

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIULIANO BRATTI

**Regolarizzazione delle distribuzioni funtoriali, di  
una variabile, quasi periodiche, mediante funzioni  
funtoriali, e loro approssimazioni**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 46 (1971), p. 397-404

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1971\\_\\_46\\_\\_397\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1971__46__397_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

REGOLARIZZAZIONE DELLE DISTRIBUZIONI FUNTORIALI,  
DI UNA VARIABILE, QUASI PERIODICHE, MEDIANTE  
FUNZIONI FUNTORIALI, E LORO APPROSSIMAZIONI

GIULIANO BRATTI \*)

§ 1. In questo lavoro si ottiene il seguente *teorema di densità*: sia  $\mathcal{LB}$  la categoria degli spazi di Banach sui reali  $R$  e  $F: \mathcal{LB} \rightarrow \mathcal{LB}$  sia un *funtore covariante*. Se  ${}_b\{\varepsilon_{\mathcal{D}_{L^1}} \rightarrow F\}_{\text{q.p.}}$  è lo spazio delle distribuzioni *funtoriali quasi periodiche a valori in  $F$* , [1], e se si indica lo spazio delle loro *regolarizzate* (def. 2, § 2) mediante funzioni  $\mathcal{C}^\infty$  a supporto compatto con  ${}_b\{\varepsilon_{\mathcal{D}_{L^1}} \rightarrow F\}^* \mathcal{D}$ , si ha:

$$\{\varepsilon_{\mathcal{D}_{L^1}} \rightarrow F\}_{\text{q.p.}} = \{ {}_b\{\varepsilon_{\mathcal{D}_{L^1}} \rightarrow F\}_{\text{q.p.}} * \mathcal{D} \}^-$$

dove la chiusura è in  ${}_b\{\varepsilon_{\mathcal{D}_{L^1}} \rightarrow F\}$ .

Il teorema di sopra estende, alle distribuzioni *funtoriali quasi periodiche*, il teorema di pag. 391 di [2].

I simboli usati sono quelli di [4].

§ 2. In tutto il seguito è fondamentale la definizione di *funzione funtoriale* data da N. Popa in [5].  $\Sigma R_x$  sia la somma diretta topologica, con la topologia usuale della somma diretta, [3], pag. 121, di copie di  $R$ , indicata su  $R$  stesso. Una base per  $\Sigma R_x$  è data dagli elementi:

$$(z_u)_{u \in R}^x, \quad z_u = 0 \text{ se } u \neq x, \quad z_u = 1 \text{ se } u = x.$$

---

\*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico Università - Via Belzoni, 3 - 35100 Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

LEMMA 1.  $\forall h \in \mathbb{R}$ ,  $\tau_h : \Sigma R_x \rightarrow \Sigma R_x$ ,  $\langle \tau_h \cdot (z_u)_{u \in \mathbb{R}}^x \rangle = (z_u)_{u \in \mathbb{R}}^{x+h}$ , è continua.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione è immediata non appena si tenga presente il risultato di [3], pag. 121.

DEF. 1. Se  $F : \Omega B \rightarrow \Omega B$  è un funtore covariante e  $f \in {}_b\{\varepsilon_{\Sigma R_x} \rightarrow F\}$  è una funzione funtoriale di variabile reale a valori nel funtore  $F$ ,  $f$  si dice quasi periodica se  $(\tau_h f)_{h \in \mathbb{R}}$  è relativamente compatto in  ${}_b\{\varepsilon_{\Sigma R_x} \rightarrow F\}$ .

$[(\tau_h f)^E : \Sigma R_x \widehat{\otimes}_\varepsilon E \rightarrow F(E)$ ,  $E$ -componente di  $\tau_h f$ , è il prolungamento per continuità di  $\chi_h(f^E) : \Sigma R_x \otimes_\varepsilon E \rightarrow F(E)$ ,

$$\langle \chi_h(f^E) \cdot (z_u)_{u \in \mathbb{R}}^x \otimes e \rangle = \langle f^E \cdot (z_u)_{u \in \mathbb{R}}^{x+h} \otimes e \rangle.$$

Che  $\chi_h(f^E)$  sia continua si ha dal fatto che  $\chi_h(f^E) = f^E \circ (\tau_h \otimes_\varepsilon 1_E)$ ;  $[\Sigma R_x \varepsilon E = \Sigma R_x \widehat{\otimes}_\varepsilon E^1]$ .

Sia  $\varphi(x) \in \mathfrak{D}$ ,  $\mathfrak{D}$  il dominio delle distribuzioni scalari reali.

LEMMA 2. a)  $\forall T \in {}_b\{\varepsilon_{\mathfrak{D}_{L^1}} \rightarrow F\}$  e  $\forall E \in \mathcal{O}b(\Omega B)$ ,

$$(T \tilde{*} \varphi)^E : \Sigma R_x \otimes_\varepsilon E \rightarrow F(E),$$

$$\langle (T \tilde{*} \varphi)^E \cdot (z_u)_{u \in \mathbb{R}}^x \otimes e \rangle = \langle T_t^E \cdot \varphi(x-t) \otimes e \rangle,$$

è una mappa lineare e continua;

b) la mappa

$$(* \varphi) : {}_b\{\varepsilon_{\mathfrak{D}_{L^1}} \rightarrow F\} \rightarrow {}_b\{\varepsilon_{\Sigma R_x} \rightarrow F\}, \langle (* \varphi) \cdot T \rangle = T * \varphi,$$

dove  $T * \varphi$  è il morfismo la cui  $E$ -componente è il prolungamento per continuità di  $(T \tilde{*} \varphi)^E$  a tutto  $\Sigma R_x \widehat{\otimes}_\varepsilon E$ , è lineare e continua.

DIMOSTRAZIONE. a) la linearità di  $(T \tilde{*} \varphi)^E$  è ovvia; per dimostrare la sua continuità, sia  $i_\varphi : \Sigma R_x \rightarrow \mathfrak{D}_{L^1}(t)$  la mappa così definita:

---

<sup>1)</sup>  $\Sigma R_x$  ha la proprietà della approssimazione.

$$\langle i_\varphi \cdot \sum_1^n y_i(z_u)^{x_i} \rangle = \sum_1^n y_i \varphi(x_i - t).$$

Se  $I_x : R_x \rightarrow \Sigma R_x$  è l'iniezione canonica,  $i_\varphi \circ I_x : R_x \rightarrow \mathfrak{D}_{L^1}(t)$  è continua poichè se  $y_n \rightarrow y_0$  in  $R_x$ ,  $y_n \varphi(x-t)$  converge a  $y_0 \varphi(x-t)$  in  $\mathfrak{D}_{L^1}(t)$ . Segue, [3], pag. 122, che  $i_\varphi$  è continua. Allora è continua anche  $(T \tilde{*} \varphi)^E$  poichè:

$$(T \tilde{*} \varphi)^E = T_t^E \circ (i_\varphi \otimes_\varepsilon 1_E).$$

Che  $T * \varphi$  sia un morfismo functoriale di  $\varepsilon_{\Sigma R_x}$  in  $F$  si vede così: se

$$\begin{aligned} \alpha \in \text{Hom}_b(E_1; E_2), \langle F(\alpha) \circ (T \tilde{*} \varphi)^{E_1} \cdot (z_u)_{u \in R}^x \otimes e \rangle &= \\ = \langle F(\alpha) \cdot \langle T_t^{E_1} \cdot \varphi(x-t) \otimes e \rangle \rangle &= \\ = \langle T_t^{E_2} \cdot \varphi(x-t) \otimes \alpha(e) \rangle = \langle (T \tilde{*} \varphi)^{E_2} \cdot (z_u)_{u \in R}^x \otimes \alpha(e) \rangle &= \\ = \langle (T \tilde{*} \varphi)^{E_2} \circ 1_{\Sigma R_x} \otimes_\varepsilon \alpha \cdot (z_u)_{u \in R}^x \otimes e \rangle. \end{aligned}$$

Allora, mantenendosi la commutatività del diagramma nel prolungamento per continuità,

$$F(\alpha) \circ (T * \varphi)^{E_1} = (T * \varphi)^{E_2} \circ (1_{\Sigma R_x} \widehat{\otimes}_\varepsilon \alpha).$$

b)  $(* \varphi)$  è mappa lineare; che sia continua si ha da: sia

$$(* \varphi)^E : \text{Hom}_b(\mathfrak{D}_{L^1} \widehat{\otimes}_\varepsilon E; F(E)) \rightarrow \text{Hom}_b(\Sigma R_x \widehat{\otimes}_\varepsilon F(E))$$

la mappa così definita:

$$\langle (* \varphi)^E \cdot T \rangle = (T * \varphi)^E,$$

$E$ -componente del morfismo  $T * \varphi$ .

Se  $L$  è limitato in  $\Sigma R_x \widehat{\otimes}_\varepsilon E$ ,  $\langle i_\varphi \widehat{\otimes}_\varepsilon 1_E \cdot L \rangle = L_1$  è limitato in  $\mathfrak{D}_{L^1} \widehat{\otimes}_\varepsilon E$ ; sicchè, fissato  $\mathcal{O}\mathcal{L}(L, V)$  intorno di zero in  $\text{Hom}_b(\Sigma R_x \widehat{\otimes}_\varepsilon E; F(E))$ ,  $V$  intorno di zero in  $F(E)$ , si ha:

$$\langle (* \varphi) \cdot \mathcal{O}\mathcal{L}(L_1, V) \rangle \subseteq \mathcal{O}\mathcal{L}(L, V)$$

di facile verifica.

Il lemma è concluso.

Segue immediatamente:

**COROLLARIO.** Se  $T \in_b \{\varepsilon \mathfrak{D}_{L^1} \rightarrow F\}_{q.p.}$  e se  $\varphi(x) \in \mathfrak{D}$ ,  $T * \varphi$  è funzione funtoriale di variabile reale a valori nel funtore  $F$  quasi periodica secondo la definizione 1.

**DEF. 2.**  $\forall T \in_b \{\varepsilon \mathfrak{D}_{L^1} \rightarrow F\}$  e  $\forall \varphi(x) \in \mathfrak{D}$ ,  $T * \varphi$  si dice la funzione funtoriale di variabile reale a valori nel funtore  $F$  regolarizzata di  $T$  mediante  $\varphi(x)$ .

$\forall T * \varphi$ ,  $T \in_b \{\varepsilon \mathfrak{D}_{L^1} \rightarrow F\}_{q.p.}$ ,  $\varphi(x) \in \mathfrak{D}$ , si consideri la mappa lineare

$$\tilde{T}(\varphi)^E : \mathfrak{D}_{L^1} \otimes_\varepsilon E \rightarrow F(E),$$

$$\langle \tilde{T}(\varphi)^E \cdot \psi(x) \otimes e \rangle = \int_{\mathbb{R}} \langle T_t^E \cdot \varphi(x-t) \otimes e \rangle \psi(x) dx, \quad E \in \mathcal{O}b(\mathcal{L}B),$$

integrale forte in  $F(E)$ , [che l'integrazione abbia significato si vede dal fatto che  $\langle T_t^E \cdot \varphi(x-t) \otimes e \rangle$  è funzione, della variabile  $x$  continua e limitata di  $\mathbb{R}$  in  $F(E)$  e che  $\psi(x) \in \mathfrak{D}_{L^1}$ .

**LEMMA 3.**

$\tilde{T}(\varphi)^E : \mathfrak{D}_{L^1} \otimes_\varepsilon E \rightarrow F(E)$ ,  $\forall T \in_b \{\varepsilon \mathfrak{D}_{L^1} \rightarrow F\}_{q.p.}$ ,  $\forall \varphi(x) \in \mathfrak{D}$ ,  $\forall E \in \mathcal{O}b(\mathcal{L}B)$ ,

è lineare e continua.

**DIMOSTRAZIONE.** La linearità di  $\tilde{T}(\varphi)^E$  è, al solito, ovvia; per la continuità dimostriamo che è:

$$\int_{\mathbb{R}} \langle T_t^E \cdot \varphi(x-t) \otimes e \rangle \psi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \langle T_t^E \cdot \psi(x+t) \otimes e \rangle \varphi(x) dx.$$

Sia  $e \in E$  e  $\alpha \in F(E)'$ ; se  $T_t^E$  è la restrizione di  $T^E$  a  $\mathfrak{D}_{L^1} \widehat{\otimes}_\varepsilon (eR)$  e se  $i : \mathfrak{D}_{L^1} \widehat{\otimes}_\varepsilon (eR) \rightarrow \mathfrak{D}_{L^1}$  è l'isomorfismo canonico (suriiettivo), esiste

$\mathcal{M} \in (\mathfrak{D}_{L^1})'$  tale che  $\mathcal{M} \circ i = \alpha \circ T_j^E$ , sicchè: esiste  $f_j(x) \in \mathfrak{B}^2$ ) con:  $\alpha \circ T_j^E = \lim_j f_j(x) \circ i$  in  $(\mathfrak{D}_{L^1} \widehat{\otimes}_\epsilon (eR))'$ . Si ha come da [2], pag. 392,

$$\langle \alpha \circ T_{j_i}^E \cdot \varphi(x-t) \otimes e \rangle \psi(x) = \lim_j \langle f_j(t) \cdot \varphi(x-t) \rangle \psi(x)$$

uniformemente rispetto a  $x \in R$ .

Poichè  $\psi(x) \in \mathfrak{D}_{L^1}$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\bar{R}} \langle \alpha \circ T_{j_i}^E \cdot \varphi(x-t) \otimes e \rangle \psi(x) dx &= \lim_j \int_{\bar{R}} \langle f_j(t) \cdot \varphi(x-t) \rangle \psi(x) dx = \\ &= \lim_j \int_{\bar{R}} \langle f_j(t) \cdot \psi(x+t) \rangle \varphi(x) dx = \int_{\bar{R}} \langle \alpha \circ T_{j_i}^E \cdot \psi(x+t) \otimes e \rangle \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Il teorema di Hahn-Banach conclude la dimostrazione dell'affermazione di sopra.

Se  $A$  è limitato in  $\mathfrak{D}_{L^1} \otimes_\epsilon E$ ,  $\{ \sum_1^n \psi_i(x+t) \otimes e_i, \forall \sum_1^n \psi_i(t) \otimes e_i \in A, \forall x \in R \}$  è ancora limitato in  $\mathfrak{D}_{L^1} \otimes_\epsilon E$ ; da cui, se  $a \in A$ :

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\bar{R}} \langle \tilde{T}(\varphi)^E \cdot a \rangle dx \right\|_{F(E)} &= \left\| \int_{\bar{R}} \langle T_i^E \cdot \sum_1^n \psi_i(x+t) \otimes e_i \rangle \varphi(x) dx \right\|_{F(E)} \leq \\ &\leq \int_{\bar{R}} \left\| \langle T_i^E \cdot \sum_1^n \psi_i(x+t) \otimes e_i \rangle \right\| |\varphi(x)| dx \leq k \int_{\bar{R}} |\varphi(x)| dx \\ &\text{se } \left\| \langle T_i^E \cdot \sum_1^n \psi_i(x+t) \otimes e_i \rangle \right\|_{F(E)} \leq k. \end{aligned}$$

Poichè  $\mathfrak{D}_{L^1} \otimes_\epsilon E$  è metrico e da  $\tilde{T}(\varphi)^E$  ogni limitato è mappato in un limitato,  $\tilde{T}(\varphi)^E$  è continua.

Il lemma è concluso.

Indicato con  $T(\varphi)$  il morfismo funtoriale di  $\epsilon_{\mathfrak{D}_{L^1}}$  in  $F$  tale che:  $\forall E \in \mathcal{O}b(\mathcal{L}B)$ ,  $T(\varphi)^E$  è l'estensione per continuità a  $\mathfrak{D}_{L^1} \widehat{\otimes}_\epsilon E$  di  $\tilde{T}(\varphi)^E$  si ha:

---

<sup>2)</sup>  $\mathfrak{B}$  è lo spazio delle funzioni  $\mathcal{C}_\infty$  limitate con ogni loro derivata.

LEMMA 4.  $\forall T \in {}_b\{\varepsilon \mathfrak{D}_{L^1} \rightarrow F\}_{\text{q.p.}}$  e  $\forall \varphi(x) \in \mathfrak{D}$  detta  $T(\varphi)$  la distribuzione funtoriale di  $\varepsilon \mathfrak{D}_{L^1}$  in  $F$  canonicamente associata alla funzione funtoriale  $T * \varphi$ ,  $T(\varphi)$  è quasi periodica.

DIMOSTRAZIONE. Si consideri la rete  $\tau_{h_i} T(\varphi)$  in  ${}_b\{\varepsilon \mathfrak{D}_{L^1} \rightarrow F\}$ ; poiché  $T$  è quasi periodica la rete  $\tau_{h_i} T$  in  ${}_b\{\varepsilon \mathfrak{D}_{L^1} \rightarrow F\}$  ammette una sottorete,  $\tau_{h_{i_j}} T$  convergente a una  $Q$  quasi periodica in  ${}_b\{\varepsilon \mathfrak{D}_{L^1} \rightarrow F\}$ . Al solito, se  $A$  è limitato in  $\mathfrak{D}_{L^1} \widehat{\otimes}_\varepsilon E$ ,  $\{a(x+t), \forall a(t) \in A, \forall x \in R\}$  è ivi ancora limitato; sicchè, se  $\varepsilon > 0$  è un numero reale esiste  $J_0 = J_0(\varepsilon, A)$  con,

$$\forall J \geq J_0, \quad \|\langle T_t^E \cdot a(x+t+h_{i_j}) \rangle - \langle Q_t^E \cdot a(x+t) \rangle\| \leq \varepsilon.$$

Ciò implica che  $\tau_{h_{i_j}} T(\varphi)^E \rightarrow Q^E(\varphi)$  in

$$\text{Hom}_b(\mathfrak{D}_{L^1} \widehat{\otimes}_\varepsilon E; F(E)) \quad \forall E \in \mathcal{O}b(\mathcal{L}B)$$

poichè: se  $a(t) = \lim_J \sum_1^n \psi_i^{(J)}(t) \otimes e_i$  in  $\mathfrak{D}_{L^1} \widehat{\otimes}_\varepsilon E$ ,

$$\begin{aligned} \langle T^E(\varphi) \cdot a(t) \rangle &= \lim_J \int_R \langle T_t^E \cdot \sum_1^n \psi_i^{(J)}(x+t) \otimes e_i \rangle \varphi(x) dx = \\ &= \int_R \langle T_t^E \cdot a(x+t) \rangle \varphi(x) dx \end{aligned}$$

avendosi che la successione di funzioni, di  $R$  in  $F(E)$ ,  $\langle T_t^E \cdot \sum_1^n \psi_i^{(J)}(x+t) \otimes e_i \rangle \varphi(x)$  converge uniformemente, rispetto a  $x \in R$ , verso la  $\langle T_t^E \cdot a(x+t) \rangle \varphi(x)$ . Allora:

$$\begin{aligned} &\|\langle \tau_{h_{i_j}} T(\varphi)^E \cdot a(t) \rangle - \langle Q(\varphi)^E \cdot a(t) \rangle\| \leq \\ &\leq \int_R \|\langle T_t^E \cdot a(x+t+h_{i_j}) \rangle - \langle Q_t^E \cdot a(x+t) \rangle\| |\varphi(x)| dx \leq \varepsilon \int_R |\varphi(x)| dx \end{aligned}$$

se  $J \geq J_0$  come sopra.

Il lemma è dimostrato; si può allora dimostrare il

**TEOREMA.**  $T \in {}_b\{\varepsilon_{\mathfrak{D}_{L^1}} \rightarrow F\}_{q.p.}$  se e solo se ogni sua regolarizzata mediante  $\varphi(x) \in \mathfrak{D}$  è funzione funtoriale quasi periodica.

**DIMOSTRAZIONE.** La prima parte del teorema è nel corollario del lemma 2.

Per la seconda parte si ha: sia  $\varphi_J(x) \in \mathfrak{D}$  una rete convergente a  $\delta$  misura di Dirac, in  $\mathcal{E}'$ , [6], pag. 166, e  $T(\varphi_J)$  le distribuzioni funtoriali canonicamente associate alle funzioni funtoriali  $T^* \varphi_J$  come dal lemma 4. Si dimostrerà che  $\lim_J T(\varphi_J) = T$  in  ${}_b\{\varepsilon_{\mathfrak{D}_{L^1}} \rightarrow F\}$  e poichè lo spazio  ${}_b\{\varepsilon_{\mathfrak{D}_{L^1}} \rightarrow F\}_{q.p.}$  è chiuso,  $T$  risulterà quasi periodica.

Se  $E \in \mathcal{O}b(\mathcal{L}B)$ , la mappa

$$\psi : \mathcal{E}' \rightarrow \text{Hom}_b(\mathcal{G} \widehat{\otimes}_\varepsilon E; E), \quad \psi(T) = T \widehat{\otimes}_\varepsilon 1_E,$$

è continua.

Se  $A$  è limitato in  $\mathfrak{D}_{L^1} \widehat{\otimes}_\varepsilon E$ ,

$$T \in {}_b\{\varepsilon_{\mathfrak{D}_{L^1}} \rightarrow F\}, \quad \{\langle T_i^E \cdot a(x+t) \rangle, \forall a \in A, \forall x \in \mathbb{R}\}$$

è limitato in  $\mathcal{G} \widehat{\otimes}_\varepsilon E(E)$ . Poichè  $\psi$  è continua,  $\varphi_J \widehat{\otimes}_\varepsilon 1_{F(E)} \rightarrow \delta \widehat{\otimes}_\varepsilon 1_{F(E)}$  in  $\text{Hom}_b(\mathcal{G} \widehat{\otimes}_\varepsilon F(E); F(E))$ , sicchè:

$$\| \langle \varphi_J \widehat{\otimes}_\varepsilon 1_{F(E)} - \delta \widehat{\otimes}_\varepsilon 1_{F(E)} \cdot \langle T_i^E \cdot a(x+t) \rangle \| \leq \varepsilon$$

se  $J \geq J_0$ ,  $J_0$  opportuno. Ciò implica:

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} \langle T_i^E \cdot a(x+t) \rangle \varphi_J(x) dx - \langle T^E \cdot a(t) \rangle \right\| \leq \varepsilon$$

cioè  $T^E(\varphi_J) \rightarrow T^E$  in  $\text{Hom}_b(\mathfrak{D}_{L^1} \widehat{\otimes}_\varepsilon E; F(E))$ .

Il teorema è concluso.



## BIBLIOGRAFIA

- [1] BRATTI, G.: *Distribuzioni funtoriali in una variabile quasi periodiche*, Rend. Sem. Mat. Univ. di Padova, 1971.
- [2] BRATTI, G.: *Sulle distribuzioni vettoriali di una variabile debolmente quasi periodiche*, Rend. Sem. Mat. Univ. di Padova, 1970.
- [3] KELLEY, J. L., NAMIOKA I.: *Linear topological spaces*, D. Van Nostrand Company, 1963.
- [4] POPA, N.: *Quelques applications de la théorie des catégories dans la théorie des distributions*, Revue Roumaine des Mathématiques Pures et Appliqués, 1968.
- [5] POPA, N.: *Distributions fonctorielles définies par des fonctions*. Revue Roumaine des Mathématiques Pures et Appliqués, 1969.
- [6] SCHWARTZ, L.: *Théorie des distributions*. Hermann, 1967.
- [7] TREVES, F.: *Topological vector spaces, distributions and kernels*, Academic Press, 1967.

Manoscritto pervenuto in redazione l'1 settembre 1971.