RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

HERMAN HEINEKEN

Über gewisse perfekte supplementierbare Subnormalteiler

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 46 (1971), p. 417-420

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1971__46__417_0>

ÜBER GEWISSE PERFEKTE SUPPLEMENTIERBARE SUBNORMALTEILER

HERMAN HEINEKEN

Herrn Professor Wilhelm Specht zum 65. Geburtstag gewidmet.

Unter den Subnormalteilern einer endlichen Gruppe spielen diejenigen eine ausgezeichnete Rolle, die perfekt sind und nur einen maximalen Normalteiler besitzen: Sie sind mit allen Subnormalteilern der Gruppe vertauschbar und liegen im Normalisator ihrer Konjugierten, s. Wielandt [Satz 20 Seite 225]). Die Möglichkeiten der subnormalen Einbettung perfekter Gruppen mit nur einem maximalen Normalteiler werden jedoch noch viel stärker eingeschränkt, wenn zusätzlich die Existenz gewisser Supplemente verlangt wird. Es ergibt sich

SATZ. Sei S ein perfekter Subnormalteiler der endlichen Gruppe G und sei M der einzige maximale Normalteiler von S. Sei U eine Untergruppe von G mit der Eigenschaft

$$US = G \neq UM.$$

Dann gilt: $[G : N(S)]$ ist Teiler von 2.

BEMERKUNG. Der Verfasser dankt Professor H. Wielandt für die Anregung zu dem jetzt vorliegenden Satz. Die ursprüngliche Fassung des Satzes bezog sich auf Komplemente von S.

BEWEIS DES SATZES. Sei R zu S konjugiert in G und von S verschieden, und sei L der einzige maximale Normalteiler von R. Die Subnormalteiler R und S sind Normalteiler in $\{R, S\} = RS$; ebenso sind die

*) Indirizzo dell'A.: Mathematisches Institut der Universität, 8520 Erlangen, Bismarckstr. $1^1/^2$, Rep. Federale Tedesca.

charakteristischen Untergruppen M und L von S bzw. R schon Normalteiler von RS. Wir betrachten die Elementenmenge $D = UL \cap S$. Seien x, y zwei Elemente aus D. Dann gibt es Elemente x' und y' aus L so daß xx' und yy' Elemente von U sind. Daher ist auch

$$(xx')(yy')^{-1} = xx'(y')^{-1}y^{-1} = (xy^{-1})y(x'y'^{-1})y^{-1}$$

ein Element aus U. Da $x'y'^{-1}$ und $y(x'y'^{-1})y^{-1}$ Elemente von L sind, so ergibt sich

$$xy^{-1} \in UL \cap S = D,$$

und wir erhalten:

(*) D ist eine Untergruppe von S.

Sei jetzt x ein Element aus D und z ein Element aus S. Wegen $US = UR = G$ existiert zu z ein Element z^* aus R mit $zz^* \in U$; außerdem existiert ein x' mit $xx' \in U$ und $x' \in L$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}(zz^*)^{-1}(xx')(zz^*) &= z^{*-1}z^{-1}xzz^*z^{*-1}z^{-1}x'zz^* \\ &= z^{-1}xz(z^{-1}xz \circ z^*)(z^{*-1}z^{-1}x'zz^*).\end{aligned}$$

Hierbei ist

$$z^{-1}xz \in S$$

$$(z^{-1}xz \circ z^*) = (z^{-1}xz)^{-1}z^{*-1}(z^{-1}xz)z^* \in R \cap S \subseteq L,$$

$$z^{*-1}z^{-1}x'zz^* \in L.$$

Da die linke Seite der obigen Gleichung ein Element von U ist, erhalten wir $z^{-1}xz \in S \cap UL = D$, und es folgt

(*) D ist ein Normalteiler von S.

Sei $D = S$. Dann folgt $S \subseteq UL$ und $G = US \subseteq U(UL) = UL \subseteq G$. Da jedoch L und M ebenso wie R und S unter U konjugiert sind, ergibt sich daraus $UM = G$, im Widerspruch zu den Voraussetzungen. Daraus folgt

$$(**) \qquad D = UL \cap S \subseteq M \text{ und } ULM \cap S = (UL \cap S)M = M.$$

Sei T ein weiterer Subnormalteiler, der zu S konjugiert ist. Da $US = UT = G$, gibt es zu jedem s aus S ein Element t aus T sodaß $st \in U$. Seien a und b zwei Elemente aus S, die so gewählt sind, daß ihr Kommutator $a \circ b$ nicht in M liegt. Sei a' aus R so gewählt, daß $aa' \in U$, und sei b^* aus T so gewählt daß $bb^* \in U$. Dann ist $(aa') \circ (bb^*)$ ein Element aus U, und wir erhalten

$$\begin{aligned}(aa') \circ (bb^*) &= ((aa') \circ b^*)b^{*-1}((aa') \circ b)b^* \\ &= a'^{-1}(a \circ b^*)a'(a' \circ b^*)b^{*-1}a'^{-1}(a \circ b)a'b^*b^{*-1}(a' \circ b)b^*.\end{aligned}$$

Der Kommutator aus U ist damit dargestellt als Produkt von vier (Konjugierten von) Kommutatoren, von denen drei im Normalteiler ML von RST liegen. Nur der Faktor

$$b^{*-1}a'^{-1}(a \circ b)a'b^*$$

liegt in S und nicht in M. Durch Umordnung erhalten wir

$$b^{*-1}a'^{-1}(a \circ b)a'b^* \in ULM \cap S = M,$$

und dies ist ein Widerspruch. Es gibt also höchstens zwei zu S in G konjugierte Subnormalteiler, und das war zu zeigen.

Die Voraussetzung $UM \neq G$ ist in dem vorliegenden Satz unentbehrlich. Dies zeigt das nun folgende Beispiel.

Beispiel 1. Seien U, V, W drei zu einer gegebenen einfachen perfekten Gruppe Y isomorphe Gruppen. Sei p eine Primzahl, die nicht Teiler von $\circ(Y)$ ist; und sei Z_p eine zyklische Gruppe der Ordnung p.

Wir bilden das Kranzprodukt $L = Z_p \sim (U \otimes V \otimes W)$. Sei K der Kern dieses Kranzprodukts (der maximale elementarabelsche Normalteiler in diesem Fall). L ist dann zerfallende Erweiterung von K durch eine zu $U \otimes V \otimes W$ isomorphe Gruppe Q. Es gibt einen Automorphismus σ von L, der die Ordnung 3 hat und die Untergruppe Q invariant läßt aber die drei direkten Faktoren von Q untereinander vertauscht. Wir erweitern L durch eine zyklische Gruppe $\{z\}$ der Ordunug 3 und verlangen $z^{-1}tz = t^{\sigma}$ für alle t aus L. Diese neue Gruppe $G = \{z, L\}$ besitzt drei untereinander konjugierte Subnormalteiler U^*K, V^*K, W^*K, wobei U^*, V^*, W^* die Untergruppen aus Q sind, die U, V, W, entsprechen. Es ist leicht zu sehen, dass $C(U^*) \cap K$ ein Normalteiler von L ist. Daher ist $M = (C(U^*) \cap K)(C(V^*) \cap K)(C(W^*) \cap K)$ ein Normalteiler von G. Mit dem Satz von Maschke läßt sich zeigen, daß die Subnormalteiler U^*K/M, V^*K/M, W^*K/M nur einen maximalen Normalteiler besitzen, nämlich K/M, außerdem sind sie in G/M untereinander konjugiert. Sie werden von $\{z, QM\}/M$ supplementiert. Es sind also alle Voraussetzungen des Satzes erfüllt außer der Nichtsupplementierung von dem maximalen Normalteiler des Subnormalteiler: $\{z, QM\}/M$ komplementiert K/M.

Zum Abschluss geben wir ein Beispiel dafür, daß der Normalisator $N(S)$ in der Situation des Satzes von G verschieden sein kann, daß also S kein Normalteiler zu sein braucht.

BEISPIEL 2. Sei N das direkte Produkt einer einfachen perfekten Gruppe mit sich selbst und sei τ der die beiden Komponenten vertauschende Automorphismus von N. Sei G die zerfallende Erweiterung von N durch eine Gruppe $\{t\}$ der Ordnung 2 mit der Eigenschaft $t^{-1}xt = x^{\tau}$ für alle x aus N. Der Zentralisator $C(t)$ komplementiert die beiden direkten Faktoren von N, die konjugiert und subnormal in G sind.

LITERATUR

WIELANDT, H.: *Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen*, Math. Zeitschrift *45*, 209-244 (1939).

Manoscritto pervenuto in redazione il 16 settembre 1971.