

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIULIANO BRATTI

**Caratterizzazione dei polinomi di convoluzione in
una variabile a decrescenza rapida, a coefficienti
costanti, che hanno soluzioni quasi periodiche
per ogni termine noto quasi periodico**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 47 (1972), p. 219-225

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1972__47__219_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CARATTERIZZAZIONE DEI POLINOMI DI CONVOLUZIONE
IN UNA VARIABILE A DECRESCENZA RAPIDA,
A COEFFICIENTI COSTANTI,
CHE HANNO SOLUZIONI QUASI PERIODICHE
PER OGNI TERMINE NOTO QUASI PERIODICO

GIULIANO BRATTI *)

§ 1. Si utilizzeranno le notazioni abituali della Teoria delle Distribuzioni, [4]. Sia $P(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a^\alpha x^\alpha$ un polinomio in n variabili a coefficienti complessi; $P_i(x)$ sia il polinomio così ottenuto da $P(x)$: $P_i(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a^\alpha i^{|\alpha|} x^\alpha$. Se A è una distribuzione a decrescenza rapida, [4], pag. 244, $P(A) = \sum_{|\alpha| \leq m} a^\alpha (D^\alpha A)$ si dirà il polinomio di convoluzione, in una variabile a decrescenza rapida, associato a $P(x)$.

Oggetto di questo lavoro è di caratterizzare i polinomi $P(A)$ al fine che: per ogni distribuzione quasi periodica T , [4], pag. 206, ($T \in \mathcal{B}'_{q.p.}$), l'equazione di convoluzione $P(A) * S = T$ abbia almeno una soluzione $S \in \mathcal{B}'_{q.p.}$.

Nel § 2 si otterrà il seguente teorema:

A): $a)$ l'equazione $P(A) * S = T$ ha una soluzione $S \in \mathcal{B}'_{q.p.}$, per ogni $T \in \mathcal{B}'_{q.p.}$;

$b)$ $P_i(x)$ non è mai nullo in $\mathbf{R}_n$; $1/\mathcal{F}(A)(x) \in \mathcal{O}_M^{-1}$; $a)$ e $b)$ sono proposizioni equivalenti.

Il teorema A) sarà ottenuto come combinazione dei seguenti teoremi B) e C):

B): $a_1)$ l'equazione $P(\delta) * S = T$ ha una soluzione $S \in \mathcal{B}'_{q.p.}$, per ogni $T \in \mathcal{B}'_{q.p.}$;

$b_1)$ l'equazione $P(\delta) * S = \delta$ ha una soluzione $S \in \mathcal{D}'_L$;

*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, 35100 Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca del C.N.R.

¹⁾ $\mathcal{F}(A)(x)$ indica la trasformata di Fourier di A ; $\mathcal{O}_M$ lo spazio delle funzioni $\mathcal{C}^\infty$ che sono operatori di moltiplicazione, [4], pag. 243.

$c_1)$ L'equazione $P(\delta) * S = \varphi$ ha una soluzione $S \in \mathcal{S}$, per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$;

$d_1)$ $P_i(x)$ non ha zeri reali;

$a_1), b_1), c_1)$ e $d_1)$ sono proposizioni equivalenti.

C): $a_2)$ se $A \in \mathcal{O}'_c$, (A distribuzione a decrescenza rapida), l'equazione $A * S = T$ ha una soluzione $S \in \mathcal{B}'_{q,p}$, per ogni $T \in \mathcal{B}'_{q,p}$;

$b_2)$ $F(A)(x)$ non ha zeri in $\mathbf{R}_n$, $1/\mathcal{F}(A)(x) \in \mathcal{O}_M$;

$a_2)$ e $b_2)$ sono proposizioni equivalenti.

Per la dimostrazione dei teoremi B) e C) si farà uso essenziale di:

1) dell'eguaglianza di Parseval estesa alle funzioni quasi periodiche, [3], pag. 36 (se $f(x)$ è quasi periodica e le $A_n \in \mathbf{C}$ sono i suoi coefficienti di Fourier si ha: $\sum_n |A_n|^2 = M(|f(x)|^2)$ ²⁾);

2) del teorema XXVI di [4], pag. 203 (se $S \in \mathcal{D}'_l{}^p$ e $T \in \mathcal{D}'_l{}^q$, $1/p + 1/q - 1 \geq 0$ si può dare un senso al prodotto di convoluzione $S * T$; allora $S * T \in \mathcal{D}'_l{}^r$, $1/r = 1/p + 1/q - 1$; l'applicazione $(S, T) \rightarrow S * T$ di $\mathcal{D}'_l{}^p \times \mathcal{D}'_l{}^q$ in $\mathcal{D}'_l{}^r$ è continua);

3) del teorema XV di [4], pag. 268 (La trasformata di Fourier $\mathcal{F}$ e la reciproca $\mathcal{F}$ stabiliscono due isomorfismi reciproci fra $\mathcal{O}_M$ e $\mathcal{O}'_c$ scambiando il prodotto di moltiplicazione ed il prodotto di convoluzione);

4) del teorema 3.6 di [6], pag. 233 (dire che il polinomio $P(x)$ non è mai nullo su $\mathbf{R}_n$ è equivalente a dire che $P(D)$ ha un'unica soluzione fondamentale temperata).

§ 2. Del teorema B) si dà la seguente dimostrazione « circolare » in quattro parti: $d_1) \Rightarrow c_1) \Rightarrow b_1) \Rightarrow a_1) \Rightarrow d_1)$.

$d_1) \Rightarrow c_1)$: per le ipotesi di $d_1)$, tenuto presente 4) di § 1, $1/P_i(x) \in \mathcal{O}_M$ sicchè per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$, $\varphi/P_i \in \mathcal{S}$. Allora $\mathcal{F}[\mathcal{F}(\varphi)/P_i]$ è la soluzione in $\mathcal{S}$ dell'equazione $P(\delta) * S = \varphi$.

²⁾ Se $g(x)$ è quasi periodica $M\{g(x)\} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx =$ valor medio di $g(x)$.

$c_1) \Rightarrow b_1)$: poichè esiste $\varphi \in \mathcal{S}$ con $\mathcal{F}(\varphi)$ mai nulla, applicando F all'equazione $P(D)S = \varphi$ si vede che $P_i(x)$ non ha zeri reali. Si ha $1/P_i(x) \in \mathcal{O}_M$ e $\overline{\mathcal{F}}(1/P_i) \in \mathcal{O}'_C$; che $\overline{\mathcal{F}}(1/P_i)$ sia soluzione fondamentale dell'equazione $P(D)S = \delta$ è subito visto applicando $\mathcal{F}$ all'equazione come pure si vede subito, regolarizzando $\overline{\mathcal{F}}(1/P_i)$ con $\alpha(x) \in \mathcal{D}$, che $\overline{\mathcal{F}}(1/P_i) \in \mathcal{D}'_{L^1}(\mathcal{O}'_C \subseteq \mathcal{D}'^p)$.

$b_1) \Rightarrow a_1)$: se l'equazione $P(D)S = \delta$ ha una soluzione $S \in \mathcal{D}'_{L^1}$ e se $T \in \mathcal{B}'_{q.p.}$, $S * T$ è la soluzione in $\mathcal{B}'_{q.p.}$ di $P(D)S = T$, (per 2 di § 1); si ha, inoltre, $\{\tau_h(S * T)\}_{h \in \mathbf{R}_n} = \{S * (\tau_h T)\}_{h \in \mathbf{R}_n}$ sicchè $S * T$ che è in $\mathcal{B}'$ è anche in $\mathcal{B}'_{q.p.}$.

$a_1) \Rightarrow d_1)$: $P_i(x)$ abbia uno zero in $\Lambda \in \mathbf{R}_n$. Si consideri l'equazione $P(D)S = e^{i\langle \Lambda, x \rangle}$. Se $S \in \mathcal{B}'_{q.p.}$ è una soluzione, per [4], pag. 207, (VI, 9; 2), $a_\Lambda(S) \int e^{-i\langle \Lambda, x \rangle} P(\delta) = 1 = a_\Lambda(S) P_i(\Lambda)^3$. Ciò implica $P_i(\Lambda) \neq 0$

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA C). $b_2) \Rightarrow a_2)$: se $1/F(A)(x) \in \mathcal{O}_M$ e $T \in \mathcal{B}'_{q.p.}$, $F(T)/F(A) \in \mathcal{S}'$. Allora $\overline{F}[F(T)/F(A)]$ è soluzione in $\mathcal{B}'_{q.p.}$ di $A * S = T$ poichè

$$T = \overline{\mathcal{F}}[\mathcal{F}(T)] = \overline{\mathcal{F}}[\mathcal{F}(A)\mathcal{F}(T)/\mathcal{F}(A)] = A * \overline{\mathcal{F}}[\mathcal{F}(T)/\mathcal{F}(A)]$$

(per 3 di § 1), e se $\alpha(x) \in \mathcal{D}$

$$\overline{\mathcal{F}}[\mathcal{F}(T)/\mathcal{F}(A)] * \alpha = \overline{\mathcal{F}}[\mathcal{F}(T)/\mathcal{F}(\alpha)/\mathcal{F}(A)] = T * \overline{\mathcal{F}}[\mathcal{F}(\alpha)/\mathcal{F}(A)]$$

quasi periodica poichè $\overline{\mathcal{F}}[\mathcal{F}(\alpha)/\mathcal{F}(A)] \in \mathcal{S}$.

$a_2) \Rightarrow b_2)$: che $\mathcal{F}(A)(x)$ non abbia zeri in $\mathbf{R}_n$ si vede come nella dimostrazione di $a_1) \Rightarrow d_1)$ del teorema B) sempre ricordando che $A \in \mathcal{D}'_{L^1}$, se $A \in \mathcal{O}'_C$ e che $\int e^{-i\langle \Lambda, x \rangle} A = \mathcal{F}(A)(\Lambda)$. Dimostriamo che se $\varphi(x) \in \mathcal{S}$ $\varphi(x)[D^p 1/\mathcal{F}(A)(x)]$ è limitata in $\mathbf{R}_n$, qualunque sia p multindice, non appena è vera $a_2)$.

³⁾ $a_\Lambda(S) = \Lambda$ -coefficiente di Fourier di $S = M\{e^{-i\langle \Lambda, x \rangle} S\}$.

Se $T \in \mathcal{D}'_{L^1}$, $e^{-i\langle \Lambda, x \rangle} T \in \mathcal{D}'_{L^1}$. Si ha: $\int e^{-i\langle \Lambda, x \rangle} T = \mathcal{F}[e^{-i\langle \Lambda, x \rangle} T](\xi)$ calcolata per $\xi = 0$. Ma $\mathcal{F}[e^{-i\langle \Lambda, x \rangle} T] = \mathcal{F}[T](\xi + \Lambda)$ da cui la conclusione della ³⁾ come pure quella della prima parte di $a_2) \Rightarrow b_2)$.

Si supponga che esista $\varphi \in \mathcal{S}$ tale che su una successione $\Lambda_k \in \mathbf{R}_n$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} |\varphi(\Lambda_k)/\mathcal{F}(A)(\Lambda_k)| = +\infty$ con, senza che vi siano restrizioni, $|\Lambda_k| \geq k$. Poichè F è un automorfismo di $\mathcal{S}$, esiste $\psi \in \mathcal{S}$ con $F(\psi) = |x|^2 \varphi(x)$; sia $f(x)$ la funzione quasi periodica così determinata:

$$f(x) = \sum_1^\infty \frac{1}{k^2} e^{-i(\Lambda_k \cdot x)},$$

e sia $S \in \mathcal{B}'_{q.p.}$ la soluzione di $A * S = f$. Allora la funzione quasi periodica $S * \psi$ è soluzione dell'equazione $A * S = f * \psi$ sicchè, per (VI, 9; 9) di [4], pag. 208, $a_{\Lambda_n}(S * \psi) = a_{\Lambda_n}(f * \psi)/\mathcal{F}(A)(\Lambda_n)$. La valutazione di $a_{\Lambda_n}(f * \psi)$ dà: poichè la serie

$$\sum_1^{+\infty} \frac{1}{n^2} e^{i(\Lambda_n \cdot x - t)} \psi(t)$$

converge uniformemente per $t \in \mathbf{R}_n$ verso la $f(x-t)\psi(t)$, ($\psi(t) \in \mathcal{S}$),

$$\int f(x-t)\psi(t)dt = \sum_1^{+\infty} \frac{1}{n^2} e^{i(\Lambda_n \cdot x)} \int e^{-i(\Lambda_n \cdot x)} \psi(t)dt = \sum_1^{+\infty} \frac{1}{n^2} |\Lambda_n|^2 \varphi(\Lambda_n) e^{i(\Lambda_n \cdot x)}$$

da cui $a_{\Lambda_n}(f * \psi) = |\Lambda_n|^2 \varphi(\Lambda_n) / n^2$. Poichè è $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_{\Lambda_n}(S * \psi)|^2 = +\infty$ dovrebbe essere $\sum_1^\infty |a_{\Lambda_n}(S * \psi)|^2 = +\infty$ contro 1) del § 1. Analogamente risulta assurdo supporre che esista una successione $\Lambda_k \in \mathbf{R}_n$ con $\lim_{k \rightarrow +\infty} |\Lambda_k| = +\infty$ e che $\lim_{k \rightarrow +\infty} |\varphi(\Lambda_k)/\mathcal{F}(A)(\Lambda_k)| = q \neq 0$. Poichè deve essere $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_{\Lambda_n}(S * \psi)| = 0$ se ne deduce che su qualsiasi successione $\Lambda_k \in \mathbf{R}_n$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} |\varphi(\Lambda_k)/\mathcal{F}(A)(\Lambda_k)| = 0$, se $\lim_{k \rightarrow +\infty} |\Lambda_k| = +\infty$.

Ciò implica $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} |\varphi(x)/\mathcal{F}(A)(x)| = 0$. Per vedere che $\varphi(x)[D^p 1/\mathcal{F}(A)(x)]$ è limitata in $\mathbf{R}_n$, poichè al denominatore compare una potenza di $\mathcal{F}(A)(x)$ e al numeratore una funzione di $\mathcal{S}$, è sufficiente verificare che se $A * S = T$ soddisfa $a_2)$ del teorema C), anche l'equazione $(A * \dots * A) * S = T$ soddisfa $a)$ di C). Infatti, poichè $(A * \dots * A)$ è in $\mathcal{O}'_c$, [4], pag. 270, $\mathcal{F}(A * \dots * A) = F(A)^n$, se n è il numero delle convoluzioni su A ; allora, con la stessa tecnica precedente, $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} |\varphi(x)/\mathcal{F}(A)^n(x)| = 0$, $\varphi(x) \in \mathcal{S}$, n intero positivo. Limitiamoci all'equazione $(A * A) * S = T$: è sufficiente risolvere l'equazione $A * U = S_0$ con $S_0 \in \mathcal{B}'_{q.p.}$ e $A * S_0 = T$.

Il teorema C) è completamente dimostrato.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA A). Questa dimostrazione è immediata. Infatti: l'equazione $P(A) * S = T$ è equivalente al sistema $\{P(D)S = T; A * S = T\}$ nel senso che se l'equazione $P(A) * S = T$ ha soluzioni $S \in \mathcal{B}'_{q.p.}$ per ogni $T \in \mathcal{B}'_{q.p.}$, allora anche le equazioni $P(D)S = T$ $A * S = T$ hanno la stessa proprietà. Si ha: l'equazione $P(A) * S = T$, $T \in \mathcal{B}'_{q.p.}$, ha come soluzione $H \in \mathcal{B}'_{q.p.}$ se $A * S_0 = T$ e $P(D)H = S_0$. Viceversa: se $P(A) * S = T$ è $A * P(S) = T$ e $P(D)(A * S) = T$ con, evidentemente, $P(S) \in \mathcal{B}'_{q.p.}$, [4], pag. 206, e, poichè $A \in \mathcal{O}'_C \subseteq \mathcal{D}'_{L^1}$, $A * S \in \mathcal{B}'_{q.p.}$, [4], pag. 206, se $S \in \mathcal{B}'_{q.p.}$.

OSSERVAZIONE 1. Sia $\mathcal{B}_{q.p.} = \{f: \mathbf{R}_n \rightarrow C, f \in C^\infty, f \text{ quasi periodico assieme ad ogni sua derivata}\}$. Nelle ipotesi del teorema A) è facile verificare che se S è la soluzione quasi periodica dell'equazione $P(A) * S = T$, $T \in \mathcal{B}_{q.p.}$, allora anche $S \in \mathcal{B}_{q.p.}$.

OSSERVAZIONE 2. Si può generalizzare il teorema C) notando che se si cercano soluzioni in $\mathcal{B}'_{q.p.}$ dell'equazione $A * S = T$, A , al massimo, può stare in $\mathcal{D}'_{L^1}$, 2, § 1. Si ottiene:

C'): $a'_2)$ $A \in \mathcal{D}'_{L^1}$; l'equazione $A * S = T$ ha una soluzione $S \in \mathcal{B}'_{q.p.}$, per ogni $T \in \mathcal{B}'_{q.p.}$;

$b'_2)$ $\mathcal{F}(A)(x) \neq 0$, $x \in \mathbf{R}_n$; esiste $g(x) \in L^2$, $g(x) \neq 0$, $x \in \mathbf{R}_n$, continua con $\mathcal{F}(A)(x)g(x) \in \mathcal{O}_M$ e $1/\mathcal{F}(A)(x)g(x) \in \mathcal{O}_M$; $a'_2)$ e $b'_2)$ sono proposizioni equivalenti.

Si osserva come il teorema C) rientri in C'): se $A \in \mathcal{O}'_C$ e $1/\mathcal{F}(A)(x) \in \mathcal{O}_M$ è sufficiente scegliere $g(x) = (1 + |x|^2)^{-m}$, $m \in \mathbf{N}$.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA C'). $a'_2) \Rightarrow b'_2)$. Necessariamente $\mathcal{F}(A)(x) \neq 0$, $x \in \mathbf{R}_n$. Come nella dimostrazione di C), se $\varphi(x) \in \mathcal{S}$, $\varphi(x)/\mathcal{F}(A)(x)$ è limitata in $\mathbf{R}_n$; ciò implica $\overline{\mathcal{F}}(1/\mathcal{F}(A)(x)) \in \mathcal{D}'_{L^1}$ poichè se $\alpha(x) \in \mathcal{D}$, $\overline{\mathcal{F}}[1/\mathcal{F}(A)(x)] * \alpha = \overline{\mathcal{F}}[\mathcal{F}(\alpha)(x)/\mathcal{F}(A)(x)]$ e la funzione in parentesi è una funzione continua a decrescenza rapida, (perciò in L^2). Risulta, allora, $1/\mathcal{F}(A)(x) = P(x)g(x)$ con $g(x) \in L^2$. Ricordando 4) di § 1 l'implicazione è dimostrata.

$b'_2) \Rightarrow a'_2)$. Poichè $\mathcal{F}$ è isomorfismo su L^2 esiste $h(x) \in L^2$ con $\mathcal{F}(g(x)) = h(x)$. $\mathcal{D}'_{L^1}$ è chiuso sotto la convoluzione; $A * h \in \mathcal{D}'_{L^1}$, $(h(x) \in$

$\in \mathfrak{D}'_{L^1}$). Posto $B = A * h$ l'equazione $B * S = T$ è sempre risolubile in $\mathfrak{B}'_{q.p.}$ quando $T \in \mathfrak{B}'_{q.p.}$, (basta applicare il teorema C) visto che $\mathfrak{F}(B) = \mathfrak{F}(A)g \in \mathcal{O}_M$ come pure $1/\mathfrak{F}(B)$).

Allora, per risolvere l'equazione $A * S = T$ in $\mathfrak{B}'_{q.p.}$, $T \in \mathfrak{B}'_{q.p.}$, è sufficiente risolvere l'equazione $B * U = T$ e porre $S = h * U^4$.

OSSERVAZIONE 3. Il teorema C) ed il C') si possono enunciare così:

C): $A \in \mathcal{O}'_C$; l'equazione $A * S = T$ ha sempre soluzioni $S \in \mathfrak{B}'_{q.p.}$, per ogni $T \in \mathfrak{B}'_{q.p.}$, se e solo se esiste $B \in \mathcal{O}'_C$ con $A * B = \delta$;

C'): $A \in \mathfrak{D}'_{L^1}$; analogamente a C) di sopra con $B \in \mathfrak{D}'_{L^1}$.

C) è ovvio; per C') si ha: $\overline{\mathfrak{F}}[\mathfrak{F}(A)g] * \overline{\mathfrak{F}}[1/\mathfrak{F}(A)g] = \delta$ da cui:

$$(A * h) * \overline{\mathfrak{F}}[1/\mathfrak{F}(A)g] = \delta = A * (h * \overline{\mathfrak{F}}[1/\mathfrak{F}(A)g]).$$

Che C') sia un'effettiva generalizzazione di C) si vede, limitandosi al caso di una variabile, prendendo come $A \in \mathfrak{D}'_{L^1}$, l'antiimmagine $\overline{\mathfrak{F}}$ di una primitiva, $F(x)$, conveniente, di una primitiva della funzione

$$f(x) = \{1, x \leq 0; x + 1, 0 \leq x \leq 1; -x + 3; 1 \leq x \leq 2; 1, x \geq 2\};$$

se $A = \overline{\mathfrak{F}}(F(x))$, $A * \alpha$, $\alpha \in \mathfrak{D}$, è in L^1 ; che $A \notin \mathcal{O}'_C$ si ha dal fatto che $\mathfrak{F}(A) \notin \mathcal{O}_M$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] AMERIO, L., PROUSE, G.: *Almost periodic functions and functional equations*, D. Van Nostrand Reinhold, 1971.
- [2] BRATTI, G.: *Sulle distribuzioni vettoriali di una variabile debolmente quasi periodiche*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 1970.
- [3] FAVARD, J.: *Leçons sur les fonctions presque-periodiques*, Gautier-Villars, 1933.
- [4] SCHWARTZ, L.: *Théorie des distributions*, Hermann, 1966.

⁴) È facile verificare che $(A * h) * U = A * (h * U)$.

- [5] HÖRMANDER, L.: *Linear partial differential operators*, Springer-Verlag, 1963.
- [6] TREVES, F.: *Linear partial differential equations with constant coefficient*, Gordon and Breach, 1966.

Manoscritto pervenuto in redazione l'11 gennaio 1972 e in forma revisionata il 20 marzo 1972.