertanto, dalla (i) e dalla (ii) segue che $\forall x \in A_2$, $\|x\|_{[A_0, A_1, A_2]_{1,0}} = \|x\|_{A_1}$.

COROLLARIO. Sia $A_2 \hookrightarrow A_1 \hookrightarrow A_0$ normalmente. Allora:

$$[A_0, A_1, A_2]_{1,0} = A_1.$$

DIMOSTRAZIONE. Dalla proposizione 4 (1) segue che

$$[A_0, A_1, A_2]_{1,0} \hookrightarrow [A_0, A_1]_1 = A_1.$$

Quindi, vale senz'altro

$$A_2 \hookrightarrow [A_0, A_1, A_2]_{1,0} \hookrightarrow A_1.$$

D'altra parte, se $x \in A_1$, per la densità di A_2 in A_1 , esiste una successione di elementi x_n di A_2 tale che $\|x_n - x\|_{A_1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Ora, $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ è anche una successione di Cauchy in A_1 , per cui cioè, $\|x_m - x_n\|_{A_1} \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} 0$. Però, $\forall m, n \in \mathbf{N}$, $x_m - x_n \in A_2$ e, in base alla Proposizione 6, $\|x_m - x_n\|_{A_1} = \|x_m - x_n\|_{[A_0, A_1, A_2]_{1,0}}$.

Così, $\|x_m - x_n\|_{[A_0, A_1, A_2]_{1,0}} \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} 0$. Per la completezza dello spazio $[A_0, A_1, A_2]_{1,0}$, esiste $\bar{x} \in [A_0, A_1, A_2]_{1,0}$ tale che

$$\|x_n - \bar{x}\|_{[A_0, A_1, A_2]_{1,0}} \rightarrow 0.$$

Dunque, esistono $x \in A_1$, $\bar{x} \in [A_0, A_1, A_2]_{1,0}$ per cui

$$\|x_n - x\|_{A_1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \|x_n - \bar{x}\|_{[A_0, A_1, A_2]_{1,0}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Poichè $[A_0, A_1, A_2]_{1,0} \hookrightarrow A_1$, vale anche $\|x_n - \bar{x}\|_{A_1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Di qui, per la unicità del limite, $x = \bar{x}$.

Allora, tenendo presente la Proposizione 6,

$$\|x\|_{A_1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_{A_1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_{[A_0, A_1, A_2]_{1,0}} = \|x\|_{[A_0, A_1, A_2]_{1,0}}.$$

Ciò prova la coincidenza dei due spazi considerati.

PROPOSIZIONE 7. *Supponiamo $A_2 \hookrightarrow A_1 \hookrightarrow A_0$ e A_2 sia immerso normalmente in A_0 . Allora:*

$$x \in A_2 \Rightarrow \|x\|_{[A_0, A_1, A_2]_{0,0}} = \|x\|_{A_0}.$$

DIMOSTRAZIONE. L'affermazione è ovvia per $x=0$. Supponiamo $x \neq 0$.

Per la Proposizione 4 (2) è $[A_0, A_1, A_2]_{0,0} \hookrightarrow [A_0, A_2]_0$ e $[A_0, A_2]_0 = A_0$ perchè $A_2 \hookrightarrow A_0$ normalmente, (cfr. [7], p. 133).

Perciò vale:

$$[A_0, A_1, A_2]_{0,0} \hookrightarrow A_0, \text{ con } \|x\|_{A_0} \leq \|x\|_{[A_0, A_1, A_2]_{0,0}}.$$

Sempre supponendo $x \in A_2$, definiamo la seguente applicazione:

$$\varphi(z, w) = \left(\frac{\|x\|_{A_0}}{\|x\|_{A_1}} \right)^z \left(\frac{\|x\|_{A_0}}{\|x\|_{A_2}} \right)^w x, \quad (z, w) \in \overline{\Omega}.$$

Prima di tutto, $\varphi(0, 0) = x$. Poi, è facile riconoscere che φ è continua e limitata da $\overline{\Omega}$ a A_0 ($\cong A_0 + A_1 + A_2$), olomorfa da Ω a A_0 . Inoltre,

$$\|\varphi(it, i\tau)\|_{A_0} = \|\varphi(1+it, i\tau)\|_{A_1} = \|\varphi(it, 1+i\tau)\|_{A_2} = \|x\|_{A_0}.$$

Quindi, $\varphi \in \mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)$ e

$$\|x\|_{[A_0, A_1, A_2]_{0,0}} \leq \|\varphi\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)} = \|x\|_{A_0}.$$

Così,

$$x \in A_2 \Rightarrow \|x\|_{A_0} = \|x\|_{[A_0, A_1, A_2]_{0,0}}.$$

COROLLARIO. Se $A_2 \hookrightarrow A_1 \hookrightarrow A_0$ normalmente, allora

$$[A_0, A_1, A_2]_{0,0} = A_0.$$

DIMOSTRAZIONE. È identica a quella del Corollario alla Proposizione 6, in virtù della Proposizione 7.

OSSERVAZIONE. In base al Teorema 5, se $A_2 \hookrightarrow A_1 \hookrightarrow A_0$ normalmente, l'ordine dei termini nella Proposizione 5 e nei due Corollari precedenti è irrilevante; per esempio,

$$\begin{aligned} [A_2, A_1, A_0]_{0,0} &= [A_1, A_2, A_0]_{1,0} = \\ &= [A_1, A_0, A_2]_{0,1} = [A_0, A_1, A_2]_{0,1} = A_2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [A_2, A_1, A_0]_{1,0} &= [A_1, A_2, A_0]_{0,0} = \\ &= [A_1, A_0, A_2]_{0,0} = [A_0, A_1, A_2]_{1,0} = A_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [A_2, A_1, A_0]_{0,1} &= [A_2, A_0, A_1]_{1,0} = \\ &= [A_0, A_2, A_1]_{0,0} = [A_0, A_1, A_2]_{0,0} = A_0. \end{aligned}$$

LEMMA 2. Sia $f \in \mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)$, con

$$\|f(it, i\tau)\|_{A_0} \leq M_0, \quad \|f(1+it, i\tau)\|_{A_1} \leq M_1, \quad \|f(it, 1+i\tau)\|_{A_2} \leq M_2$$

$$\forall t, \tau \in \mathbf{R}.$$

Se $\theta \geq 0, \rho \geq 0, 0 \leq \theta + \rho \leq 1$, allora

$$f(\theta + it, \rho + i\tau) \in [A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}$$

e

$$\|f(\theta + it, \rho + i\tau)\|_{[A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}} \leq M_1^{1-\theta-\rho} M_1^\theta M_2^\rho.$$

(Nel caso di due spazi, cfr. [9], p. 123).

DIMOSTRAZIONE. Poniamo

$$g(z, w) = M_0^{z+w-1} M_1^{-z} M_2^{-w} f(z + it, w + i\tau), \quad (z, w) \in \overline{\Omega},$$

con t, τ elementi di $\mathbf{R}$, arbitrariamente scelti. Poichè $f \in \mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)$,

g è definita su $\overline{\Omega}$, continua e limitata da $\overline{\Omega}$ a $A_0 + A_1 + A_2$, olomorfa da Ω a $A_0 + A_1 + A_2$. Inoltre, sempre per le proprietà di f ,

$$g(it', i\tau') = M_0^{it'+i\tau'-1} M_1^{-it'} M_2^{-i\tau'} f(i(t+t'), i(\tau+\tau')) \in A_0$$

e

$$\|g(it', i\tau')\|_{A_0} = M_0^{-1} \|f(i(t+t'), i(\tau+\tau'))\|_{A_0} \leq M_0^{-1} \sup_{t, \tau} \|f(it, i\tau)\|_{A_0} \leq 1;$$

$$g(1+it', i\tau') = M_0^{it'+i\tau'} M_1^{-1-it'} M_2^{-i\tau'} f(1+i(t+t'), i(\tau+\tau')) \in A_1,$$

con

$$\begin{aligned} \|g(1+it', i\tau')\|_{A_1} &= M_1^{-1} \|f(1+i(t+t'), i(\tau+\tau'))\|_{A_1} \leq \\ &\leq M_1^{-1} \sup_{t, \tau} \|f(1+it, i\tau)\|_{A_1} \leq 1; \end{aligned}$$

$$g(it', 1+i\tau') = M_0^{it'+i\tau'} M_1^{-it'} M_2^{-1-i\tau'} f(i(t+t'), 1+i(\tau+\tau')) \in A_2,$$

con

$$\begin{aligned} \|g(it', 1+i\tau')\|_{A_2} &= M_2^{-1} \|f(i(t+t'), 1+i(\tau+\tau'))\|_{A_2} \leq \\ &\leq M_2^{-1} \sup_{t, \tau} \|f(it, 1+i\tau)\|_{A_2} \leq 1. \end{aligned}$$

Ne segue che $g \in \mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)$ e $\|g\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)} \leq 1$. Pertanto,

$$\|g(\theta, \rho)\|_{[A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}} = \inf_{h(\theta, \rho) = g(\theta, \rho)} \|h\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)} \leq 1.$$

Ma $g(\theta, \rho) = M_0^{\theta+\rho-1} M_1^{-\theta} M_2^{-\rho} f(\theta+it, \rho+i\tau)$. Dunque,

$$\|f(\theta+it, \rho+i\tau)\|_{[A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}} \leq M_0^{1-\theta-\rho} M_1^{\theta} M_2^{\rho}.$$

TEOREMA 6. Sia $\rho \geq 0$, $\sigma \geq 0$, $0 \leq \rho + \sigma \leq 1$. Se A_1 è immerso normalmente in A_0 e $0 \leq \theta \leq 1$, allora

$$[A_0, A_1, [A_0, A_1]_{\theta}]_{\rho, \sigma} = [A_0, A_1]_{\rho+\theta\sigma}.$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo $\rho = \sigma = 0$.

Per il Teorema 5 (1),

$$[A_0, A_1, [A_0, A_1]_0]_{0,0} = [A_0, [A_0, A_1]_0, A_1]_{0,0};$$

quindi, poichè $A_1 \hookrightarrow [A_0, A_1]_0 \hookrightarrow A_0$ normalmente, per il Corollario alla Proposizione 7, $[A_0, [A_0, A_1]_0, A_1]_{0,0} = A_0$.

D'altra parte, $[A_0, A_1]_0 = A_0$, essendo $A_1 \hookrightarrow A_0$ normalmente (cfr. [7], p. 133).

Ne segue che il risultato è provato per $\rho = \sigma = 0$, $\theta \in [0, 1]$.

Supponiamo, dunque, $0 < \rho + \sigma \leq 1$. Sia x un elemento dello spazio $[A_0, A_1]_{\rho+\theta\sigma}$. Allora, per definizione, esiste $f \in \mathcal{H}(A_0, A_1)$ tale che $f(\rho + \theta\sigma) = x$.

Poniamo:

$$g(z, w) = f(z + \theta w), \quad (z, w) \in \overline{\Omega}.$$

La funzione g è ben definita, poichè, se $0 \leq \Re z + \Re w \leq 1$, $\Re z, \Re w \geq 0$, allora $0 \leq \Re(z + \theta w) \leq 1$. Vale $g(\rho, \sigma) = f(\rho + \theta\sigma) = x$, e, per le proprietà della f , g è limitata e continua da $\overline{\Omega}$ a $A_0 + A_1$ (e quindi da $\overline{\Omega}$ a $A_0 + A_1 + [A_0, A_1]_0$), olomorfa da Ω a $A_0 + A_1$ (e anche da Ω a $A_0 + A_1 + [A_0, A_1]_0$).

Inoltre,

$$g(it, i\tau) = f(i(t + \theta\tau)) \in A_0,$$

$$\sup_{t, \tau} \|g(it, i\tau)\|_{A_0} \leq \sup_t \|f(it)\|_{A_0} \leq \|f\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1)};$$

$$g(1 + it, i\tau) = f(1 + i(t + \theta\tau)) \in A_1,$$

$$\sup_{t, \tau} \|g(1 + it, i\tau)\|_{A_1} \leq \sup_t \|f(1 + it)\|_{A_1} \leq \|f\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1)};$$

$$g(it, 1 + i\tau) = f(it + \theta(1 + i\tau)) = f(\theta + i(t + \tau)) \in [A_0, A_1]_0$$

e

$$\sup_{t, \tau} \|g(it, 1 + i\tau)\|_{[A_0, A_1]_0} \leq \|f\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1)}$$

(cfr. [9], p. 123).

Di qui,

$$g \in \mathcal{H}(A_0, A_1, [A_0, A_1]_\theta) \text{ e } \|g\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, [A_0, A_1]_\theta)} \leq \|f\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1)}.$$

Così, per l'arbitrarietà della f ,

$$\begin{aligned} \|x\|_{[A_0, A_1, [A_0, A_1]_\theta]_{\rho, \sigma}} &= \inf_{h(\rho, \sigma)=x} \|h\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, [A_0, A_1]_\theta)} \leq \\ &\leq \inf_{f(\rho+\theta\sigma)=x} \|f\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1)} = \|x\|_{[A_0, A_1]_{\rho+\theta\sigma}}. \end{aligned}$$

Sia ora $x \in [A_0, A_1, [A_0, A_1]_\theta]_{\rho, \sigma}$. Per definizione, $x = f(\rho, \sigma)$, con f un elemento di $\mathcal{H}(A_0, A_1, [A_0, A_1]_\theta)$. Poniamo:

$$g(z) = f\left(\frac{\rho z}{\rho + \sigma}, \frac{\sigma z}{\rho + \sigma}\right), \quad 0 \leq \Re z \leq 1.$$

Poichè $\frac{\rho z}{\rho + \sigma} + \frac{\sigma z}{\rho + \sigma} = z$, la definizione è ben posta. Si ha $g(\rho + \sigma) = f(\rho, \sigma) = x$. Inoltre,

$$g(it) = f\left(i \frac{t\rho}{\rho + \sigma}, i \frac{t\sigma}{\rho + \sigma}\right) \in A_0$$

e

$$\sup_t \|g(it)\|_{A_0} \leq \|f\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, [A_0, A_1]_\theta)};$$

per il Lemma 2 si ha poi

$$\begin{aligned} g(1+it) &= f\left(\frac{\rho}{\rho + \sigma} + i \frac{t\rho}{\rho + \sigma}, \frac{\sigma}{\rho + \sigma} + i \frac{t\sigma}{\rho + \sigma}\right) \in \\ &\in [A_0, A_1, [A_0, A_1]_\theta]_{\frac{\rho}{\rho + \sigma}, \frac{\sigma}{\rho + \sigma}}, \end{aligned}$$

$$\sup_t \|g(1+it)\|_{[A_0, A_1, [A_0, A_1]_\theta]_{\frac{\rho}{\rho + \sigma}, \frac{\sigma}{\rho + \sigma}}} \leq \|f\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, [A_0, A_1]_\theta)},$$

perchè $f \in \mathcal{H}(A_0, A_1, [A_0, A_1]_\theta)$.

Ma

$$[A_0, A_1, [A_0, A_1]_0]_{1-\eta, \eta} = [A_1, A_0, [A_0, A_1]_0]_{0, \eta} = \\ = [A_1, [A_0, A_1]_0, A_0]_{\eta, 0}.$$

Inoltre,

$$[A_1, [A_0, A_1]_0, A_0]_{\eta, 0} \hookrightarrow [A_1, [A_0, A_1]_0]_{\eta}.$$

Quindi, nel nostro caso,

$$g(1+it) \in [A_1, [A_0, A_1]_0]_{\frac{\sigma}{\rho+\sigma}}.$$

D'altra parte,

$$[A_1, [A_0, A_1]_0]_{\frac{\sigma}{\rho+\sigma}} = [[A_0, A_1]_1, [A_0, A_1]_0]_{\frac{\sigma}{\rho+\sigma}} = [A_0, A_1]_{\frac{\rho}{\rho+\sigma} + \theta \frac{\sigma}{\rho+\sigma}},$$

per la proprietà di reiterazione per gli spazi di interpolazione complessa, (cfr. [1], p. 121).

In definitiva, vale

$$(i) \quad g(it) \in A_0, \quad g(1+it) \in [A_0, A_1]_{\frac{\rho}{\rho+\sigma} + \theta \frac{\sigma}{\rho+\sigma}}.$$

Ne segue, sempre sulla base della definizione di g , che

$$g \in \mathcal{H}(A_0, [A_0, A_1]_{\frac{\rho+\theta\sigma}{\rho+\sigma}})$$

e dunque, che

$$g(\rho+\sigma) \in [A_0, [A_0, A_1]_{\frac{\rho+\theta\sigma}{\rho+\sigma}}]_{\rho+\sigma}.$$

Ma, ancora perchè $A_0 = [A_0, A_1]_0$, essendo A_1 immerso normalmente in A_0 , per la proprietà di reiterazione, si ha

$$[A_0, [A_0, A_1]_{\frac{\rho+\theta\sigma}{\rho+\sigma}}]_{\rho+\sigma} = [[A_0, A_1]_0, [A_0, A_1]_{\frac{\rho+\theta\sigma}{\rho+\sigma}}]_{\rho+\sigma} = [A_0, A_1]_{\rho+\theta\sigma}.$$

Dunque, $g(\rho + \sigma) = x \in [A_0, A_1]_{\rho + \theta\sigma}$ e, infine,

$$\|x\|_{[A_0, A_1]_{\rho + \theta\sigma}} \leq \|x\|_{[A_0, A_1, [A_0, A_1]_{\theta}]_{\rho, \sigma}}.$$

NOTA. Dal Teorema 6 segue, in particolare, che $A_1 \hookrightarrow A_0$ normalmente $\Rightarrow [A_0, A_1, A_1]_{\rho, \sigma} = [A_0, A_1]_{\rho + \sigma}$.

Basta infatti porre $\theta = 1$ e notare che $[A_0, A_1]_1 = A_1$ (cfr. [7], p. 133).

Tuttavia, risulta $[A_0, A_1, A_1]_{\rho, \sigma} = [A_0, A_1]_{\rho + \sigma}$ anche senza la assunzione che $A_1 \hookrightarrow A_0$. Ciò è intanto vero per $\rho = \sigma = 0$. Infatti per la Proposizione 4 risulta $[A_0, A_1, A_1]_{0,0} \hookrightarrow [A_0, A_1]_0$; d'altra parte, se $x \in [A_0, A_1]_0$, allora $x = f(0)$, con $f \in \mathcal{H}(A_0, A_1)$; definiamo $g(z, w) = f(z + w)$, $(z, w) \in \Omega$; risulta $g \in \mathcal{H}(A_0, A_1, A_1)$, perchè

$$g(1 + it, i\tau) = g(it, 1 + i\tau) = f(1 + i(t + \tau)) \in A_1;$$

inoltre, $g(0, 0) = f(0) = x$; dunque $[A_0, A_1, A_1]_{0,0} = [A_0, A_1]_0$.

Se è poi $\rho + \sigma > 0$ la immersione $[A_0, A_1]_{\rho + \sigma} \hookrightarrow [A_0, A_1, A_1]_{\rho, \sigma}$ si prova come la prima parte del Teorema 6; la immersione inversa segue dalla definizione di una $g \in \mathcal{H}(A_0, A_1)$ attraverso una $f \in \mathcal{H}(A_0, A_1, A_1)$, $f(\rho, \sigma) = x$, per mezzo di

$$g(z) = f\left(\frac{\rho}{\rho + \sigma}z, \frac{\sigma}{\rho + \sigma}z\right), \quad 0 \leq \Re z \leq 1.$$

COROLLARIO 1. Sia $0 \leq \theta \leq 1$. Allora, per ogni $\rho \in [0, 1]$ tale che $0 \leq \theta + \rho \leq 1$, vale

$$[A_0, A_0, A_1]_{\rho, \theta} = [A_0, A_1]_{\theta}.$$

DIMOSTRAZIONE. Si ha

$$[A_0, A_0, A_1]_{\rho, \theta} = [A_0, A_1, A_0]_{\theta, \rho} = [A_1, A_0, A_0]_{1-\theta-\rho, \rho}.$$

Per la Nota precedente, $[A_1, A_0, A_0]_{1-\theta-\rho, \rho} = [A_1, A_0]_{1-\theta}$, che, d'altra parte, coincide con $[A_0, A_1]_{\theta}$.

COROLLARIO 2. Sia A_1 immerso normalmente in A_0 . Se $0 \leq s, t \leq 1$, $0 \leq s + t \leq 1$, $0 \leq \sigma, \theta \leq 1$, allora

$$(i) \quad [A_0, [A_0, A_1]_\sigma, [A_0, A_1]_\theta]_{s,t} = [A_0, A_1]_{s\sigma + t\theta}.$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo i tre casi possibili:

1° caso: $\sigma = \theta$. Allora, per il Teorema 6,

$$[A_0, [A_0, A_1]_\theta, [A_0, A_1]_\theta]_{s,t} = [A_0, [A_0, A_1]_\theta]_{s+t}.$$

D'altra parte, per la proprietà di reiterazione,

$$[A_0, [A_0, A_1]_\theta]_{s+t} = [[A_0, A_1]_\theta, [A_0, A_1]_\theta]_{s+t} = [A_0, A_1]_{s\theta + t\theta},$$

e quindi la (i) è vera.

2° caso: $\sigma < \theta$. Allora, sempre per la proprietà di reiterazione,

$$[A_0, A_1]_\sigma = [A_0, [A_0, A_1]_\theta]_{\frac{\sigma}{\theta}}.$$

Perciò,

$$\begin{aligned} & [A_0, [A_0, [A_0, A_1]_\theta]_{\frac{\sigma}{\theta}}, [A_0, A_1]_\theta]_{s,t} = \\ & = [A_0, [A_0, A_1]_\theta, [A_0, [A_0, A_1]_\theta]_{\frac{\sigma}{\theta}}]_{t,s} = [A_0, [A_0, A_1]_\theta]_{t + \frac{\sigma}{\theta}s}, \end{aligned}$$

in base al Teorema 6.

Allora, di nuovo utilizzando la proprietà di reiterazione,

$$[A_0, [A_0, A_1]_\theta]_{t + \frac{\sigma}{\theta}s} = [A_0, A_1]_{s\sigma + t\theta}.$$

3° caso: $\sigma < \theta$. Allora $[A_0, A_1]_\theta = [A_0, [A_0, A_1]_\sigma]_{\frac{\theta}{\sigma}}$, e così:

$$\begin{aligned} & [A_0, [A_0, A_1]_\sigma, [A_0, [A_0, A_1]_\sigma]_{\frac{\theta}{\sigma}}]_{s,t} = \\ & = [A_0, [A_0, A_1]_\sigma]_{s + \frac{\theta}{\sigma}t} = [A_0, A_1]_{s\sigma + t\theta}, \end{aligned}$$

e si ottiene ancora la formula (i).

TEOREMA S. Sia A_1 , oppure A_2 , immerso normalmente in A_0 . Allora:

$$[A_0, A_1, A_2]_{1-\theta, \theta} = [A_1, A_2]_\theta, \quad \forall \theta \in [0, 1].$$

DIMOSTRAZIONE. In generale, vale (cfr. Teorema 5 (2)),

$$[A_0, A_1, A_2]_{1-\theta, \theta} = [A_1, A_0, A_2]_{0, \theta}.$$

Quindi, per la Proposizione 4 (2),

$$(i) \quad [A_0, A_1, A_2]_{1-\theta, \theta} \hookrightarrow [A_1, A_2]_{\theta}.$$

Supponiamo $A_1 \hookrightarrow A_0$ normalmente. Per il Corollario 1 al Teorema 6,

$$[A_1, A_2]_{\theta} = [A_1, A_1, A_2]_{\sigma, \theta}, \quad \forall \theta, \sigma \geq 0, 0 \leq \theta + \sigma \leq 1.$$

In particolare, ciò vale per $\sigma = 0$. Così:

$$(ii) \quad [A_1, A_2]_{\theta} = [A_1, A_1, A_2]_{0, \theta}.$$

Ora, per la definizione dello spazio $[X_0, X_1, X_2]_{\alpha, \beta}$, si ha

$$(iii) \quad [A_1, A_1, A_2]_{0, \theta} \hookrightarrow [A_1, A_0, A_2]_{0, \theta} = [A_0, A_1, A_2]_{1-\theta, \theta}.$$

Dalle (i)-(ii)-(iii) segue che

$$A_1 \hookrightarrow A_0 \Rightarrow [A_0, A_1, A_2]_{1-\theta, \theta} = [A_1, A_2]_{\theta}.$$

Supponiamo ora che sia $A_2 \hookrightarrow A_0$ normalmente. Per la Nota al Teorema 6, si ha

$$(iv) \quad [A_1, A_2]_{\theta} = [A_1, A_2, A_2]_{\theta, 0} = [A_1, A_2, A_2]_{0, \theta} = [A_2, A_1, A_2]_{1-\theta, \theta}.$$

D'altra parte, per la (i), $[A_0, A_1, A_2]_{1-\theta, \theta} \hookrightarrow [A_1, A_2]_{\theta}$.

Dunque, poichè $A_2 \hookrightarrow A_0$,

$$(v) \quad [A_2, A_1, A_2]_{1-\theta, \theta} \hookrightarrow [A_0, A_1, A_2]_{1-\theta, \theta},$$

si ha:

Se $A_2 \hookrightarrow A_0$ normalmente, allora $[A_0, A_1, A_2]_{1-\theta, \theta} = [A_1, A_2]_{\theta}$.
Ciò completa la prova.

COROLLARIO 1. Sia $A_2 \hookrightarrow A_1$ normalmente, con A_0 arbitrario. Allora:

$$[A_0, A_1, A_2]_{0,0} = [A_0, A_2]_0.$$

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema 5 (2) si ha

$$[A_0, A_1, A_2]_{0,0} = [A_1, A_0, A_2]_{1-0,0}.$$

Quindi, per il Teorema 7, poichè $A_2 \hookrightarrow A_1$, vale

$$[A_1, A_0, A_2]_{1-0,0} = [A_0, A_2]_0.$$

Di qui segue l'asserto.

COROLLARIO 2. Sia $A'_1 \hookrightarrow A'_2$ oppure $A'_0 \hookrightarrow A'_2$, con immersione normale. Se A_0 e A_1 sono riflessivi, allora

$$[A'_0, A'_1, A'_2]'_{0,0} = [A_0, A_1]_0.$$

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema 5,

$$\begin{aligned} [A'_0, A'_1, A'_2]_{0,0} &= [A'_1, A'_0, A'_2]_{1-0,0} = \\ &= [A'_1, A'_2, A'_0]_{0,1-0} = [A'_2, A'_1, A'_0]_{0,1-0}. \end{aligned}$$

Allora, per il Teorema 7,

$$[A'_0, A'_1, A'_2]_{0,0} = [A'_1, A'_0]_{1-0} = [A'_0, A'_1]_0.$$

D'altra parte, per la riflessività di A_0 e di A_1 , (cfr. [10], p. 2), $[A_0, A_1]'_0 = [A'_0, A'_1]_0$ e $[A_0, A_1]_0$ è riflessivo. Quindi,

$$[A'_0, A'_1]_0 = [A_0, A_1]'_0 = [A'_0, A'_1, A'_2]_{0,0}.$$

Passando ai duali, infine, $[A_0, A_1]_0 = [A'_0, A'_1, A'_2]'_{0,0}$.

TEOREMA 8. Sia $A_2 \hookrightarrow A_1 \hookrightarrow A_0$ e le immersioni siano normali. Allora, se $0 \leq \theta + \rho \leq 1$, $0 \leq \theta' + \rho' \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \theta'$, $0 \leq \rho \leq \rho'$,

$$[A_2, A_1, A_0]_{\theta, \rho} \hookrightarrow [A_2, A_1, A_0]_{\theta', \rho'}.$$

DIMOSTRAZIONE. Se $\theta' = \rho' = 0$, allora $\theta = \rho = 0$ e la immersione da provare è ovvia, essendoci uguaglianza degli spazi.

Supponiamo $\theta' \neq 0$, $\rho = \rho' = 0$. Si ha, per il Teorema 5 e il Teorema 7,

$$\begin{aligned} [A_2, A_1, A_0]_{\theta, 0} &= [A_1, A_2, A_0]_{1-\theta, 0} = [A_1, A_0, A_2]_{0, 1-\theta} = \\ &= [A_0, A_1, A_2]_{0, 1-\theta} = [A_1, A_2]_{1-\theta} = [A_2, A_1]_{\theta}. \end{aligned}$$

Analogamente, $[A_2, A_1, A_0]_{\theta', 0} = [A_2, A_1]_{\theta'}$.

Ma $[A_2, A_1]_{\theta} \hookrightarrow [A_2, A_1]_{\theta'}$, se $0 \leq \theta \leq \theta' \leq 1$ (cfr. [1], p. 160).

Dunque l'affermazione è vera per $\theta' \neq 0$ e $\rho = \rho' = 0$.

Sia $\rho' \neq 0$, $\theta = \theta' = 0$. Dal Teorema 5 e dal Corollario 1 al Teorema 7 segue che

$$\begin{aligned} [A_2, A_1, A_0]_{0, \rho} &= [A_1, A_2, A_0]_{1-\rho, \rho} = \\ &= [A_1, A_0, A_2]_{\rho, 1-\rho} = [A_0, A_1, A_2]_{0, 1-\rho} = \\ &= [A_0, A_2]_{1-\rho}; \quad [A_2, A_1, A_0]_{0, \rho'} = [A_0, A_2]_{1-\rho'}. \end{aligned}$$

Poichè $[A_0, A_2]_{1-\rho} = [A_2, A_0]_{\rho} \hookrightarrow [A_2, A_0]_{\rho'} = [A_0, A_1]_{1-\rho'}$, l'affermazione è provata nel caso di $\rho' \neq 0$ e $\theta = \theta' = 0$.

Supponiamo, dunque, $\theta' > 0$, $\rho' > 0$.

Se $\theta = \rho = 0$, allora, poichè

$$\begin{aligned} [A_2, A_1, A_0]_{0, 0} &= [A_1, A_2, A_0]_{1, 0} = \\ &= [A_1, A_0, A_2]_{0, 1} = [A_0, A_1, A_2]_{0, 1} = A_2 \end{aligned}$$

(cfr. Proposizione 5), si ha $[A_2, A_1, A_0]_{0, 0} \hookrightarrow [A_2, A_1, A_0]_{\theta', \rho'}$.

Se $\theta \neq 0$, $\rho = 0$, allora $[A_2, A_1, A_0]_{\theta, 0} = [A_0, A_1, A_2]_{\theta, 1-\theta}$, che coincide con $[A_1, A_2]_{1-\theta} = [A_2, A_1]_{\theta}$, per il Teorema 7.

Ora, per il Teorema 6,

$$[A_2, A_1]_{\theta' + \rho'} = [A_2, A_1, A_1]_{\theta', \rho'} \hookrightarrow [A_2, A_1, A_0]_{\theta', \rho'}.$$

Poichè $\theta' + \rho' \geq \theta$, si ha (cfr. [1], p. 160),

$$[A_2, A_1]_{\theta} = [A_2, A_1, A_0]_{\theta, 0} \hookrightarrow [A_2, A_1]_{\theta' + \rho'}.$$

Se

$$\begin{aligned} \theta=0, \rho \neq 0, [A_2, A_1, A_0]_{0,\rho} &= [A_1, A_2, A_0]_{1-\rho,\rho} = \\ &= [A_1, A_0, A_2]_{\rho,1-\rho} = [A_0, A_1, A_2]_{0,1-\rho} = [A_0, A_2]_{1-\rho} = [A_2, A_0]_{\rho} \end{aligned}$$

(cfr. Corollario 1 al Teorema 7).

Per il Teorema 6,

$$\begin{aligned} [A_2, A_0]_{\rho'} &= [A_0, A_2]_{1-\rho'} = [A_0, A_2, A_2]_{1-\rho'-\theta',\theta'} = \\ &= [A_2, A_0, A_2]_{\rho',\theta'} = [A_2, A_2, A_0]_{\theta',\rho'} \hookrightarrow [A_2, A_1, A_0]_{\theta',\rho'}. \end{aligned}$$

Poichè $\rho \leq \rho'$, $[A_2, A_0]_{\rho} \hookrightarrow [A_2, A_0]_{\rho'}$; si ha dunque,

$$[A_2, A_1, A_0]_{\theta,\rho} = [A_2, A_0]_{\rho} \hookrightarrow [A_2, A_0]_{\rho'} \hookrightarrow [A_2, A_1, A_0]_{\theta',\rho'}.$$

Possiamo ora supporre $\theta, \rho \neq 0$. Sia x un elemento di $[A_2, A_1, A_0]_{\theta,\rho}$. Allora esiste $f \in \mathcal{H}(A_2, A_1, A_0)$ tale che $f(\theta, \rho) = x$. Poniamo

$$g(z, w) = f\left(z \frac{\theta}{\theta'}, w \frac{\rho}{\rho'}\right), (z, w) \in \bar{\Omega}.$$

Poichè $\theta \leq \theta', \rho \leq \rho'$, la definizione di g ha senso. Inoltre, poichè $f \in \mathcal{H}(A_2, A_1, A_0)$, g è continua e limitata da $\bar{\Omega}$ a $A_0 + A_1 + A_2$, olo-morfa da Ω a $A_0 + A_1 + A_2$. In più,

$$g(it, i\tau) = f\left(i \frac{t\theta}{\theta'}, i \frac{\tau\rho}{\rho'}\right) \in A_2, \sup_{t,\tau} \|g(it, i\tau)\|_{A_2} \leq \|f\|_{\mathcal{H}(A_2, A_1, A_0)};$$

$$g(1+it, i\tau) = f\left(\frac{\theta'}{\theta} + i \frac{t\theta}{\theta'}, i \frac{\tau\rho}{\rho'}\right) \in [A_2, A_1, A_0]_{\frac{\theta'}{\theta},0} \hookrightarrow$$

(cfr. Lemma 2) $\hookrightarrow [A_2, A_1]_{\frac{\theta'}{\theta}}$ (per la Proposizione 4 (1)) $\hookrightarrow A_1$, con

$$\sup_{t,\tau} \|g(1+it, i\tau)\|_{A_1} \leq \|f\|_{\mathcal{H}(A_2, A_1, A_0)}.$$

Analogamente, per la Proposizione 4 (2) e il Lemma 2,

$$g(it, 1+i\tau) = f\left(i \frac{\theta}{\theta'}, \frac{\rho}{\rho'} + i \frac{\tau\rho}{\rho'}\right) \in [A_2, A_1, A_0]_{0, \frac{\rho}{\rho'}} \hookrightarrow [A_2, A_0]_{\frac{\rho}{\rho'}} \hookrightarrow A_0,$$

$$\sup \|g(it, 1+i\tau)\|_{A_0} \leq \|f\|_{\mathcal{H}(A_2, A_1, A_0)}.$$

Di qui, $g \in \mathcal{H}(A_2, A_1, A_0)$ e, d'altra parte, $g(\theta', \rho') = f(\theta, \rho) = x$.

Poichè vale $\|g\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)} \leq \|f\|_{\mathcal{H}(A_2, A_1, A_0)}$,

$$\|x\|_{[A_2, A_1, A_0]_{\theta', \rho'}} \leq \|x\|_{[A_2, A_1, A_0]_{\theta, \rho}}.$$

COROLLARIO. Sia $A_2 \hookrightarrow A_1 \hookrightarrow A_0$ normalmente. Se $0 \leq \theta + \rho \leq 1$, $0 \leq \theta' + \rho' \leq 1$, $\theta \leq \theta'$, $\rho \leq \rho'$, allora

$$[A_0, A_1, A_2]_{\theta, 1-\theta-\rho} \hookrightarrow [A_0, A_1, A_2]_{\theta', 1-\theta'-\rho'}.$$

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema 8,

$$[A_2, A_1, A_0]_{\theta, \rho} \hookrightarrow [A_2, A_1, A_0]_{\theta', \rho'}.$$

Ma si ha:

$$\begin{aligned} [A_2, A_1, A_0]_{\theta, \rho} &= [A_1, A_2, A_0]_{1-\theta-\rho, \rho} = \\ &= [A_1, A_0, A_2]_{\rho, 1-\theta-\rho} = [A_0, A_1, A_2]_{\theta, 1-\theta-\rho} \end{aligned}$$

e analogamente,

$$[A_2, A_1, A_0]_{\theta', \rho'} = [A_0, A_1, A_2]_{\theta', 1-\theta'-\rho'}.$$

Di qui,

$$[A_0, A_1, A_2]_{\theta, 1-\theta-\rho} \hookrightarrow [A_0, A_1, A_2]_{\theta', 1-\theta'-\rho'}.$$

TEOREMA 9. Esista una successione P_n di operatori lineari continui da A_i a $A_0 \cap A_1 \cap A_2$ ($i=0, 1, 2$), tale che

$$(i) \quad \|P_n x_i - x_i\|_{A_i} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \forall x_i \in A_i, \quad (i=0, 1, 2).$$

Allora $A_0 \cap A_1 \cap A_2$ è denso in $[A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}$, $(\theta, \rho) \in \bar{\Omega}$, $\theta, \rho \in \mathbf{R}$.

DIMOSTRAZIONE. Notiamo che, per il teorema della limitatezza uniforme, dalla (i) segue $\|P_n\|_{A_i \rightarrow A_i} \leq C_i$, indipendentemente da n . Inoltre, P_n si estende univocamente come un operatore lineare continuo da $A_0 + A_1 + A_2$ in sè.

Infatti, se $a \in A_0 + A_1 + A_2$, onde $a = a_0 + a_1 + a_2$, con $a_i \in A_i$, la definizione di P_n attraverso

$$(ii) \quad P_n(a) = P_n(a_0) + P_n(a_1) + P_n(a_2)$$

realizza tale prolungamento.

Osserviamo che la (ii) non dipende dalla scelta degli $a_i \in A_i$, $a = a_0 + a_1 + a_2$. Proviamo tale affermazione nel modo seguente.

Sia $c = c_1 + c_2 = d_1 + d_2$, $c_i, d_i \in A_i$ ($i = 1, 2$). Si ha $c_1 - d_1 = d_2 - c_2$ e quindi, per la linearità di P_n su A_1 e A_2 , $P_n(c_1 - d_1) = P_n(c_1) - P_n(d_1)$, $P_n(d_2 - c_2) = P_n(d_2) - P_n(c_2)$; pertanto, poichè $P_n(c_1 - d_1) = P_n(d_2 - c_2)$,

$$P_n(c_1) + P_n(c_2) = P_n(d_1) + P_n(d_2).$$

Se $a = a_0 + a_1 + a_2 = b_0 + b_1 + b_2$, $a_i, b_i \in A_i$, allora $a_0 - b_0 = (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) \in A_1 + A_2$. Per quello che si è provato sopra,

$$\begin{aligned} P_n((b_1 - a_1) + (b_2 - a_2)) &= P_n(b_1 - a_1) + P_n(b_2 - a_2) = \\ &= P_n(b_1) - P_n(a_1) + P_n(b_2) - P_n(a_2). \end{aligned}$$

D'altra parte, $a_0 - b_0 \in A_0$ e quindi $P_n(a_0 - b_0) = P_n(a_0) - P_n(b_0)$. Dunque,

$$P_n(a_0 - b_0) = P_n(a_0) - P_n(b_0) = P_n(b_1) - P_n(a_1) + P_n(b_2) - P_n(a_2).$$

E allora,

$$P_n(a_0) + P_n(a_1) + P_n(a_2) = P_n(b_0) + P_n(b_1) + P_n(b_2).$$

Vale $P_n(a) \in A_0 \cap A_1 \cap A_2 \Leftrightarrow A_0 + A_1 + A_2$; per la definizione dello spazio normato $A_0 + A_1 + A_2$, si ha

$$\begin{aligned} \|P_n(a)\|_{A_0 + A_1 + A_2} &\leq \|P_n(a_0)\|_{A_0} + \|P_n(a_1)\|_{A_1} + \|P_n(a_2)\|_{A_2} \leq \\ &\leq C(\|a_0\|_{A_0} + \|a_1\|_{A_1} + \|a_2\|_{A_2}). \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà degli a_i ,

$$\|P_n(a)\|_{A_0+A_1+A_2} \leq C \|a\|_{A_0+A_1+A_2}, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad a \in A_0+A_1+A_2.$$

Sia $f \in \mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)$ tale che $f(\theta, \rho) = x$. Possiamo supporre che

$$\begin{aligned} \lim_{|t|+|\tau| \rightarrow \infty} \|f(it, i\tau)\|_{A_0} &= \lim_{|t|+|\tau| \rightarrow \infty} \|f(1+it, i\tau)\|_{A_1} = \\ &= \lim_{|t|+|\tau| \rightarrow \infty} \|f(it, 1+i\tau)\|_{A_2} = 0. \end{aligned}$$

In caso contrario, la g definita da $g(z, w) = e^{(z-\theta)^2 + (w-\rho)^2} f(z, w)$ appartiene a $\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)$ e gode della proprietà suddetta.

Definiamo

$$\nu_n(z, w) = P_n(f(z, w)) - f(z, w), \quad (z, w) \in \overline{\Omega}.$$

Poichè $P_n \in L(A_0+A_1+A_2, A_0+A_1+A_2)$ e f è continua e limitata da $\overline{\Omega}$ a $A_0+A_1+A_2$, olomorfa da Ω a $A_0+A_1+A_2$, ν_n risulta continua e limitata da $\overline{\Omega}$ a $A_0+A_1+A_2$, olomorfa da Ω a $A_0+A_1+A_2$.

Inoltre, poichè $f(it, i\tau) \in A_0$, $f(1+it, i\tau) \in A_1$, $f(it, 1+i\tau) \in A_2$ e $P_n(A_i) \subset A_0 \cap A_1 \cap A_2$ si ha, per ogni $t, \tau \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad \|\nu_n(it, i\tau)\|_{A_0} &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \|\nu_n(1+it, i\tau)\|_{A_1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \\ \|\nu_n(it, 1+i\tau)\|_{A_2} &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

D'altra parte, $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon$ (indipendente da n) tale che

$$\begin{aligned} |t| + |\tau| > N_\varepsilon &\Rightarrow \|P_n(f(it, i\tau)) - f(it, i\tau)\|_{A_0} \leq \\ &\leq (C+1) \|f(it, i\tau)\|_{A_0} \leq (C+1) \frac{\varepsilon}{2(C+1)} = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Ma $\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) > 0$ tale che

$$\sup_{|t|+|\tau| \leq N_\varepsilon} \|P_n(f(it, i\tau)) - f(it, i\tau)\|_{A_0} < \varepsilon/2,$$

purchè sia $n > n(\varepsilon)$. Ne segue che

$$\begin{aligned} \sup_{t, \tau} \|\nu_n(it, i\tau)\|_{A_0} &\leq \sup_{|t|+|\tau| \leq N_\varepsilon} \|\nu_n(it, i\tau)\|_{A_0} + \\ &+ \sup_{|t|+|\tau| > N_\varepsilon} \|\nu_n(it, i\tau)\|_{A_0} \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

purchè sia $n > n(\varepsilon)$. Pertanto, $\sup_{t, \tau} \|v_n(it, i\tau)\|_{A_0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Analogamente,

$$\sup_{t, \tau} \|v_n(1+it, i\tau)\|_{A_1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \sup_{t, \tau} \|v_n(it, 1+i\tau)\|_{A_2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Così, $v_n \in \mathcal{H}(A_0, A_1, A_2) \quad \forall n$, e, poichè

$$\begin{aligned} \|v_n\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)} &= \\ &= \max \left\{ \sup_{t, \tau} \|v_n(it, i\tau)\|_{A_0}, \sup_{t, \tau} \|v_n(1+it, i\tau)\|_{A_1}, \right. \\ &\quad \left. \sup_{t, \tau} \|v_n(it, 1+i\tau)\|_{A_2} \right\}, \quad \|v_n\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

D'altro canto,

$$\begin{aligned} \|P_n f(\theta, \rho) - f(\theta, \rho)\|_{[A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}} &= \|P_n x - x\|_{[A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}} \leq \\ &\leq \|v_n\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)}, \end{aligned}$$

e quindi $\|P_n x - x\|_{[A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Ma $P_n x \in A_0 \cap A_1 \cap A_2$.

Ne segue che $A_0 \cap A_1 \cap A_2$ è denso in $[A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}$.

OSSERVAZIONE. Dalle ipotesi segue già la densità di $A_0 \cap A_1 \cap A_2$ in A_i $i=0, 1, 2$).

TEOREMA 10. Se $A_0 \cap A_1 \cap A_2$ è denso in $[A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}$, allora

$$[A'_0, A'_1, A'_2]_{\theta, \rho} \hookrightarrow [A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}.$$

DIMOSTRAZIONE. La prova segue le linee di [1]. Poichè A'_0, A'_1, A'_2 sono immersi con continuità in $(A_0 \cap A_1 \cap A_2)' \cong A'_0 + A'_1 + A'_2$, viene definito sulla somma diretta $(A_0 \cap A_1 \cap A_2) \oplus (A'_0 + A'_1 + A'_2)$ un funzionale bilineare $\langle x, x' \rangle$ nel modo seguente: se $x \in A_0 \cap A_1 \cap A_2$ e $x' \in A'_0 + A'_1 + A'_2$, allora $\langle x, x' \rangle$ è il valore del funzionale lineare continuo x' nel punto x .

D'altra parte, se $x' \in A'_0$ o ad A'_1 o ad A'_2 ,

$$|\langle x, x' \rangle| \leq \|x\|_{A_i} \|x'\|_{A'_i}, \quad (i=0, 1, 2).$$

Quindi, per il Teorema 3,

$$|\langle x, x' \rangle| \leq \|x\|_{[A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}} \|x'\|_{[A'_0, A'_1, A'_2]_{\theta, \rho}}.$$

Dunque, a ogni $x' \in [A'_0, A'_1, A'_2]_{\theta, \rho}$ è associato un funzionale lineare su $A_0 \cap A_1 \cap A_2$, continuo rispetto alla norma di $[A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}$.

D'altro canto, poichè per ipotesi $A_0 \cap A_1 \cap A_2$ è denso in $[A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}$, tale funzionale lineare può essere esteso in modo unico su $[A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}$, con norma $\leq \|x'\|_{[A'_0, A'_1, A'_2]_{\theta, \rho}}$.

Così,

$$\forall x' \in [A'_0, A'_1, A'_2]_{\theta, \rho}, \quad \|x'\|_{[A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}'} \leq \|x'\|_{[A'_0, A'_1, A'_2]_{\theta, \rho}},$$

e quindi,

$$[A'_0, A'_1, A'_2]_{\theta, \rho} \hookrightarrow [A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}'.$$

OSSERVAZIONE. La immersione stabilita nel Teorema 10 vale, per esempio, se è soddisfatta la condizione del Teorema 9.

TEOREMA 11. (Cfr. [9], p. 123). *Siano A_i, B_i ($i=0, 1, 2$) spazi di Banach, con $A_i \hookrightarrow \mathcal{A}$, $B_i \hookrightarrow \mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ spazi vettoriali topologici.*

$L(A, B)$ denoti, come solito, lo spazio di Banach degli operatori lineari continui da A a B , munito della norma d'operatore. Allora

$$\begin{aligned} & [L(A_0, B_0), L(A_1, B_1), L(A_2, B_2)]_{\theta, \rho} \hookrightarrow \\ & \hookrightarrow L([A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}, [B_0, B_1, B_2]_{\theta, \rho}). \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $T \in [L(A_0, B_0), L(A_1, B_1), L(A_2, B_2)]_{\theta, \rho}$.

Allora esiste $\varphi \in \mathcal{H}(L(A_0, B_0), L(A_1, B_1), L(A_2, B_2))$ tale che $\varphi(\theta, \rho) = T$.

Ora, è chiaro che lo spazio $L(A_0, B_0) + L(A_1, B_1) + L(A_2, B_2)$ è immerso in $L(A_0 + A_1 + A_2, B_0 + B_1 + B_2)$ e pertanto, φ risulta continua e limitata da $\overline{\Omega}$ a $L(A_0 + A_1 + A_2, B_0 + B_1 + B_2)$, olomorfa da Ω a $L(A_0 + A_1 + A_2, B_0 + B_1 + B_2)$.

D'altra parte, per definizione,

$$\varphi(it, i\tau) \in L(A_0, B_0), \quad \varphi(1+it, i\tau) \in L(A_1, B_1), \quad \varphi(it, 1+i\tau) \in L(A_2, B_2),$$

con norme uniformemente limitate in tali spazi.

Quindi, in base al Teorema 2,

$$\varphi(\theta + it, \rho + i\tau) \in L([A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}, [B_0, B_1, B_2]_{\theta, \rho}), \quad \forall t, \tau \in \mathbf{R}.$$

In particolare,

$$\varphi(\theta, \rho) \in L([A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho}, [B_0, B_1, B_2]_{\theta, \rho}).$$

Ma $\varphi(\theta, \rho) = T$. L'immersione stabilita è poi continua, sempre per il Teorema 2.

TEOREMA 12. (cfr. [9], p. 123). Sia $H(z, w) \in L(A_0 + A_1 + A_2, A_0 + A_1 + A_2)$, $(z, w) \in \overline{\Omega}$, una funzione continua e limitata in $\overline{\Omega}$, ologomorfa in Ω .

Se

$$H(it, i\tau) \in L(A_j, A_j), \sup_{t, \tau} \|H(it, i\tau)\|_{A_j \rightarrow A_j} \leq M_j \quad (j=0, 1, 2),$$

$$H(1+it, i\tau) \in L(A_0, A_1), \sup_{t, \tau} \|H(1+it, i\tau)\|_{A_0 \rightarrow A_1} \leq M_3,$$

$$H(it, 1+i\tau) \in L(A_0, A_2), \sup_{t, \tau} \|H(it, 1+i\tau)\|_{A_0 \rightarrow A_2} \leq M_4,$$

e $0 \leq \theta + \rho + \theta_0 + \rho_0 \leq 1$, $\theta, \theta_0, \rho, \rho_0 \geq 0$, allora

$$H(\theta, \rho) \in L([A_0, A_1, A_2]_{\theta_0, \rho_0}, [A_0, A_1, A_2]_{\theta_0 + \theta, \rho_0 + \rho})$$

con

$$\|H(\theta, \rho)\|_{[A_0, A_1, A_2]_{\theta_0, \rho_0} \rightarrow [A_0, A_1, A_2]_{\theta_0 + \theta, \rho_0 + \rho}} \leq M_0^{1-\theta-\rho-\theta_0-\rho_0} M_1^{\theta_0} M_2^{\rho_0} M_3^{\theta} M_4^{\rho}.$$

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che per ogni $\tau \in \mathbf{R}$ fissato, la funzione $z \rightarrow H(z, i\tau)$ è un elemento di $\mathcal{H}(L(A_1, A_1), L(A_0, A_1))$ e così, (cfr. [9], p. 123), $H(u+it, i\tau) \in L([A_1, A_0]_u, A_1)$, $u \in [0, 1]$ e

$$(i) \quad \|H(u+it, i\tau)\|_{[A_1, A_0]_u \rightarrow A_1} \leq M_1^{1-u} M_3^u.$$

Analogamente, $w \rightarrow H(it, w)$, $t \in \mathbf{R}$, fissato, è un elemento di $\mathcal{H}(L(A_2, A_2), L(A_0, A_2))$ e pertanto,

$$\forall v \in [0, 1], H(it, v+i\tau) \in L([A_2, A_0]_v, A_2)$$

e

$$(ii) \quad \| H(it, v + i\tau) \|_{[A_2, A_0]_v \rightarrow A_2} \leq M_2^{1-\nu} M_4^\nu.$$

Sia ora x un elemento di $[A_0, A_1, A_2]_{\theta_0, \rho_0}$. Ciò implica che $\forall \varepsilon > 0$ esiste $f \in \mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)$ tale che $f(\theta_0, \rho_0) = x$ e

$$\| f \|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)} \leq \| x \|_{[A_0, A_1, A_2]_{\theta_0, \rho_0}} + \varepsilon.$$

Poniamo:

$$h(z, w) = H \left(\frac{\theta z}{\theta_0 + \theta}, \frac{\rho w}{\rho_0 + \rho} \right) f \left(\frac{\theta_0 z}{\theta_0 + \theta}, \frac{\rho_0 w}{\rho_0 + \rho} \right), \quad (z, w) \in \bar{\Omega},$$

dove si è supposto $\theta + \theta_0 > 0$, $\rho + \rho_0 > 0$ (Se $\theta + \theta_0 = \rho + \rho_0 = 0$, allora $\theta = \theta_0 = \rho = \rho_0 = 0$ e l'affermazione è vera per il Teorema 2).

La definizione ha senso perchè se $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$, $0 \leq \alpha + \beta \leq 1$, si ha

$$\frac{\theta \alpha}{\theta_0 + \theta} + \frac{\rho \beta}{\rho_0 + \rho} \leq \frac{(\theta_0 + \theta) \alpha}{\theta_0 + \theta} + \frac{(\rho_0 + \rho) \beta}{\rho_0 + \rho} \leq 1,$$

e analogamente

$$\frac{\theta_0 \alpha}{\theta_0 + \theta} + \frac{\rho_0 \beta}{\rho_0 + \rho} \leq 1.$$

Per le ipotesi su H e perchè $f \in \mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)$, h è una funzione continua e limitata da $\bar{\Omega}$ a $A_0 + A_1 + A_2$, olomorfa da Ω a $A_0 + A_1 + A_2$.

Poi,

$$\begin{aligned} \| h(it, i\tau) \|_{A_0} &= \left\| H \left(i \frac{t\theta}{\theta_0 + \theta}, i \frac{\tau\rho}{\rho_0 + \rho} \right) f \left(i \frac{t\theta_0}{\theta_0 + \theta}, i \frac{\tau\rho_0}{\rho_0 + \rho} \right) \right\|_{A_0} \leq \\ &\leq M_0 \left\| f \left(i \frac{t\theta_0}{\theta_0 + \theta}, i \frac{\tau\rho_0}{\rho_0 + \rho} \right) \right\|_{A_0} \leq M_0 \| f \|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)}; \\ \| h(1 + it, i\tau) \|_{A_1} &= \left\| H \left(\frac{\theta}{\theta_0 + \theta} + i \frac{t\theta}{\theta_0 + \theta}, i \frac{\tau\rho}{\rho_0 + \rho} \right) \right. \\ &\quad \left. f \left(\frac{\theta_0}{\theta_0 + \theta} + i \frac{t\theta_0}{\theta_0 + \theta}, i \frac{\tau\rho_0}{\rho_0 + \rho} \right) \right\|_{A_1} \leq (\text{per la (i)}) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq M_1^{\theta_0/(\theta_0+\theta)} M_3^{\theta/(\theta_0+\theta)} \left\| f \left(\frac{\theta_0}{\theta_0+\theta} + i \frac{t\theta_0}{\theta_0+\theta}, i \frac{\tau\rho_0}{\rho_0+\rho} \right) \right\|_{[A_0, A_1]_{\rho/(\rho+\rho_0)}} \leq \\
&\leq M_1^{\theta_0/(\theta_0+\theta)} M_3^{\theta/(\theta_0+\theta)} \max \left\{ \sup_t \left\| f \left(it, i \frac{\tau\rho_0}{\rho_0+\rho} \right) \right\|_{A_0}, \right. \\
&\quad \left. \sup_i \left\| f \left(1+it, i \frac{\tau\rho_0}{\rho_0+\rho} \right) \right\|_{A_1} \right\} \leq \\
&\leq M_1^{\theta_0/(\theta_0+\theta)} M_3^{\theta/(\theta_0+\theta)} \max \left\{ \sup_{t, \tau} \| f(it, i\tau) \|_{A_0}, \sup_{t, \tau} \| f(1+it, i\tau) \|_{A_1}, \right. \\
&\quad \left. \sup_{t, \tau} \| f(it, 1+i\tau) \|_{A_2} \right\} = \\
&= M_1^{\theta_0/(\theta_0+\theta)} M_3^{\theta/(\theta_0+\theta)} \| f \|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)}.
\end{aligned}$$

In base alla formula (ii),

$$\begin{aligned}
&\| h(it, 1+i\tau) \|_{A_2} = \left\| H \left(i \frac{t\theta}{\theta_0+\theta}, \frac{\rho}{\rho_0+\rho} + i \frac{\tau\rho}{\rho_0+\rho} \right) \right. \\
&\quad \left. f \left(i \frac{t\theta_0}{\theta_0+\theta}, \frac{\rho_0}{\rho_0+\rho} + i \frac{\tau\rho_0}{\rho_0+\rho} \right) \right\|_{A_2} \leq \\
&\leq M_2^{\rho_0/(\rho_0+\rho)} M_4^{\rho/(\rho_0+\rho)} \left\| f \left(i \frac{t\theta_0}{\theta_0+\theta}, \frac{\rho_0}{\rho_0+\rho} + i \frac{\tau\rho_0}{\rho_0+\rho} \right) \right\|_{[A_0, A_2]_{\rho/(\rho_0+\rho)}} \leq \\
&\leq M_2^{\rho_0/(\rho_0+\rho)} M_4^{\rho/(\rho_0+\rho)} \max \left\{ \sup_{\tau} \left\| f \left(i \frac{t\theta_0}{\theta_0+\theta}, i\tau \right) \right\|_{A_0}, \right. \\
&\quad \left. \sup_{\tau} \left\| f \left(i \frac{t\theta_0}{\theta_0+\theta}, 1+i\tau \right) \right\|_{A_2} \right\} \leq \\
&\leq M_2^{\rho_0/(\rho_0+\rho)} M_4^{\rho/(\rho_0+\rho)} \max \left\{ \sup_{t, \tau} \| f(it, i\tau) \|_{A_0}, \sup_{t, \tau} \| f(1+it, i\tau) \|_{A_1}, \right. \\
&\quad \left. \sup_{t, \tau} \| f(it, 1+i\tau) \|_{A_2} \right\} = \\
&= M_2^{\rho_0/(\rho_0+\rho)} M_4^{\rho/(\rho_0+\rho)} \| f \|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)}.
\end{aligned}$$

Di qui,

$$H(\theta, \rho)f(\theta_0, \rho_0) = H(\theta, \rho)x = h(\theta + \theta_0, \rho + \rho_0) \in [A_0, A_1, A_2]_{\theta+\theta_0, \rho+\rho_0}.$$

Inoltre, per il lemma 2,

$$\begin{aligned} \| h(\theta + \theta_0, \rho + \rho_0) \|_{[A_0, A_1, A_2]_{\theta + \theta_0, \rho + \rho_0}} &\leq M_0^{1-\theta-\theta_0-\rho-\rho_0} (M_1^{\theta_0/(\theta+\theta_0)} M_3^{\theta/(\theta_0+\theta)})^{\theta_0+\theta} \cdot \\ &\cdot (M_2^{\rho_0/(\rho_0+\rho)} M_4^{\rho/(\rho_0+\rho)})^{\rho_0+\rho} \| f \|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)} = \\ &= M_0^{1-\theta-\theta_0-\rho-\rho_0} M_1^{\theta_0} M_2^{\rho_0} M_3^{\theta} M_4^{\rho} \| f \|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)} \leq \\ &\leq M_0^{1-\theta-\theta_0-\rho-\rho_0} M_1^{\theta_0} M_2^{\rho_0} M_3^{\theta} M_4^{\rho} (\| x \|_{[A_0, A_1, A_2]_{\theta_0, \rho_0}} + \varepsilon). \end{aligned}$$

Dal momento che ε è un numero positivo arbitrario, il Teorema risulta provato.

COROLLARIO. Sia $A_2 \hookrightarrow A_0, A_2 \hookrightarrow A_1$. Allora, se $\theta, \theta', \rho, \rho' \in [0, 1], 0 \leq \theta + \theta' + \rho + \rho' \leq 1$,

$$[A_0, A_1, A_2]_{\theta', 1-\theta'-\rho'} \hookrightarrow [A_0, A_1, A_2]_{\theta+\theta', 1-\theta-\theta'-\rho-\rho'}$$

e pertanto,

$$[A_0, A_1, A_2]_{u, v} \hookrightarrow [A_0, A_1, A_2]_{u+\theta, v-\theta-\rho}$$

DIMOSTRAZIONE. In virtù del Teorema 12, prendendo come $H(z, w)$ l'operatore di immersione, si ha

$$(i) \quad [A_2, A_1, A_0]_{\theta', \rho'} \hookrightarrow [A_2, A_1, A_0]_{\theta+\theta', \rho+\rho'}.$$

D'altra parte, per il Teorema 5 (3),

$$[A_2, A_1, A_0]_{\theta', \rho'} = [A_0, A_1, A_2]_{\theta', 1-\theta'-\rho'}.$$

Quindi, il risultato segue immediatamente dalla (i).

TEOREMA 13. Sia $0 \leq \theta_i + \rho_i \leq 1, 0 \leq \theta + \rho \leq 1, \theta_i, \rho_i, \theta, \rho \geq 0, (i=0, 1, 2)$. Allora, se

$$\alpha = (1 - \theta - \rho)\theta_0 + \theta\theta_1 + \rho\theta_2, \quad \beta = (1 - \theta - \rho)\rho_0 + \theta\rho_1 + \rho\rho_2,$$

$$\begin{aligned} &[A_0, A_1, A_2]_{\alpha, \beta} \hookrightarrow \\ &\hookrightarrow [[A_0, A_1, A_2]_{\theta_0, \rho_0}, [A_0, A_1, A_2]_{\theta_1, \rho_1}, [A_0, A_1, A_2]_{\theta_2, \rho_2}]_{\theta, \rho}. \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Sia x un elemento di $[A_0, A_1, A_2]_{\alpha, \beta}$. Allora dalla definizione di $[A_0, A_1, A_2]_{\alpha, \beta}$ segue che esiste $f \in \mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)$ tale che $f(\alpha, \beta) = x$. Definiamo:

$$g(z, w) = f((1-z-w)\theta_0 + z\theta_1 + w\theta_2, (1-z-w)\rho_0 + z\rho_1 + w\rho_2), \quad (z, w) \in \overline{\Omega}.$$

La definizione ha senso, perchè, se $0 \leq x, y \leq 1, 0 \leq x+y \leq 1$, allora

$$\begin{aligned} 0 &\leq (1-x-y)\theta_0 + x\theta_1 + y\theta_2 + (1-x-y)\rho_0 + x\rho_1 + y\rho_2 \leq \\ &\leq 1-x-y+x+y=1. \end{aligned}$$

Si riconosce che g è continua e limitata da $\overline{\Omega}$ a $A_0 + A_1 + A_2$, olomorfa da Ω a $A_0 + A_1 + A_2$. Inoltre,

$$g(it, i\tau) = f(\theta_0 + i\varphi_0, \rho_0 + i\psi_0) \in [A_0, A_1, A_2]_{\theta_0, \rho_0},$$

$$\sup_{t, \tau} \|g(it, i\tau)\|_{[A_0, A_1, A_2]_{\theta_0, \rho_0}} \leq \|f\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)};$$

$$g(1+it, i\tau) = f(\theta_1 + i\varphi_1, \rho_1 + i\psi_1) \in [A_0, A_1, A_2]_{\theta_1, \rho_1}$$

con

$$\sup_{t, \tau} \|g(1+it, i\tau)\|_{[A_0, A_1, A_2]_{\theta_1, \rho_1}} \leq \|f\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)};$$

$$g(it, 1+i\tau) = f(\theta_2 + i\varphi_2, \rho_2 + i\psi_2) \in [A_0, A_1, A_2]_{\theta_2, \rho_2}$$

con

$$\sup_{t, \tau} \|g(it, 1+i\tau)\|_{[A_0, A_1, A_2]_{\theta_2, \rho_2}} \leq \|f\|_{\mathcal{H}(A_0, A_1, A_2)}.$$

Ma allora, (cfr. [1], § 9.1, p. 116 e p. 132, p. 159), g è pure continua e limitata da $\overline{\Omega}$ a

$$[A_0, A_1, A_2]_{\theta_0, \rho_0} + [A_0, A_1, A_2]_{\theta_1, \rho_1} + [A_0, A_1, A_2]_{\theta_2, \rho_2},$$

olomorfa da Ω a

$$[A_0, A_1, A_2]_{\theta_0, \rho_0} + [A_0, A_1, A_2]_{\theta_1, \rho_1} + [A_0, A_1, A_2]_{\theta_2, \rho_2}$$

e, dunque,

$$g \in \mathcal{H}([A_0, A_1, A_2]_{\theta_0, \rho_0}, [A_0, A_1, A_2]_{\theta_1, \rho_1}, [A_0, A_1, A_2]_{\theta_2, \rho_2}).$$

D'altra parte, $g(\theta, \rho) = f(\alpha, \beta) = x$. Così,

$$\|x\|_{[[A_0, A_1, A_2]_{\theta_0, \rho_0}, [A_0, A_1, A_2]_{\theta_1, \rho_1}, [A_0, A_1, A_2]_{\theta_2, \rho_2}], \rho} \leq \|x\|_{[A_0, A_1, A_2]_{\alpha, \beta}}.$$

COROLLARIO 1. Sia $0 \leq \theta_i$, $0 \leq \theta_i + \rho_i \leq 1$, ($i=0, 1$). Se $0 \leq \sigma \leq 1$, allora

$$[A_0, A_1, A_2]_{(1-\sigma)\theta_0 + \sigma\theta_1, (1-\sigma)\rho_0 + \sigma\rho_1} \hookrightarrow \\ \hookrightarrow [[A_0, A_1, A_2]_{\theta_0, \rho_0}, [A_0, A_1, A_2]_{\theta_1, \rho_1}]_{\sigma}.$$

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema 13,

$$[A_0, A_1, A_2]_{\alpha, \beta} \hookrightarrow \\ \hookrightarrow [[A_0, A_1, A_2]_{\theta_0, \rho_0}, [A_0, A_1, A_2]_{\theta_1, \rho_1}, [A_0, A_1, A_2]_{\theta_1, \rho_1}]_{\theta, \rho},$$

con $\alpha = (1-\theta-\rho)\theta_0 + (\theta+\rho)\theta_1$, $\beta = (1-\theta-\rho)\rho_0 + (\theta+\rho)\rho_1$.

Allora, (cfr, la Nota al Teorema 6),

$$[A_0, A_1, A_2]_{\alpha, \beta} \hookrightarrow [[A_0, A_1, A_2]_{\theta_0, \rho_0}, [A_0, A_1, A_2]_{\theta_1, \rho_1}]_{\theta+\rho}.$$

Di qui, ponendo $\sigma = \theta + \rho$, si ha $\alpha = (1-\sigma)\theta_0 + \sigma\theta_1$, $\beta = (1-\sigma)\rho_0 + \sigma\rho_1$, e quindi,

$$[A_0, A_1, A_2]_{(1-\sigma)\theta_0 + \sigma\theta_1, (1-\sigma)\rho_0 + \sigma\rho_1} \hookrightarrow \\ \hookrightarrow [[A_0, A_1, A_2]_{\theta_0, \rho_0}, [A_0, A_1, A_2]_{\theta_1, \rho_1}]_{\sigma}.$$

COROLLARIO 2. Sia $0 \leq \theta$, $\rho \leq 1$, $0 \leq \theta + \rho \leq 1$. Allora

$$(1) \quad [A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho} \hookrightarrow [A_0, [A_1, A_2]_{\rho/(\theta+\rho)}]_{\theta+\rho}.$$

(Se $\theta = \rho = 0$, la (1) è ancora valida, nel senso che $[A_0, A_1, A_2]_{0,0} \hookrightarrow [A_0, [A_1, A_2]_0]_0$).

DIMOSTRAZIONE. Per il Corollario 1 al Teorema 13, si ha

$$(1) \quad [A_0, A_1, A_2]_{(1-\sigma)\theta_0+\sigma\theta_1, (1-\sigma)\rho_0+\sigma\rho_1} \hookrightarrow \\ \hookrightarrow [[A_0, A_1, A_2]_{\theta_0, \rho_0}, [A_0, A_1, A_2]_{\theta_1, \rho_1}]_{\sigma}.$$

Se $\theta + \rho \neq 0$, poniamo

$$\theta_0 = \rho_0 = 0, \theta_1 = 1 - \nu, \rho_1 = \nu = \rho / (\theta + \rho), \sigma = \theta + \rho.$$

È $[A_0, A_1, A_2]_{0,0} \hookrightarrow [A_0, A_1]_0 \hookrightarrow A_0$ (per la seconda inclusione, cfr. [1], p. 116) e

$$[A_0, A_1, A_2]_{1-\nu, \nu} = [A_1, A_0, A_2]_{0, \nu} \hookrightarrow [A_1, A_2]_{\nu}.$$

Pertanto, $[A_0, A_1, A_2]_{\sigma(1-\nu), \sigma\nu} \hookrightarrow [A_0, [A_1, A_2]_{\nu}]_{\sigma}.$

Inoltre, $\sigma(1-\nu) = \theta$, $\sigma\nu = \rho$.

Se $\theta + \rho = 0$, ancora per il Corollario 1 al Teorema 13, con $\theta_0 = \rho_1 = \rho_0 = 0$, $\theta_1 = 1$, si ha

$$[A_0, A_1, A_2]_{0,0} \hookrightarrow [[A_0, A_1, A_2]_{0,0}, [A_0, A_1, A_2]_{1,0}]_0.$$

Quindi, poichè $[A_0, A_1, A_2]_{0,0} \hookrightarrow A_0$, applicazione del Teorema 5 e della Proposizione 4 porta a

$$[A_0, A_1, A_2]_{1,0} = [A_1, A_0, A_2]_{0,0} = [A_1, A_2, A_0]_{0,0} \hookrightarrow [A_1, A_2]_0.$$

Così, $[A_0, A_1, A_2]_{0,0} \hookrightarrow [A_0, [A_1, A_2]_0]_0.$

COROLLARIO 3. Sia $0 \leq \theta$, $\rho \leq 1$, $0 \leq \theta + \rho \leq 1$. Allora

$$[A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho} \hookrightarrow [[A_0, A_1]_{\theta+\rho}, [A_0, A_2]_{\theta+\rho}]_{\rho/(\theta+\rho)}.$$

DIMOSTRAZIONE. Per la Proposizione 4,

$$[A_0, A_1, A_2]_{0,0} \hookrightarrow [A_0, A_1]_0, [A_0, A_1, A_2]_{0,0} \hookrightarrow [A_0, A_2]_0,$$

e quindi

$$[A_0, A_1, A_2]_{0,0} \hookrightarrow [[A_0, A_1]_0, [A_0, A_2]_0]_0.$$

Come nella prova del precedente Corollario 2,

$$[A_0, A_1, A_2]_{(1-\sigma)\theta_0 + \sigma\theta_1, (1-\sigma)\rho_0 + \sigma\rho_1} \hookrightarrow \\ [[A_0, A_1, A_2]_{\theta_0, \rho_0}, [A_0, A_1, A_2]_{\theta_1, \rho_1}]_{\sigma}.$$

Ora poniamo $\theta_0 = \rho_1 = u$, $\rho_0 = \theta_1 = 0$.

Allora, poichè

$$[A_0, A_1, A_2]_{u, 0} \hookrightarrow [A_0, A_1]_u, [A_0, A_1, A_2]_{0, u} \hookrightarrow [A_0, A_2]_u,$$

si ha

$$[A_0, A_1, A_2]_{(1-\sigma)u, \sigma u} \hookrightarrow [[A_0, A_1]_u, [A_0, A_2]_u]_{\sigma}.$$

Sia $(1-\sigma)u = \theta$, $\sigma u = \rho$. Allora $u = \theta + \rho$, $\sigma = \rho/(\theta + \rho)$. E quindi,

$$[A_0, A_1, A_2]_{\theta, \rho} \hookrightarrow [[A_0, A_1]_{\theta + \rho}, [A_0, A_2]_{\theta + \rho}]_{\rho/(\theta + \rho)}.$$

Gli esempi successivi estendono risultati di M. Schechter in [9].

ESEMPIO 1. Sia $u(x)$ una distribuzione su $\mathbf{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Con $\mathcal{F}u(\xi)$ oppure $\widehat{u}(\xi)$ denotiamo la trasformata di Fourier di $u(x)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$.

Se $\lambda(\xi)$ è una funzione misurabile da $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}$, strettamente positiva, $B^{\lambda, p}$ denota l'insieme di quelle $u(x)$ tali che $\lambda \mathcal{F}u = \widehat{\lambda u} \in L^p(\mathbf{R}^n)$, con $1 \leq p \leq +\infty$; su $B^{\lambda, p}$ si definisce la norma

$$\|u\|_{B^{\lambda, p}} = \|\lambda \mathcal{F}u\|_{L^p},$$

che ne fa uno spazio di Banach, (cfr. [9], p. 125).

TEOREMA 14. Siano $\lambda_0(\xi)$, $\lambda_1(\xi)$, $\lambda_2(\xi)$ funzioni misurabili soddisfacenti la condizione $0 < \lambda_0(\xi) \leq \lambda_1(\xi) \leq \lambda_2(\xi)$ e siano $p_0, p_1, p_2 \in [1, +\infty]$. Poniamo

$$\beta(\xi) = [\lambda_1(\xi)/\lambda_0(\xi)]^{-\theta} [\lambda_2(\xi)/\lambda_0(\xi)]^{-\rho}, \quad 0 \leq \theta, \rho \leq 1,$$

$$0 \leq \theta + \rho \leq 1, \quad \lambda_{\theta, \rho} = \lambda_0/\beta = \lambda_0^{1-\theta-\rho} \lambda_1^{\theta} \lambda_2^{\rho}.$$

Inoltre sia $1/p_{\theta, \rho} = (1 - \theta - \rho)/p_0 + \theta/p_1 + \rho/p_2$.

Allora:

$$B^{\lambda_0, \rho, p_0, \rho} = [B^{\lambda_0, p_0}, B^{\lambda_1, p_1}, B^{\lambda_2, p_2}]_{\theta, \rho}.$$

Per provare il Teorema 14, stabiliamo il seguente

LEMMA 4. $u \in [B^{\lambda_0, p_0}, B^{\lambda_1, p_1}, B^{\lambda_2, p_2}]_{\theta, \rho}$ se e solo se esiste $g \in \mathcal{H}(L^{p_0}, L^{p_1}, L^{p_2})$ tale che

$$\mathfrak{F}u = \widehat{u} = \frac{1}{\lambda_0} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)^{-\rho} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0} \right)^{-\theta} g(\theta, \rho).$$

DIMOSTRAZIONE. Per definizione, $u \in [B^{\lambda_0, p_0}, B^{\lambda_1, p_1}, B^{\lambda_2, p_2}]_{\theta, \rho}$ implica che esiste f , elemento di $\mathcal{H}(B^{\lambda_0, p_0}, B^{\lambda_1, p_1}, B^{\lambda_2, p_2})$ tale che $f(\theta, \rho) = u$. Poniamo

$$g(z, w) = \lambda_0^{1-z-w} \lambda_1^z \lambda_2^w \mathfrak{F}f(z, w), \quad (z, w) \in \overline{\Omega},$$

cioè,

$$(g(z, w))(\xi) = (\lambda_0(\xi))^{1-z-w} (\lambda_1(\xi))^z (\lambda_2(\xi))^w (\mathfrak{F}f(z, w))(\xi), \quad \xi \in \mathbf{R}^n.$$

Poichè $f \in \mathcal{H}(B^{\lambda_0, p_0}, B^{\lambda_1, p_1}, B^{\lambda_2, p_2})$, vale

$$\lambda_0 \mathfrak{F}f(it, i\tau) \in L^{p_0}, \quad \lambda_1 \mathfrak{F}f(1+it, i\tau) \in L^{p_1}, \quad \lambda_2 \mathfrak{F}f(it, 1+i\tau) \in L^{p_2}.$$

Di qui,

$$|(g(it, i\tau))(\xi)| = \lambda_0(\xi) |(\mathfrak{F}f(it, i\tau))(\xi)| \Rightarrow g(it, i\tau) \in L^{p_0}, \quad \forall t, \tau \in \mathbf{R}.$$

Analogamente,

$$g(1+it, i\tau) \in L^{p_1}, \quad g(it, 1+i\tau) \in L^{p_2}.$$

Inoltre, per le ipotesi sulla f ,

$$\sup_{t, \tau} \|g(it, i\tau)\|_{L^{p_0}} < +\infty; \quad \sup_{t, \tau} \|g(1+it, i\tau)\|_{L^{p_1}} < +\infty;$$

$$\sup_{t, \tau} \|g(it, 1+i\tau)\|_{L^{p_2}} < +\infty.$$

Segue anche che g è continua e limitata da $\overline{\Omega}$ a $L^{p_0} + L^{p_1} + L^{p_2}$, olomorfa da Ω a $L^{p_0} + L^{p_1} + L^{p_2}$. Quindi, $g \in \mathcal{H}(L^{p_0}, L^{p_1}, L^{p_2})$.

D'altra parte,

$$\mathfrak{F}u = \mathfrak{F}f(\theta, \rho) = \frac{1}{\lambda_0} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)^{-\theta} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0} \right)^{-\rho} g(\theta, \rho).$$

Pertanto, una implicazione della equivalenza enunciata è provata.

Ora supponiamo $\mathfrak{F}u = \frac{1}{\lambda_0} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)^{-\theta} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0} \right)^{-\rho} g(\theta, \rho)$, con $g \in \mathcal{H}(L^{p_0}, L^{p_1}, L^{p_2})$.

Si definisce una funzione f attraverso

$$\mathfrak{F}f(z, w) = \frac{1}{\lambda_0} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)^{-z} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0} \right)^{-w} g(z, w).$$

f è un elemento di $\mathcal{H}(B^{\lambda_0, p_0}, B^{\lambda_1, p_1}, B^{\lambda_2, p_2})$.

Infatti, $|\mathfrak{F}f(it, i\tau)| = \lambda_0^{-1} |g(it, i\tau)|$; ma $g \in \mathcal{H}(L^{p_0}, L^{p_1}, L^{p_2})$ e pertanto, $g(it, i\tau) \in L^{p_0}$, con $\sup_{t, \tau} \|g(it, i\tau)\|_{L^{p_0}} < +\infty$. Di qui, $\lambda_0 \mathfrak{F}f(it, i\tau) \in L^{p_0}$ e

$$\|f(it, i\tau)\|_{B^{\lambda_0, p_0}} = \|\lambda_0 \mathfrak{F}f(it, i\tau)\|_{L^{p_0}} = \|g(it, i\tau)\|_{L^{p_0}} < M_0,$$

dove M_0 è una costante indipendente da t e τ .

Analogamente, si prova che $f(1+it, i\tau) \in B^{\lambda_1, p_1}$, $f(it, 1+i\tau) \in B^{\lambda_2, p_2}$, con

$$\sup_{t, \tau} \|f(1+it, i\tau)\|_{B^{\lambda_1, p_1}} < M_1, \quad \sup_{t, \tau} \|f(it, 1+i\tau)\|_{B^{\lambda_2, p_2}} < M_2.$$

Inoltre, poiché $g \in \mathcal{H}(L^{p_0}, L^{p_1}, L^{p_2})$, la f definita sopra è continua e limitata da $\overline{\Omega}$ a $B^{\lambda_0, p_0} + B^{\lambda_1, p_1} + B^{\lambda_2, p_2}$, olomorfa da Ω a $B^{\lambda_0, p_0} + B^{\lambda_1, p_1} + B^{\lambda_2, p_2}$.

$$\text{È } \mathfrak{F}u = \frac{1}{\lambda_0} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)^{-\theta} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0} \right)^{-\rho} g(\theta, \rho) = \mathfrak{F}f(\theta, \rho). \text{ Dunque, } u = f(\theta, \rho).$$

Pertanto, poiché $f \in \mathcal{H}(B^{\lambda_0, p_0}, B^{\lambda_1, p_1}, B^{\lambda_2, p_2})$, si può concludere che

$$u = f(\theta, \rho) \in [B^{\lambda_0, p_0}, B^{\lambda_1, p_1}, B^{\lambda_2, p_2}]_{\theta, \rho}.$$

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 14. Sia $u \in [B^{\lambda_0, p_0}, B^{\lambda_1, p_1}, B^{\lambda_2, p_2}]_{\theta, \rho}$.

Allora, per il Lemma 4, esiste $g \in \mathcal{H}(L^{p_0}, L^{p_1}, L^{p_2})$ tale che

$$\mathcal{F}u = \frac{1}{\lambda_0} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)^{-\theta} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0} \right)^{-\rho} g(\theta, \rho).$$

Poichè

$$g \in \mathcal{H}(L^{p_0}, L^{p_1}, L^{p_2}, g(\theta, \rho) \in L^{p_{\theta, \rho}} (= [L^{p_0}, L^{p_1}, L^{p_2}]_{\theta, \rho}),$$

(cfr. [8], p. 1855).

Inoltre,

$$\lambda_{\theta, \rho} \mathcal{F}u = \frac{\lambda_0}{\beta} \mathcal{F}u = \frac{\lambda_0}{\beta} \frac{\beta}{\lambda_0} g(\theta, \rho) = g(\theta, \rho) \in L^{p_{\theta, \rho}}.$$

Dunque, $u \in B^{\lambda_{\theta, \rho}, p_{\theta, \rho}}$.

Viceversa, sia $u \in B^{\lambda_{\theta, \rho}, p_{\theta, \rho}}$. Allora, per definizione di $B^{\lambda, p}$,

$$\lambda_{\theta, \rho} \mathcal{F}u = \lambda_0^{1-\theta-\rho} \lambda_1^{\theta} \lambda_2^{\rho} \mathcal{F}u \in L^{p_{\theta, \rho}} = [L^{p_0}, L^{p_1}, L^{p_2}]_{\theta, \rho}.$$

Dunque, esiste $g \in \mathcal{H}(L^{p_0}, L^{p_1}, L^{p_2})$ tale che

$$\lambda_0^{1-\theta-\rho} \lambda_1^{\theta} \lambda_2^{\rho} \mathcal{F}u = g(\theta, \rho).$$

Ma allora, per il Lemma 4, poichè $\mathcal{F}u = \frac{1}{\lambda_0} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)^{-\theta} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0} \right)^{-\rho} g(\theta, \rho)$, si ha $u \in [B^{\lambda_0, p_0}, B^{\lambda_1, p_1}, B^{\lambda_2, p_2}]_{\theta, \rho}$.

Ciò conclude la prova del Teorema 14.

COROLLARIO. Siano λ_0, λ_1 funzioni misurabili strettamente positive, come nel Teorema 14, e $p_0, p_1 \in [1, +\infty]$.

Se $\lambda_{\theta} = \lambda_0^{1-\theta} \lambda_1^{\theta}$, $\theta \in]0, 1[$, $1/p_{\theta} = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$, allora

$$B^{\lambda_{\theta}, p_{\theta}} = [B^{\lambda_0, p_0}, B^{\lambda_1, p_1}]_{\theta}.$$

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dalla Nota al Teorema 6 e dal Teorema 14. Infatti,

$$[B^{\lambda_0, p_0}, B^{\lambda_1, p_1}]_{\theta} = [B^{\lambda_0, p_0}, B^{\lambda_1, p_1}, B^{\lambda_1, p_1}]_{\theta, 0} = B^{\lambda_{\theta}, p_{\theta}}.$$

OSSERVAZIONE. Dal Teorema 14 e dal suo Corollario segue che

$$[B^{\lambda_0, p_0}, B^{\lambda_1, p_1}, B^{\lambda_2, p_2}]_{\theta, \rho} = B^{\lambda_{\theta, \rho}, p_{\theta, \rho}} = [B^{\lambda_0, p_0}, [B^{\lambda_1, p_1}, B^{\lambda_2, p_2}]_{\rho/(\theta+\rho)}]_{\theta+\rho}.$$

Infatti, $[B^{\lambda_1, p_1}, B^{\lambda_2, p_2}]_{\rho/(\theta+\rho)} = B^{\lambda_3, p}$ con $\lambda_3 = \lambda_1^{\theta/(\theta+\rho)} \lambda_2^{p/(\theta+\rho)}$ e

$$1/p = \theta/(p_1(\theta+\rho)) + \rho/(p_2(\theta+\rho)); [B^{\lambda_0, p_0}, B^{\lambda_3, p}]_{\theta+\rho} = B^{\lambda_{\theta, \rho}, \tilde{p}}$$

dove

$$1/\tilde{p} = (1-\theta-\rho)/p_0 + (\theta+\rho)/p = 1/p_{\theta, \rho}, \text{ cioè, } \tilde{p} = p_{\theta, \rho}.$$

ESEMPIO 2. Sia $\lambda(\xi)$ una funzione misurabile strettamente positiva su $\mathbf{R}^n$. Allora con $H^{\lambda, p}$, $p \in [1, +\infty[$, si intende l'insieme delle distribuzioni $u(x)$ tali che $\mathcal{F}^{-1} \lambda \mathcal{F} u = \widetilde{\lambda u} \in L^p(\mathbf{R}^n)$, dove $\mathcal{F}^{-1}$ denota la trasformata di Fourier inversa; munito della norma

$$\|u\|_{H^{\lambda, p}} = \|\mathcal{F}^{-1} \lambda \mathcal{F} u\|_{L^p},$$

$H^{\lambda, p}$ risulta essere uno spazio di Banach, (cfr. [9], p. 128).

Per provare un risultato corrispondente al Teorema 14 per gli spazi $H^{\lambda, p}$ dobbiamo ricordare qualche definizione.

Sia m una funzione misurabile limitata su $\mathbf{R}^n$. Allora si definisce una trasformazione lineare T_m , di dominio $L^2(\mathbf{R}^n) \cap L^p(\mathbf{R}^n)$, per mezzo della seguente relazione fra trasformate di Fourier

$$(T_m f)(x) = m(x) \widehat{f}(x), \quad f \in L^2(\mathbf{R}^n) \cap L^p(\mathbf{R}^n).$$

Si dice che m è un moltiplicatore in $L^p(1 \leq p \leq +\infty)$ se

$$f \in L^2(\mathbf{R}^n) \cap L^p(\mathbf{R}^n) \Rightarrow T_m f \in L^p(\mathbf{R}^n),$$

e T_m è limitata, cioè, esiste $A > 0$ per cui

$$(1) \quad \|T_m(f)\|_{L^p} \leq A \|f\|_{L^p}, \quad f \in L^2(\mathbf{R}^n) \cap L^p(\mathbf{R}^n).$$

La più piccola A tale che (1) è vera, si chiama la norma del moltiplicatore m e si dice che $m \in M_p$.

Se vale (1) ed è $p < +\infty$ allora T_m ha una estensione unica e limitata a $L^p(\mathbf{R}^n)$, che ancora soddisfa (1). Tale estensione si denota con T_m .

Sui moltiplicatori, cfr. [11], p. 94 e sgg.

LEMMA 5. Sia $1 < p_0, p_1, p_2 < +\infty$; $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ siano funzioni misurabili strettamente positive, con $0 < \lambda_0(\xi) \leq \lambda_1(\xi) \leq \lambda_2(\xi)$, tali che

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{it} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0}\right)^{i\tau} \in M_{p_j}, \quad (j=0, 1, 2) \quad \forall t, \tau \in \mathbf{R}$$

e la norma in M_{p_j} di

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{it} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0}\right)^{i\tau}$$

sia uniformemente limitata in t e τ ($j=0, 1, 2$).

Allora:

$$u \in [H^{\lambda_0, p_0}, H^{\lambda_1, p_1}, H^{\lambda_2, p_2}]_{\theta, \rho} \text{ se e solo se esiste } g \in \mathcal{H}(L^{p_0}, L^{p_1}, L^{p_2})$$

tale che

$$\mathcal{F}u = \frac{1}{\lambda_0} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{-\theta} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0}\right)^{-\rho} \mathcal{F}g(\theta, \rho).$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $u \in [H^{\lambda_0, p_0}, H^{\lambda_1, p_1}, H^{\lambda_2, p_2}]_{\theta, \rho}$.

Allora esiste $f \in \mathcal{H}(H^{\lambda_0, p_0}, H^{\lambda_1, p_1}, H^{\lambda_2, p_2})$, tale che $f(\theta, \rho) = u$.

Definiamo una funzione g attraverso la relazione fra trasformate di Fourier

$$\mathcal{F}g(z, w) = \lambda_0^{1-z-w} \lambda_1^z \lambda_2^w \mathcal{F}f(z, w), \quad (z, w) \in \overline{\Omega}.$$

Poichè $\forall t, \tau \in \mathbf{R}$, $\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{it} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0}\right)^{i\tau}$ è un elemento di M_{p_j} ($j=0, 1, 2$), si ha

$$(2) \quad h \in L^{p_j} \Rightarrow \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{it} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0}\right)^{i\tau} \mathcal{F}h \in L^{p_j}.$$

Poichè $f \in \mathcal{H}(H^{\lambda_0, p_0}, H^{\lambda_1, p_1}, H^{\lambda_2, p_2})$, $\mathcal{F}^{-1} \lambda_0 \mathcal{F}f(it, i\tau) \in L^{p_0}$.

Quindi, per la (2),

$$\mathfrak{F}^{-1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)^{it} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0} \right)^{i\tau} \lambda_0 \mathfrak{F} f(it, i\tau) \in L^{p_0}.$$

Ma $\mathfrak{F}^{-1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)^{it} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0} \right)^{i\tau} \lambda_0 \mathfrak{F} f(it, i\tau) = g(it, i\tau)$. Dunque, $g(it, i\tau) \in L^{p_0}$,
 $\forall t, \tau \in \mathbf{R}$.

D'altra parte, per la limitatezza uniforme di $\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)^{it} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0} \right)^{i\tau}$ nella norma di M_{p_0} ,

$$\begin{aligned} \|g(it, i\tau)\|_{L^{p_0}} &\leq A \cdot \|\mathfrak{F}^{-1} \lambda_0 \mathfrak{F} f(it, i\tau)\|_{L^{p_0}} = A \|f(it, i\tau)\|_{H^{\lambda_0, p_0}} \leq \\ &\leq A \|f\|_{\mathcal{H}(H^{\lambda_0, p_0}, H^{\lambda_1, p_1}, H^{\lambda_2, p_2})}. \end{aligned}$$

Così, $\sup_{t, \tau} \|g(it, i\tau)\|_{L^{p_0}} < +\infty$.

Allo stesso modo si prova che $g(1+it, i\tau) \in L^{p_1}$, $g(it, 1+i\tau) \in L^{p_2}$ e

$$\sup_{t, \tau} \|g(1+it, i\tau)\|_{L^{p_1}} < +\infty, \quad \sup_{t, \tau} \|g(it, 1+i\tau)\|_{L^{p_2}} < +\infty.$$

Poichè $\mathfrak{F}$ è un operatore lineare e continuo e

$$f \in \mathcal{H}(H^{\lambda_0, p_0}, H^{\lambda_1, p_1}, H^{\lambda_2, p_2}),$$

g risulta continua e limitata da $\overline{\Omega}$ a $L^{p_0} + L^{p_1} + L^{p_2}$, olomorfa da Ω a $L^{p_0} + L^{p_1} + L^{p_2}$. Ne segue che $g \in \mathcal{H}(L^{p_0}, L^{p_1}, L^{p_2})$ e allora, dalla definizione di g si deduce che

$$u \in [H^{\lambda_0, p_0}, H^{\lambda_1, p_1}, H^{\lambda_2, p_2}]_{\theta, p} \Rightarrow \exists g \in \mathcal{H}(L^{p_0}, L^{p_1}, L^{p_2})$$

tale che

$$\mathfrak{F}u = \frac{1}{\lambda_0} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)^{-\theta} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0} \right)^{-\rho} \mathfrak{F}g(\theta, \rho).$$

Viceversa, sia

$$\mathfrak{F}u = \frac{1}{\lambda_0} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)^{-\theta} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0} \right)^{-\rho} \mathfrak{F}g(\theta, \rho),$$

con $g \in \mathcal{H}(L^{p_0}, L^{p_1}, L^{p_2})$. Poniamo, come definizione di f ,

$$\mathfrak{F}f(z, w) = \frac{1}{\lambda_0} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)^{-z} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0} \right)^{-w} \mathfrak{F}g(z, w), \quad (z, w) \in \overline{\Omega}.$$

Poichè $g(it, i\tau) \in L^{p_0}$ e

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{-it} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0}\right)^{-i\tau} \in M_{p_0}, \quad \mathfrak{F}^{-1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{-it} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0}\right)^{-i\tau} \mathfrak{F} g(it, i\tau) \in L^{p_0}.$$

Ne segue che $\mathfrak{F}^{-1} \lambda_0 \mathfrak{F} f(it, i\tau) \in L^{p_0}$. Inoltre,

$$\begin{aligned} \|f(it, i\tau)\|_{H^{\lambda_0, p_0}} &= \left\| \mathfrak{F}^{-1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{-it} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0}\right)^{-i\tau} \mathfrak{F} g(it, i\tau) \right\|_{L^{p_0}} \leq \\ &\leq A \|g(it, i\tau)\|_{L^{p_0}} \leq A \|g\|_{\mathcal{H}(L^{p_0}, L^{p_1}, L^{p_2})}. \end{aligned}$$

Con analogo ragionamento, si riconosce che $\mathfrak{F}^{-1} \lambda_1 \mathfrak{F} f(1+it, i\tau) \in L^{p_1}$, $\mathfrak{F}^{-1} \lambda_2 \mathfrak{F} f(it, 1+i\tau) \in L^{p_2}$, con

$$\begin{aligned} \|f(1+it, i\tau)\|_{H^{\lambda_1, p_1}} &\leq A \|g\|_{\mathcal{H}(L^{p_0}, L^{p_1}, L^{p_2})}, \quad \|f(it, 1+i\tau)\|_{H^{\lambda_2, p_2}} \leq \\ &\leq A \|g\|_{\mathcal{H}(L^{p_0}, L^{p_1}, L^{p_2})}. \end{aligned}$$

Infine, f è continua e limitata da $\overline{\Omega}$ a $H^{\lambda_0, p_0} + H^{\lambda_1, p_1} + H^{\lambda_2, p_2}$, olo-morfa da Ω a $H^{\lambda_0, p_0} + H^{\lambda_1, p_1} + H^{\lambda_2, p_2}$. Quindi,

$$f \in \mathcal{H}(H^{\lambda_0, p_0}, H^{\lambda_1, p_1}, H^{\lambda_2, p_2})$$

e

$$f(\theta, \rho) \in [H^{\lambda_0, p_0}, H^{\lambda_1, p_1}, H^{\lambda_2, p_2}]_{\theta, \rho}.$$

D'altra parte,

$$\mathfrak{F} u = \mathfrak{F} f(\theta, \rho).$$

Dunque, $u = f(\theta, \rho)$. Pertanto, $u \in [H^{\lambda_0, p_0}, H^{\lambda_1, p_1}, H^{\lambda_2, p_2}]_{\theta, \rho}$.

TEOREMA 15. *Valgano le ipotesi dela Lemma 5. Allora:*

$$H^{\lambda_{\theta, \rho}, p_{\theta, \rho}} = [H^{\lambda_0, p_0}, H^{\lambda_1, p_1}, H^{\lambda_2, p_2}]_{\theta, \rho},$$

con $\lambda_{\theta, \rho} = \lambda_0^{1-\theta-\rho} \lambda_1^\theta \lambda_2^\rho$, $1/p_{\theta, \rho} = (1-\theta-\rho)/p_0 + \theta/p_1 + \rho/p_2$.

DIMOSTRAZIONE. Analoga a quella del Teorema 14, sulla base del Lemma 5.

COROLLARIO. Siano $\lambda_0, \lambda_1, p_0, p_1 \in]1, +\infty[$, come nel Lemma 5. Se $\lambda_\theta = \lambda_0^{1-\theta} \lambda_1^\theta$, $\theta \in]0, 1[$, $1/p_\theta = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$, allora

$$H^{\lambda_\theta, p_\theta} = [H^{\lambda_0, p_0}, H^{\lambda_1, p_1}]_\theta.$$

Osserviamo infine che anche per gli spazi $H^{\lambda, p}$ vale la relazione

$$\begin{aligned} [H^{\lambda_0, p_0}, H^{\lambda_1, p_1}, H^{\lambda_2, p_2}]_{\theta, p} &= [H^{\lambda_0, p_0}, [H^{\lambda_1, p_1}, H^{\lambda_2, p_2}]_{\rho/(\theta+\rho)}]_{\theta+\rho} = \\ &= [[H^{\lambda_0, p_0}, H^{\lambda_1, p_1}]_{\theta+\rho}, [H^{\lambda_0, p_0}, H^{\lambda_2, p_2}]_{\theta+\rho}]_{\rho/(\theta+\rho)}. \end{aligned}$$

ESEMPIO 3. Sia X uno spazio di Banach riflessivo e A, B siano due operatori lineari chiusi in X con domini $D(A)$ e $D(B)$ densi (in X).

Inoltre, il risolvente di A e di B contenga l'asse reale negativo e valgano:

- (I) $\|(\lambda + A)^{-1}\|_{X \rightarrow X} \leq M(1 + \lambda)^{-1}$, $\lambda > 0$;
- (II) $\|(\mu + B)^{-1}\|_{X \rightarrow X} \leq N(1 + \mu)^{-1}$, $\mu > 0$;
- (III) $(\lambda + A)^{-1}(\mu + B)^{-1} = (\mu + B)^{-1}(\lambda + A)^{-1}$, $\lambda, \mu > 0$.

Si introduce una funzione $\varphi(z, w; \lambda, \mu)$, definita per $(z, w) \in \overline{\Omega}$, $0 < \lambda, \mu < +\infty$, a valori complessi, tale che

(a) $\forall (z, w) \in \overline{\Omega}$, $\Phi(z, w; \lambda, \mu)$ è una funzione misurabile di (λ, μ) e

$$(IV) \sup_{\Omega} \int_0^\infty \int_0^\infty |\Phi(z, w; \lambda, \mu)| (1 + \lambda)^{-1} (1 + \mu)^{-1} d\lambda d\mu < +\infty;$$

(b) $(z, w) \rightarrow \Phi(z, w; \lambda, \mu)$ è continua in $\overline{\Omega}$, nel senso che $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ tale che

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |\Phi(z, w; \lambda, \mu) - \Phi(z', w'; \lambda, \mu)| (1 + \lambda)^{-1} (1 + \mu)^{-1} d\lambda d\mu < \varepsilon,$$

purchè $|z - z'| < \delta(\varepsilon)$, $|w - w'| < \delta(\varepsilon)$, $(z, w) \in \overline{\Omega}$, $(z', w') \in \overline{\Omega}$, ed è limitata nel senso che vale (IV).

(c) $(z, w) \rightarrow \Phi(z, w; \lambda, \mu)$ è olomorfa in Ω , nel senso che esistono Φ'_z, Φ'_w per cui

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \left| \frac{\Phi(z + \Delta z, w; \lambda, \mu) - \Phi(z, w; \lambda, \mu)}{\Delta z} - \Phi'_z(z, w; \lambda, \mu) \right| \cdot \\ \cdot (1 + \lambda)^{-1} (1 + \mu)^{-1} d\lambda d\mu \xrightarrow{\Delta z \rightarrow 0} 0;$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \left| \frac{\Phi(z, w + \Delta w; \lambda, \mu) - \Phi(z, w; \lambda, \mu)}{\Delta w} - \Phi'_w(z, w; \lambda, \mu) \right| \cdot \\ \cdot (1 + \lambda)^{-1} (1 + \mu)^{-1} d\lambda d\mu \xrightarrow{\Delta w \rightarrow 0} 0.$$

Infine, si suppone che valgano le seguenti maggiorazioni:

$$(V) \int_0^\infty \int_0^\infty |\Phi(it, i\tau; \lambda, \mu)| (1 + \lambda)^{-1} (1 + \mu)^{-1} d\lambda d\mu \leq 1;$$

$$(VI) \int_0^\infty \int_0^\infty |\Phi(1 + it, i\tau; \lambda, \mu)| (1 + \mu)^{-1} d\lambda d\mu \leq 1;$$

$$(VII) \int_0^\infty \int_0^\infty |\Phi(it, 1 + i\tau; \lambda, \mu)| (1 + \lambda)^{-1} d\lambda d\mu \leq 1.$$

Poniamo ora la seguente

DEFINIZIONE 4. Se $\Phi(z, w; \lambda, \mu)$ soddisfa le condizioni (a)-(b)-(c) e le maggiorazioni (IV)-(VII), e A, B sono sottoposti alle (I)-(III), si denota con $\psi(z, w; A, B)$ l'integrale

$$\psi(z, w; A, B) = \int_0^\infty \int_0^\infty \Phi(z, w; \lambda, \mu) (\lambda + A)^{-1} (\mu + B)^{-1} d\lambda d\mu, \quad (z, w) \in \overline{\Omega}.$$

Osserviamo che se $(z, w) \in \overline{\Omega}$, per le (I)-(II), si ha

$$\begin{aligned} \|\psi(z, w; A, B)\|_{x \rightarrow x} &= \left\| \int_0^\infty \int_0^\infty \Phi(z, w; \lambda, \mu)(\lambda + A)^{-1}(\mu + B)^{-1} d\lambda d\mu \right\|_{x \rightarrow x} \leq \\ &\leq \int_0^\infty \int_0^\infty |\Phi(z, w; \lambda, \mu)| MN(1+\lambda)^{-1}(1+\mu)^{-1} d\lambda d\mu. \end{aligned}$$

Quindi, per la (IV), $\|\psi(z, w; A, B)\|_{x \rightarrow x} \leq MN \cdot C$.

Così, $\psi(z, w; A, B)$ è un operatore lineare limitato in X .

D'altra parte, per la disuguaglianza (V),

$$MN \int_0^\infty \int_0^\infty |\Phi(it, i\tau; \lambda, \mu)| (1+\lambda)^{-1}(1+\mu)^{-1} d\lambda d\mu \leq MN.$$

Dunque,

PROPOSIZIONE 8. $\forall t, \tau \in \mathbf{R}$, $\psi(it, i\tau; A, B)$ è un operatore lineare limitato da X in sè e $\|\psi(it, i\tau; A, B)\|_{x \rightarrow x} \leq MN$.

Ricordiamo che, A e B essendo operatori lineari chiusi con domini $D(A)$ e $D(B)$ densi in X , $D(A)$ e $D(B)$ possono essere muniti di norme che ne fanno degli spazi di Banach; precisamente,

$$\|x\|_{D(A)} = \|x\|_X + \|Ax\|_X, \quad \|y\|_{D(B)} = \|y\|_X + \|By\|_X.$$

D'ora in poi intenderemo appunto $D(A)$ e $D(B)$ come spazi di Banach.

Facciamo anche notare (cfr. [9], p. 130) che gli operatori aggiunti di A e di B (aggiunti di operatori lineari non necessariamente limitati), godono delle medesime proprietà di A e di B , rispettivamente. In particolare,

$$(i) \quad \|(\lambda + A^*)^{-1}\|_{x' \rightarrow x'} \leq M(1+\lambda)^{-1}, \quad \lambda > 0,$$

$$(ii) \quad \|(\mu + B^*)^{-1}\|_{x' \rightarrow x'} \leq N(1+\mu)^{-1}, \quad \mu > 0.$$

Di qui, poichè

$$f \in D(A^*) \Rightarrow (\lambda + A^*)^{-1} A^* f = f - \lambda(\lambda + A^*)^{-1} f = A^*(\lambda + A^*)^{-1} f,$$

$$(iii) \quad \|A^*(\lambda + A^*)^{-1}\|_{X' \rightarrow X'} \leq \left(1 + M \frac{\lambda}{1 + \lambda}\right) \leq 1 + M, \quad \lambda > 0.$$

Analogamente,

$$(iv) \quad \|B^*(\mu + B^*)^{-1}\|_{X' \rightarrow X'} \leq 1 + N, \quad \mu > 0.$$

Poniamo $y = \psi(1 + it, i\tau; A, B)x$, $x \in X$, e sia $z \in D(A^*)$. Se $\langle x, f \rangle$ denota il valore del funzionale f in x , si ha:

$$\begin{aligned} \langle y, A^*z \rangle &= \int_0^\infty \int_0^\infty \Phi(1 + it, i\tau; \lambda, \mu) \langle (\lambda + A)^{-1}(\mu + B)^{-1}x, A^*z \rangle d\lambda d\mu = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \Phi(1 + it, i\tau; \lambda, \mu) \langle x, (\mu + B^*)^{-1}(\lambda + A^*)^{-1}A^*z \rangle d\lambda d\mu. \end{aligned}$$

Così,

$$\begin{aligned} |\langle y, A^*z \rangle| &\leq \int_0^\infty \int_0^\infty |\Phi(1 + it, i\tau; \lambda, \mu)| \|x\|_X \|(\mu + B^*)^{-1}\|_{X' \rightarrow X'} \\ &\quad \|(\lambda + A^*)^{-1}A^*\|_{X' \rightarrow X'} \|z\|_{X'} d\lambda d\mu \leq \\ &\leq (\text{per la (iii)}) \leq \int_0^\infty \int_0^\infty |\Phi(1 + it, i\tau; \lambda, \mu)| \|x\|_X \|(\mu + B^*)^{-1}\|_{X' \rightarrow X'} \\ &\quad (1 + M) \|z\|_{X'} d\lambda d\mu \leq \\ &\leq \int_0^\infty \int_0^\infty |\Phi(1 + it, i\tau; \lambda, \mu)| N(1 + M)(1 + \mu)^{-1} \|x\|_X \|z\|_{X'} d\lambda d\mu \leq \\ &\leq (M + 1)N \|x\|_X \|z\|_{X'}, \end{aligned}$$

in base alla (ii) e alla (VI).

Ma allora $y \in D(A)$ e $\langle y, A^*z \rangle = \langle Ay, z \rangle$. Inoltre, dal fatto che $D(A^*)$ è denso in X (cfr. [6], p. 168) e X è riflessivo, deduciamo che

$$\begin{aligned} \|Ay\|_X &= \sup_{f \in X'} \frac{|\langle Ay, f \rangle|}{\|f\|_{X'}} = \|Ay\|_{X'} = \sup_{f \in D(A^*)} \frac{|\langle Ay, f \rangle|}{\|f\|_{X'}} \\ &= \sup_{z \in D(A^*)} \frac{|\langle y, A^*z \rangle|}{\|z\|_{X'}} \leq (M + 1)N \|x\|_X. \end{aligned}$$

Ciò significa che $\| A\psi(1+it, i\tau; A, B) \|_{X \rightarrow X} \leq (M+1)N$.

Pertanto, $(\psi(1+it, i\tau; A, B))X \subset D(A)$. Valutiamo la norma $\| \psi(1+it, i\tau; A, B) \|_{X \rightarrow D(A)}$.

Sia $x \in X$. Allora

$$\begin{aligned} \| \psi(1+it, i\tau, A, B)x \|_{D(A)} &= \| \psi(1+it, i\tau; A, B)x \|_X + \\ &+ \| A\psi(1+it, i\tau; A, B)x \|_X \leq \\ &\leq \| \psi(1+it, i\tau; A, B) \|_X + (M+1)N \| x \|_X. \end{aligned}$$

D'altra parte,

$$\begin{aligned} &\| \psi(1+it, i\tau; A, B)x \|_X \leq \\ &\leq \int_0^\infty \int_0^\infty | \Phi(1+it, i\tau; \lambda, \mu) | MN(1+\lambda)^{-1}(1+\mu)^{-1} \| x \|_X d\lambda d\mu \leq \\ &\leq \int_0^\infty \int_0^\infty | \Phi(1+it, i\tau; \lambda, \mu) | MN(1+\mu)^{-1} \| x \|_X d\lambda d\mu \leq MN \| x \|_X, \end{aligned}$$

in base alla disuguaglianza (VI). Perciò,

$$\| \psi(1+it, i\tau; A, B) \|_{X \rightarrow D(A)} \leq (M+1)N + MN = (2M+1)N.$$

Si può allora stabilire la

PROPOSIZIONE 9. $\forall t, \tau \in \mathbf{R}$ l'operatore $\psi(1+it, i\tau; A, B)$ è lineare continuo da X a $D(A)$ con norma

$$\| \psi(1+it, i\tau; A, B) \|_{X \rightarrow D(A)} \leq (2M+1)N.$$

Seguendo le medesime linee di ragionamento, si prova la

PROPOSIZIONE 10. $\forall t, \tau \in \mathbf{R}$ l'operatore $\psi(it, 1+i\tau; A, B)$ è lineare continuo da X a $D(B)$ con norma

$$\| \psi(it, 1+i\tau; A, B) \|_{X \rightarrow D(B)} \leq (2N+1)M.$$

Si può allora provare il seguente

TEOREMA 16. Sia $0 < \theta + \rho < 1$, $0 < \theta$, $\rho < 1$. Allora l'operatore $\psi(\theta, \rho; A, B)$ è continuo da X a $[X, D(A), D(B)]_{\theta, \rho}$ e

$$\|\psi(\theta, \rho; A, B)\|_{X \rightarrow [X, D(A), D(B)]_{\theta, \rho}} \leq MN \left(\frac{2M+1}{M} \right)^{\theta} \left(\frac{2N+1}{N} \right)^{\rho}.$$

DIMOSTRAZIONE. La funzione $\psi(z, w; A, B)$ soddisfa, per le assunzioni fatte inizialmente, tutte le condizioni per poter applicare il Teorema 2; infatti, con la notazione usata in quel teorema,

$$\psi(z, w; A, B) = H(z, w).$$

Di qui, $\psi(\theta, \rho; A, B)$ è limitato da $[X, X, X]_{\theta, \rho} = X$ a $[X, D(A), D(B)]_{\theta, \rho}$, in base alle Proposizioni 8 - 9 - 10.

Inoltre, sempre per il Teorema 2,

$$\begin{aligned} \|\psi(\theta, \rho; A, B)\|_{X \rightarrow [X, D(A), D(B)]_{\theta, \rho}} &\leq (MN)^{1-\theta-\rho} N^{\theta} (2N+1)^{\rho} (2M+1)^{\theta} M^{\rho} = \\ &= M^{1-\theta} N^{1-\rho} (2M+1)^{\theta} (2N+1)^{\rho} = MN \left(\frac{2M+1}{M} \right)^{\theta} \left(\frac{2N+1}{N} \right)^{\rho}. \end{aligned}$$

Ora sfruttiamo l'ipotesi che $(\lambda + A)^{-1}$ e $(\mu + B)^{-1}$ sono commutativi per $\mu, \lambda > 0$.

Supponiamo $x \in D(A)$. Vale:

$$\begin{aligned} A(\lambda + A)^{-1}(\mu + B)^{-1}x &= (I - \lambda(\lambda + A)^{-1})(\mu + B)^{-1}x = \\ &= (\mu + B)^{-1}x - \lambda(\lambda + A)^{-1}(\mu + B)^{-1}x = \\ &= (\mu + B)^{-1}x - \lambda(\mu + B)^{-1}(\lambda + A)^{-1}x = (\mu + B)^{-1}(I - \lambda(\lambda + A)^{-1})x = \\ &= (\mu + B)^{-1}A(\lambda + A)^{-1}x = (\mu + B)^{-1}(\lambda + A)^{-1}Ax. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$w \in D(B) \Rightarrow B(\lambda + A)^{-1}(\mu + B)^{-1}w = (\lambda + A)^{-1}(\mu + B)^{-1}Bw.$$

Supponiamo che $x \in D(A)$, $z \in D(A^*)$ e poniamo $y = \psi(it, i\tau; A, B)x$.

Allora:

$$\begin{aligned}\langle y, A^*z \rangle &= \int_0^\infty \int_0^\infty \Phi(it, i\tau; \lambda, \mu) \langle A(\lambda + A)^{-1}(\mu + B)^{-1}x, z \rangle d\lambda d\mu = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \Phi(it, i\tau; \lambda, \mu) \langle (\mu + B)^{-1}(\lambda + A)^{-1}Ax, z \rangle d\lambda d\mu.\end{aligned}$$

Quindi,

$$\begin{aligned}|\langle y, A^*z \rangle| &\leq \int_0^\infty \int_0^\infty |\Phi(it, i\tau; \lambda, \mu)| M(\lambda + 1)^{-1}N(\mu + 1)^{-1} \|Ax\|_X \\ &\quad \|z\|_{X'} d\lambda d\mu \leq MN \|Ax\|_X \|z\|_{X'},\end{aligned}$$

per la (V). Dunque,

$$\|Ay\|_X = \sup_{f \in X'} \frac{|\langle Ay, f \rangle|}{\|f\|_{X'}} = \sup_{z \in D(A^*)} \frac{|\langle y, A^*z \rangle|}{\|z\|_{X'}} \leq MN \|Ax\|_X.$$

D'altra parte,

$$\|y\|_X = \left\| \int_0^\infty \int_0^\infty \Phi(it, i\tau; \lambda, \mu) (\lambda + A)^{-1}(\mu + B)^{-1}x d\lambda d\mu \right\|_X \leq MN \|x\|_X.$$

Così $y \in D(A)$ e

$$\begin{aligned}\|\psi(it, i\tau; A, B)x\|_{D(A)} &= \|\psi(it, i\tau; A, B)x\|_X + \\ &+ \|A\psi(it, i\tau; A, B)x\|_X \leq MN \|x\|_X + MN \|Ax\|_X = MN \|x\|_{D(A)}.\end{aligned}$$

Pertanto,

PROPOSIZIONE 11. $\forall t, \tau \in \mathbf{R}$, $\psi(it, i\tau, A, B)$ è un operatore lineare e continuo da $D(A)$ in sè e vale

$$\|\psi(it, i\tau; A, B)\|_{D(A) \rightarrow D(A)} \leq MN.$$

Supponiamo $x \in D(B)$, $z \in D(B^*)$ e poniamo $w = \psi(it, i\tau; A, B)x$. Allora,

$$\begin{aligned} \langle w, B^*z \rangle &= \int_0^\infty \int_0^\infty \Phi(it, i\tau; \lambda, \mu) \langle B(\mu+B)^{-1}(\lambda+A)^{-1}x, z \rangle d\lambda d\mu = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \Phi(it, i\tau; \lambda, \mu) \langle (\lambda+A)^{-1}(\mu+B)^{-1}Bx, z \rangle d\lambda d\mu, \end{aligned}$$

perchè $(\lambda+A)^{-1}$ e $(\mu+B)^{-1}$ sono commutativi. Di qui,

$$\begin{aligned} |\langle w, B^*z \rangle| &\leq \\ &\leq \int_0^\infty \int_0^\infty |\Phi(it, i\tau; \lambda, \mu)| MN(1+\lambda)^{-1}(1+\mu)^{-1} \|Bx\|_X \|z\|_{X'} d\lambda d\mu \leq \\ &\leq MN \|Bx\|_X \|z\|_{X'}. \end{aligned}$$

Quindi,

$$\|Bw\|_X = \sup_{f \in X'} \frac{|\langle Bw, f \rangle|}{\|f\|_{X'}} = \sup_{z \in D(B^*)} \frac{|\langle w, B^*z \rangle|}{\|z\|_{X'}} \leq MN \|Bx\|_X.$$

Poichè, per la (V), $\|w\|_X \leq MN \|x\|_X$, si è provato che

$$\psi(it, i\tau; A, B)x \in D(B) \text{ e } \|\psi(it, i\tau; A, B)x\|_{D(B)} \leq MN \|x\|_{D(B)}.$$

Ne segue la

PROPOSIZIONE 12. $\forall t, \tau \in \mathbf{R}$, $\psi(it, i\tau; A, B)$ è un operatore lineare continuo da $D(B)$ in sè e

$$\|\psi(it, i\tau; A, B)\|_{D(B) \rightarrow D(B)} \leq MN.$$

TEOREMA 17. Se $0 < \theta, \rho, \theta_0, \rho_0 < 1$, $0 < \theta + \rho + \theta_0 + \rho_0 < 1$, allora $\psi(\theta, \rho; A, B)$ è un operatore lineare continuo da $[X, D(A), D(B)]_0$

a $[X, D(A), D(B)]_{\theta+\theta_0, \rho+\rho_0}$ e

$$(i) \quad \|\psi(\theta, \rho; A, B)\|_{[X, D(A), D(B)]_{\theta_0, \rho_0}} \rightarrow [X, D(A), D(B)]_{\theta+\theta_0, \rho+\rho_0} \leq \\ \leq MN \left(\frac{2M+1}{M} \right)^{\theta} \left(\frac{2N+1}{N} \right)^{\rho}.$$

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dalle Proposizioni 8 - 12, in base al Teorema 12. Quanto alla valutazione (i), essa è conseguenza di

$$(MN)^{1-\theta-\theta_0-\rho-\rho_0} (MN)^{\theta_0} (MN)^{\rho_0} (N(2M+1))^{\theta} (M(2N+1))^{\rho} = \\ = MN \left(\frac{2M+1}{M} \right)^{\theta} \left(\frac{2N+1}{N} \right)^{\rho}.$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] CALDERÓN, A. P.: *Intermediate spaces and interpolation. The complex method*, Studia Math. 24, pp. 113-190, 1964.
- [2] CALDERÓN, A. P.: *Intermediate spaces and interpolation*, Studia Math., Special Series 1, pp. 31-34, 1963.
- [3] DUNFORD, N. - SCHWARTZ, J. T.: *Linear operators*, Part 1, (Interscience) 1967.
- [4] FAVINI, A.: *Alcuni risultati sulla interpolazione non lineare*, Boll. U.M.I., 1971.
- [5] HILLE, E. - PHILLIPS, R. S.: *Functional analysis and semigroups*, A.M.S. Coll. Pubbl. 31, 1957.
- [6] KATO, T.: *Perturbation theory for linear operator*, Springer, 1966.
- [7] KREIN, S. G. - PETUNIN, YU. I.: *Scales of Banach Spaces*, Russian Math. Surveys 21, pp. 85-159, 1966.
- [8] LIONS, J. L.: *Une construction d'espaces d'interpolations*, C.R.A.S., Paris 251, pp. 1853-1855, 1961.
- [9] SCHECHTER, M.: *Complex interpolation*, Compositio Math. 18, pp. 117-147, 1967.
- [10] SCHECHTER, M.: *On L^p -estimates and regularity I*, Ann. of Math. 85, pp. 1-13, 1963.

- [11] STEIN, E. M.: *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton, 1970.
- [12] YOSHIKAWA, A.: *Sur la théorie d'espaces d'interpolation - les espaces de moyenne de plusieurs espaces de Banach*, Journal Fac. Science, Univ. Tokyo 16, pp. 407-468, 1970.

Manoscritto pervenuto in redazione il 18 gennaio 1972.