

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

SANTUZZA BALDASSARRI GHEZZO

**Risoluzione di moduli su domini d'integrità
noetheriani con proprietà di estensione**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 47 (1972), p. 155-165

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1972__47__155_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1972__47__155_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

RISOLUZIONE DI MODULI
SU DOMINI D'INTEGRITÀ NOETHERIANI
CON PROPRIETÀ DI ESTENSIONE

SANTUZZA BALDASSARRI GHEZZO *)

In una precedente nota [2] ho dimostrato (parte II teor. 3), che una condizione necessaria e sufficiente affinché un dominio d'integrità noetheriano soddisfi alla proprietà di estensione (v. def. qui al n. 1), è che ogni suo ideale generato da 2 elementi e libero fuori di un ideale d'altezza >1 , abbia dimensione omologica ≤ 1 .

In questa nota dimostro che *su un dominio noetheriano A soddisfacente alla proprietà di estensione, ogni A -modulo privo di torsione, di rango r e generato da $r+1$ elementi, che sia libero fuori di un ideale d'altezza >1 , (v. def. al n. 2), ha dimensione omologica ≤ 1 , anzi ammette una risoluzione libera di lunghezza ≤ 1 .*

Questo teorema, mediante trasformazione funtoriale, si traduce (n. 9), in una proprietà di fasci algebrici coerenti, privi di torsione e liberi fuori di un chiuso ammissibile di uno schema affine $(X, \mathcal{O}_X)$ noetheriano, integro, con proprietà di estensione. Precisamente, *se un siffatto fascio $\mathcal{F}$ ha rango r ed ammette un epimorfismo $\mathcal{O}_X^{r+1} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$, questo ha nucleo libero.*

1. Indichiamo con A un dominio noetheriano, cioè un anello commutativo con $1 \neq 0$, privo di divisori dello zero e soddisfacente alla condizione delle catene ascendenti; con A_S il corpo delle frazioni di A , e con A_p l'anello locale $(A - p)^{-1}A$ delle frazioni di A con denominatore fuori di un ideale primo p di A .

*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica Applicata, Università, Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca matematici del C.N.R.

Per ogni elemento σ di A_S sia I^σ il conduttore $A : \sigma$ di A in $A[\sigma]$, cioè l'ideale degli elementi a di A tali che $a\sigma \in A$. Se $\sigma \in I_p^\sigma = I^\sigma \otimes_A A_p$, diciamo che σ è definito su p , e se σ è definito sopra ogni ideale primo p che non contiene un dato ideale Q di A , diciamo che σ è definito fuori di Q ([2], nn. 2, 3). Se in A_S gli elementi definiti fuori di un ideale d'altezza maggiore di 1 sono soltanto gli elementi di A , diciamo che A *soddisfa alla proprietà di estensione* ($A \in P.E.$); quindi $A \in P.E.$ se per ogni ideale Q di A di altezza maggiore di 1 risulta $\bigcap_{p \not\supset Q} A_p = A$, l'intersezione essendo fatta in A_S per tutti gli ideali primi p di A che non contengono Q ([2], prop. 2).

2. Sia M un modulo di tipo finito, privo di torsione e di rango r , sul dominio noetheriano A , ed M_S lo spazio vettoriale $(A-0)^{-1}M$ delle frazioni di M con denominatore in $A-0$.

Se $M_p = M \otimes_A A_p$ è il modulo delle frazioni di M con denominatore in $A-p$, e Q è un ideale di A , $\bigcap_{p \not\supset Q} M_p$ in M_S risulta un modulo sull'anello $\bigcap_{p \not\supset Q} A_p$.

Diremo che M è *libero fuori di Q* se esiste un isomorfismo di $\bigcap_{p \not\supset Q} A_p$ -moduli.

$$\bigcap_{p \not\supset Q} A_p^r \cong \bigcap_{p \not\supset Q} M_p$$

il quale, per ogni $p \not\supset Q$, si estenda ad un A_p -isomorfismo di A_p^r su M_p .

3. Sia A un dominio noetheriano soddisfacente alla proprietà di estensione, ed M un A -modulo privo di torsione, di rango r , generato da $r+1$ elementi e libero fuori di un ideale Q di A di altezza maggiore di 1.

Poichè $A \in P.E.$, $\bigcap_{p \not\supset Q} A_p = A$ ed $\bigcap_{p \not\supset Q} A_p^r = A^r$, dunque $\bigcap_{p \not\supset Q} M_p$ è un A -modulo isomorfo ad A^r .

Se $m_1, m_2, \dots, m_{r+1}$ sono i generatori di M su A , ed $f_1, f_2, \dots, f_r$ i generatori liberi di $\bigcap_{p \not\supset Q} M_p$ su $\bigcap_{p \not\supset Q} A_p = A$, allora essendo $M \subset \bigcap_{p \not\supset Q} M_p$,

sono univocamente determinati gli $a_{ij} \in A$ tali che sia

$$(1.3) \quad m_i = \sum_{j=1}^r a_{ij} f_j \quad i=1, \dots, r+1.$$

Indicheremo con $[a_{ij}]$ la matrice su A di tipo $(r+1) \times r$ formata con le a_{ij} , e con $[a_{ij}]_s^\wedge$, ($s=1, 2, \dots, r+1$), le submatrici quadrate della $[a_{ij}]$ ottenute sopprimendo la s -esima riga. Inoltre i minori d'ordine r della $[a_{ij}]$ s'indicheranno con

$$\alpha_s = \det [a_{ij}]_s^\wedge \quad (s=1, 2, \dots, r+1).$$

4. LEMMA 1. *Nelle ipotesi e con le notazioni del n. 3, per ogni $p \nmid Q$, qualche minore d'ordine r della matrice $[a_{ij}]$ non appartiene a p .*

Infatti per ogni $p \nmid Q$ esistono in A degli $a_k \notin p$ e b_{ki} , $k=1, 2, \dots, r$, $i=1, 2, \dots, r+1$, tali che

$$(1.4) \quad a_k f_k = \sum_{i=1}^{r+1} b_{ki} m_i \quad k=1, 2, \dots, r;$$

quindi, per le (1.3),

$$a_k f_k = \sum_{i=1}^{r+1} b_{ki} \sum_{j=1}^r a_{ij} f_j = \sum_{j=1}^r f_j \sum_{i=1}^{r+1} b_{ki} a_{ij} \quad k=1, 2, \dots, r,$$

da cui, per la libertà degli f_j su A , si deduce che valgono in A le r^2 relazioni:

$$(2.4) \quad \sum_{i=1}^{r+1} b_{ki} a_{ij} = \begin{cases} a_k \notin p & \text{per } k=j \text{ (} j=1, 2, \dots, r \text{);} \\ 0 & \text{per } k \neq j \text{ (} k=1, 2, \dots, r \text{)} \end{cases}$$

Le (2.4) esprimono che il prodotto delle due matrici su A $[b_{ki}]$ e $[a_{ij}]$ è una matrice diagonale di tipo $r \times r$ il cui determinante non appartiene all'ideale primo p di A :

$$(3.4) \quad \det [[b_{ki}] \times [a_{ij}]] = \prod_{k=1}^r a_k \notin p.$$

D'altra parte se β_s ($s=1, 2, \dots, r+1$), sono i determinanti delle submatrici quadrate che si ottengono da $[b_{ki}]$ sopprimendo la s -esima colonna, per la formula di Binét-Cauchy (vale la dimostrazione data in [5] per le matrici sopra un corpo), è:

$$(4.4) \quad \det [[b_{ki}] \times [a_{ij}]] = \sum_{s=1}^{r+1} \beta_s \alpha_s.$$

Da (3.4) e (4.4) si deduce, come volevasi, che qualcuno degli $\alpha_s \notin p$; in particolare qualcuno di essi non è nullo, sia

$$\alpha_{r+1} = \det [a_{ij}]_{r+1} \neq 0.$$

5. Consideriamo ancora i minori $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r+1}$ d'ordine r della matrice $[a_{ij}]$, ed osserviamo che se $[a_{ij}]_{\widehat{s}, r+1}$ sono le matrici che si ottengono dalla $[a_{ij}]_{r+1}$ sostituendo agli elementi a_{sj} della s -esima riga, gli a_{r+1j} della $(r+1)$ -esima di $[a_{ij}]$, risulta:

$$(1.5) \quad \det [a_{ij}]_{\widehat{s}, r+1} = (-1)^{r-s} \det [a_{ij}]_{\widehat{s}} = (-1)^{r-s} \alpha_s.$$

LEMMA 2. *Nelle ipotesi e con le notazioni del n. 3, se M non è libero, il sistema delle r equazioni*

$$(2.5) \quad x_s \alpha_{r+1} + x_{r+1} (-1)^{r-s} \alpha_s = 0 \quad s=1, 2, \dots, r,$$

ammette soluzioni proprie in A^{r+1} .

Infatti siano A ed M come al n. 3, e sia

$$(3.5) \quad 0 \rightarrow N_c(\varphi) \rightarrow A^{r+1} \xrightarrow{\varphi} M \rightarrow 0$$

la sequenza esatta canonica per M , dove $N_c(\varphi)$ è lo A -modulo di rango 1 costituito dalle $(r+1)$ -ple $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r+1})$ di elementi di A che verificano la relazione

$$\sum_{i=1}^{r+1} \lambda_i m_i = 0$$

e quindi, per (1.3), anche la seguente

$$\sum_{i=1}^{r+1} \lambda_i \sum_{j=1}^r a_{ij} f_j = \sum_{j=1}^r f_j \sum_{i=1}^{r+1} \lambda_i a_{ij} = 0.$$

Dunque, se M non è libero, esistono $(r+1)$ -ple $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r+1})$, costituite da elementi non tutti nulli di A , per le quali, poichè $f_1, f_2, \dots, f_r$ sono liberi su A , risultano vere le relazioni seguenti:

$$\sum_{i=1}^{r+1} \lambda_i a_{ij} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, r;$$

cioè risulta, in termini di matrici,

$$(4.5) \quad [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r+1}] \times [a_{ij}] = 0.$$

Supponiamo, come detto alla fine del numero precedente, che sia $\alpha_{r+1} = \det [a_{ij}]_{r+1} \neq 0$ e scriviamo la (4.5), (col prodotto delle matrici per blocchi), come segue

$$(5.5) \quad [\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_r] \times [a_{ij}]_{r+1} + \lambda_{r+1} \times [a_{(r+1)1} a_{(r+1)2} \dots a_{(r+1)r}] = 0.$$

Siano α_{sj} ($j=1, 2, \dots, r$) i cofattori degli elementi della s -esima riga della matrice $[a_{ij}]_{r+1}$ e moltiplichiamo a destra il primo membro della (5.5) per

$$\begin{bmatrix} \alpha_{s1} \\ \alpha_{s2} \\ \vdots \\ \alpha_{sr} \end{bmatrix} = {}^t[\alpha_{s1} \alpha_{s2} \dots \alpha_{sr}];$$

abbiamo allora

$$(6.5) \quad [\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_r] \times [a_{ij}]_{r+1} \times {}^t[\alpha_{s1} \alpha_{s2} \dots \alpha_{sr}] + \\ + \lambda_{r+1} \times [a_{(r+1)1} a_{(r+1)2} \dots a_{(r+1)r}] \times {}^t[\alpha_{s1} \alpha_{s2} \dots \alpha_{sr}] = 0$$

il cui primo membro è una matrice ad un solo elemento, e precisamente

$$\lambda_s \det [a_{ij}]_{r+1}^{\wedge} + \lambda_{r+1}(a_{(r+1)1}\alpha_{s1} + a_{(r+1)2}\alpha_{s2} + \dots + a_{(r+1)r}\alpha_{sr}).$$

Allora poichè

$$a_{(r+1)1}\alpha_{s1} + a_{(r+1)2}\alpha_{s2} + \dots + a_{(r+1)r}\alpha_{sr} = \det [a_{ij}]_{s, r+1}^{\wedge} = (-1)^{r-s} \det [a_{ij}]_s^{\wedge}$$

la (6.5) può scriversi

$$\lambda_s \det [a_{ij}]_{r+1}^{\wedge} + \lambda_{r+1}(-1)^{r-s} \det [a_{ij}]_s^{\wedge} = 0.$$

Applicando il procedimento esposto qui sopra, successivamente per $s=1, 2, \dots, r$, si vede dunque che le componenti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r+1}$ degli elementi di $N_c(\varphi)$ verificano le relazioni

$$(7.5) \quad \lambda_s \alpha_{r+1} + \lambda_{r+1}(-1)^{r-s} \alpha_s = 0 \quad s=1, 2, \dots, r;$$

cioè gli elementi $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r+1})$ di $N_c(\varphi) \neq \{0\}$ sono le soluzioni del sistema (2.5), e il lemma è dimostrato.

6. LEMMA 3. *Sempre nelle ipotesi e con le notazioni del n. 3, l'A-modulo $N_c(\varphi)$ che compare nella (3.5) è isomorfo all'ideale intersezione dei conduttori di A in $A \left[\frac{\alpha_s}{\alpha_{r+1}} \right]$ per $s=1, 2, \dots, r$.*

Infatti osserviamo che nella (3.5) $N_c(\varphi)$ è isomorfo come A-modulo ad $\alpha_{r+1}N_c(\varphi)$, e gli elementi di quest'ultimo, per le (7.5) risultano del tipo

$$(1.6) \quad \alpha_{r+1}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r+1}) = \\ = \lambda_{r+1}((-1)^r \alpha_1, (-1)^{r-1} \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}, -\alpha_r, \alpha_{r+1})$$

per quei λ_{r+1} di A tali che, (7.5), in A_s risulti

$$\lambda_{r+1} \frac{(-1)^{r-s-1} \alpha_s}{\alpha_{r+1}} \in A \quad \text{per ogni } s=1, 2, \dots, r;$$

cioè, (n. 1), posto $\sigma_s = \frac{\alpha_s}{\alpha_{r+1}} \in A_s$, $\lambda_{r+1} \in I^{\sigma_s} = A$: σ_s , per ogni $s=1, 2, \dots, r$.

Quindi i λ_{r+1} della (1.6) sono gli elementi dell'ideale

$$(2.6) \quad I = I^{\sigma_1} \cap I^{\sigma_2} \cap \dots \cap I^{\sigma_r}$$

cioè gli elementi a di A tali che $a\sigma_s \in A$ per ogni $s=1, 2, \dots, r$ ed I non è vuoto perchè $\alpha_{r+1} \in I$ in quanto ogni σ_s ammette, per definizione, una rappresentazione con denominatore uguale ad α_{r+1} .

Si può dunque affermare che nella sequenza (3.5) $N_c(\varphi) \cong I$.

7. Sia $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ un sistema di generatori dell'ideale I definito al n. precedente, allora ogni $\sigma_s = \frac{\alpha_s}{\alpha_{r+1}}$ ($s=1, 2, \dots, r$) ammette le rappresentazioni

$$(1.7) \quad \frac{f_{s_1}}{q_1} = \frac{f_{s_2}}{q_2} = \dots = \frac{f_{s_n}}{q_n}.$$

Osserviamo inoltre che se è:

$$(2.7) \quad \alpha_{r+1} = a_1 q_1 + \dots + a_n q_n,$$

poichè, per le (1.7), valgono le n relazioni:

$$\begin{aligned} \alpha_s q_1 &= \alpha_{r+1} f_{s_1} \\ \alpha_s q_2 &= \alpha_{r+1} f_{s_2} \\ &\dots \dots \dots \\ \alpha_s q_n &= \alpha_{r+1} f_{s_n}, \end{aligned}$$

moltiplicando i due membri di ciascuna di queste, rispettivamente per $a_1, a_2, \dots, a_n$ e sommando membro a membro, si deduce che è

$$(3.7) \quad \alpha_s = a_1 f_{s_1} + a_2 f_{s_2} + \dots + a_n f_{s_n},$$

cioè se vale la (2.7), allora per ogni $s=1, 2, \dots, r$, esiste una n -pla $f_{s_1}, f_{s_2}, \dots, f_{s_n}$ di elementi di A tali che valga la (3.7).

Dimostriamo ora il seguente

LEMMA 4. *Sia A un dominio noetheriano soddisfacente alla proprietà di estensione, ed M un A -modulo privo di torsione, di rango r ,*

generato da $r+1$ elementi e libero fuori d'un ideale Q di A di altezza maggiore di 1, allora nella sequenza esatta canonica

$$0 \rightarrow N_c(\varphi) \rightarrow A^{r+1} \xrightarrow{\varphi} M \rightarrow 0$$

anche $N_c(\varphi)$ è libero almeno fuori di Q .

Per il lemma 3 del n. 6 basta dimostrare che è libero fuori di Q l'ideale I definito dalla (2.6). Allo scopo osserviamo che, per il lemma 1 del n. 4 per ogni $p \not\supset Q$, qualcuno dei minori α_s della matrice $[a_{ij}]$ definita dalle (1.3), non appartiene a p . Allora, poichè $\alpha_{r+1} \in I$, per gli ideali primi $p \not\supset Q$ per i quali è $\alpha_{r+1} \notin p$ si ha $I_p = IA_p = A_p$; per gli altri ideali primi $p \not\supset Q$, se è $\alpha_s \notin p$ ($s \leq r$), allora per la (3.7) qualche $f_{s_i} \notin p$ e quindi, (2.7), è:

$$\begin{aligned} I_p &= \alpha_s I_p = \alpha_s (A_p q_1 + A_p q_2 + \dots + A_p q_n) = \\ &= \alpha_{r+1} (A_p f_{s_1} + A_p f_{s_2} + \dots + A_p f_{s_n}) = \alpha_{r+1} A_p. \end{aligned}$$

Considerata allora una decomposizione in A di α_{r+1} in fattori irriducibili, sia α il prodotto di quei fattori di α_{r+1} che appartengono a qualche $p \not\supset Q$, sarà $I_p = A_p \alpha$ per ogni $p \not\supset Q$ e quindi $\alpha \in \bigcap_{p \not\supset Q} I_p$ anche se $\alpha \notin I$, e lo A -isomorfismo $1 \rightarrow \alpha$ di A in $\bigcap_{p \not\supset Q} I_p$ è suriettivo perchè $\bigcap_{p \not\supset Q} I_p$ è l'insieme degli elementi a di A tali che, per ogni $p \not\supset Q$, esiste un $m_p \notin p$ per cui $\frac{am_p}{m_p} \in I_p$ e allora, poichè α genera ciascun I_p su A_p , sarà $a = \frac{am_p}{m_p} = \frac{r_p}{s_p} \alpha$, da cui in A_S , $\rho = \frac{r_p}{s_p} \in \bigcap_{p \not\supset Q} A_p = A$, perciò $(a \in \bigcap_{p \not\supset Q} I_p) \Rightarrow (a \in A\alpha)$, e $\bigcap_{p \not\supset Q} I_p = A\alpha$, quindi I è libero fuori di Q , c.v.

8. Possiamo ora dimostrare il seguente

TEOREMA 1. *Se A è un dominio noetheriano soddisfacente alla proprietà di estensione, ogni A -modulo privo di torsione, di rango r , generato da $r+1$ elementi e libero fuori d'un ideale d'altezza maggiore di 1 ammette una risoluzione libera di lunghezza minore o eguale ad 1.*

Infatti consideriamo ancora la sequenza esatta (3.5)

$$0 \rightarrow N_c(\varphi) \xrightarrow{i} A^{r+1} \xrightarrow{\varphi} M \rightarrow 0,$$

per i lemmi 3 (n. 6) e 4 (n. 7), esiste un isomorfismo ε di $N_c(\varphi)$ su un ideale I di A libero fuori d'un ideale Q d'altezza maggiore di 1, sia τ l'isomorfismo $\bigcap_{p \supset Q} I_p \rightarrow A$. Allora ([2], n. 10, teor. 1), esiste un monomorfismo ψ di A in A^{r+1} che rende commutativo il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} & I & \\ \varepsilon \swarrow & & \searrow \tau/I \\ N_c(\varphi) & & A \\ & \searrow i & \swarrow \psi \\ & A^{r+1} & \end{array}$$

Inoltre posto $\delta = (\tau/I) \cdot \varepsilon$, si ha il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 0 & & \\ & & & & \downarrow & & \\ & 0 & & 0 & \longrightarrow & N_c(\chi) & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \longrightarrow & N_c(\varphi) & \xrightarrow{i} & A^{r+1} & \xrightarrow{\varphi} & M & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow \delta & & \downarrow 1_{A^{r+1}} & & \downarrow \chi & \\ 0 \longrightarrow & A & \xrightarrow{\psi} & A^{r+1} & \xrightarrow{\psi'} & C_n(\psi) & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \\ & C_n(\delta) & \longrightarrow & 0 & & & \\ & \downarrow & & & & & \\ & 0 & & & & & \end{array}$$

dove χ è tale che $\chi \cdot \varphi = \psi'$, come in [2], n. 11, teor. 2, e se ne deduce anche qui l'esistenza dell'isomorfismo $\gamma: N_c(\chi) \rightarrow C_n(\delta)$, che permette di concludere, poichè $C_n(\delta)$ è di rango 0 ed M è privo di torsione ([3], III (4.2.8) e (4.4.8)), che $N_c(\varphi) \cong A$; dunque per M esiste la sequenza esatta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i \cdot \delta^{-1}} A^{r+1} \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow 0,$$

c.v.d.

9. Consideriamo ora uno schema affine noetheriano $(X, 0_X)$, il cui anello A sia un dominio d'integrità soddisfacente alla proprietà di estensione, e sia $\mathcal{F}$ un 0_X -modulo coerente e privo di torsione.

Ricordiamo che, poichè $\mathcal{F}$ è coerente, esiste un A -modulo M di tipo finito il cui fascio associato $\tilde{M}$ è isomorfo ad $\mathcal{F}$ ([6], 1, (1.5.1)), ed il funtore covariante $\Gamma: \mathcal{F} \mapsto \Gamma(X, \mathcal{F})$ è esatto ([6], 1, (1.3.11)) ed ammette il funtore esatto $M \mapsto \tilde{M}$ come quasi-inverso. Inoltre poichè $\mathcal{F}$ è anche privo di torsione ed $(X, 0_X)$ risulta integro, è definito il rango di $\mathcal{F}$ ed è finito e uguale al rango dell' A -modulo $\Gamma(X, \mathcal{F})$, ([6], 1, (8.4.2), (8.1.5)). Osserviamo infine che nello spazio topologico $X = \text{Spec}(A)$, (topologia di Zariski), ogni aperto quasi-compatto $D(Q) = X - V(Q)$, (dove Q è un ideale di A e quindi finitamente generato), è costituito dagli ideali primi p di A che non contengono Q . Se Q è di altezza maggiore di 1, diciamo che $D(Q)$, è ammissibile.

Premesso ciò, è subito visto che il teorema 1 del n. precedente è equivalente al seguente

TEOREMA 2. *Sia $(X, 0_X)$ uno schema affine noetheriano il cui anello A sia un dominio d'integrità soddisfacente alla proprietà di estensione, ed $\mathcal{F}$ un 0_X -modulo coerente privo di torsione.*

Allora se è $\mathcal{F}/D(Q) \cong 0_X^r/D(Q)$ su di un aperto ammissibile, ed esiste un epimorfismo $0_X^{r+1} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$ di 0_X -moduli, questo ha nucleo libero.

Infatti, nelle nostre ipotesi $M = \Gamma(X, \mathcal{F})$ è un A -modulo che soddisfa alle condizioni del teorema 1, dunque per $\mathcal{F} \cong \tilde{M}$ è vero il teorema 2.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BALDASSARRI, M.: Osservazioni sulla struttura dei fasci lisci, Atti del Conv. Internaz. di Geom. Alg. di Torino (1961).
- [2] BALDASSARRI GHEZZO, S.: Proprietà di ideali in domini d'integrità noetheriani, Rend. del Seminario Mat. della Univ. di Padova, Cedam (1970).
- [3] BALDASSARRI GHEZZO, S., MARGAGLIO, C., MILLEVOI, T.: Introduzione ai metodi della geometria algebrica, C.N.R., Monografie Mat., Ed. Cremonese, Roma (1967).
- [4] BOURBAKI, N.: Algèbre commutative, Chap. 1 e 2, Hermann, Paris (1961).

- [5] GANTMACHER, F. R.: *Théorie des matrices*, Dunod, Paris (1966).
- [6] GROTHENDIECK, A., DIEUDONNÉ, J. A.: *Eléments de Géométrie Algébrique I*, Springer-Verlag, Berlin (1971).

Manoscritto pervenuto in redazione il 10 novembre 1971.