RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

OTTO MUTZBAUER

Fastabelsche Minimaxgruppen

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 46 (1971), p. 375-384

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1971__46__375_0>

FASTABELSCHE MINIMAXGRUPPEN

OTTO MUTZBAUER *)

Herrn Professor W. Specht zum 65. Geburtstag gewidmet.

1. Die Gruppe G heißt eine Minimaxgruppe, wenn sie einen Normalteiler N besitzt, der die Maximalbedingung und dessen Faktor G/N die Minimalbedingung für Untergruppen erfüllt. In einer Gruppe G gilt der eingeschränkte Ober- bzw. Untergruppensatz, wenn für jede auf- bzw. absteigende Folge von Untergruppen U_i von G fast alle Indizes $| U_{i+1} : U_i |$ bzw. $| U_i : U_{i+1} |$ endlich sind.

Baer hat unter anderem gezeigt [1; Lemma 1.2.], daß die folgenden Eigenschaften einer abelschen Gruppe G äquivalent sind:

(1) G ist Minimaxgruppe.

(2) Der eingeschränkte Obergruppensatz gilt in G.

(3) Der eingeschränkte Untergruppensatz gilt in G.

Ein Ziel der folgenden Untersuchungen ist es zu beweisen, daß die Äquivalenz der obigen Eigenschaften erhalten bleibt, sofern man die Voraussetzung « abelsch » in « fastabelsch » (d.h. es gibt einen abelschen Normalteiler mit endlichem Faktor) abschwächt (Satz 3.1).

Diese Abschwächung der Voraussetzung ist keineswegs so selbstverständlich, wie es den Anschein hat. Das soll im Abschnitt 2 (Sätze 2.1 u. 2) anhand von Überlegungen an speziellen Untergruppenketten dargelegt werden. In der Bezeichnung lehnen wir uns an Specht [6] an.

*) Indirizzo dell'A.: Mathematisches Institut der Universität. 852 Erlangen, Bismarckstraße 1½. Germania Occ.

2. Zur Definition der besonderen Untergruppenketten, die hier von Interesse sind, wird der folgende Begriff eingeführt. Sei U eine Untergruppe von V. Die Gruppen U, V bilden ein $\times$-Intervall, oder in Zeichen $U \overset{1}{\underset{\infty}{<}} V$, wenn erstens der Index $|V:U|$ nicht endlich und zweitens für alle Zwischengruppen X mit $U \leqslant X \leqslant V$ entweder $|V:X|$ oder $|X:U|$ endlich ist. Eine Untergruppenkette

$$V = V_0 \overset{1}{\underset{\infty}{>}} V_1 \overset{1}{\underset{\infty}{>}} \dots \overset{1}{\underset{\infty}{>}} V_\lambda = U$$

heißt eine absteigende $\times$-Kette von V der Länge λ, die in U endet, wobei λ eine Ordinalzahl ist. Eine analoge Definition führt zum Begriff einer aufsteigenden $\times$-Kette. Um mit diesen $\times$-Ketten rechnen zu können, werden einige Lemmata bewiesen.

LEMMA 2.1. *Seien U, V Untergruppen der Gruppe G, so daß U Untergruppe von V und der Index $|G:V|$ endlich ist. Dann folgt $U \overset{1}{\underset{\infty}{<}} G$ aus $U \overset{1}{\underset{\infty}{<}} V$.*

BEWEIS. Sei X eine Zwischengruppe von U und G, also $U \leqslant X \leqslant G$. Mit $|G:V|$ ist auch $|X:X \cap V|$ endlich. Damit, und aus $U \leqslant V \cap X \leqslant V$ und $U \overset{1}{\underset{\infty}{<}} V$ folgt, daß $|V:V \cap X|$ endlich ist, sofern nicht $|X:U|$ endlich ist. Daraus ergibt sich, daß der Index $|G:V \cap X|$ endlich ist und somit auch $|G:X|$. Also gilt $U \overset{1}{\underset{\infty}{<}} G$ und das Lemma ist gezeigt.

Eine jede Verkleinerung eines $\times$-Intervalles von oben oder von unten, mit jeweils endlichem Index, ist wieder ein $\times$-Interval (d.h. mit $V \overset{1}{\underset{\infty}{>}} U$ und $V \geqslant W \geqslant U$ gilt entweder $V \overset{1}{\underset{\infty}{>}} W$ oder $W \overset{1}{\underset{\infty}{>}} U$). Aus Lemma 2.1 folgt weiter, daß eine Vergrößerung eines $\times$-Intervalles nach oben mit endlichem Index auch wieder ein $\times$-Intervall ist. Ein anderer Sachverhalt liegt jedoch vor, wenn ein $\times$-Intervall nach unten vergrößert wird. Wie später an einem Beispiel gezeigt wird (Satz 2.2), überträgt sich die Eigenschaft $\times$-Intervall zu sein i.a. nicht auf eine Vergrößerung (von endlichem Index) nach unten. Spezielle Voraussetzungen jedoch machen ein $\times$-Intervall stabil gegenüber beliebigen endlichen Vergrößerungen bzw. Verkleinerungen. Das zeigt das Korollar 2.1.

LEMMA 2.2. *Sei U eine Untergruppe, V ein Normalteiler in der Gruppe G, so daß U Untergruppe von V und der Index $|V : U|$ endlich ist. Dann folgt $U \underset{\infty}{\overset{1}{<}} G$ aus $V \underset{\infty}{\overset{1}{<}} G$.*

BEWEIS. Sei X eine Zwischengruppe von U und G, also $U \leqslant X \leqslant G$. Mit $|V : U|$ ist auch $|VX : X|$ endlich. Damit, und auf Grund von $G \geqslant VX \geqslant V$ und $G \underset{\infty}{\overset{1}{>}} V$ ergibt sich, daß $|VX : V|$ endlich ist, sofern nicht $|G : X|$ endlich ist. Daraus jedoch folgt, daß der Index $|VX : U|$ endlich ist und schließlich auch $|X : U|$. Also gilt $U \underset{\infty}{\overset{1}{<}} G$, und die Behauptung ist nachgewiesen.

Die Lemmata 2.1 und 2.2 haben zur Folge:

KOROLLAR 2.1. *Sei G hamiltonsche Gruppe (d.h. alle Untergruppen sind Normalteiler), und sei die Untergruppenkette $U \leqslant V \leqslant W \leqslant G$, mit endlichen Indizes $|G : W|$ und $|V : U|$, gegeben. Dann sind äquivalent: $U \underset{\infty}{\overset{1}{<}} G$, $U \underset{\infty}{\overset{1}{<}} W$, $V \underset{\infty}{\overset{1}{<}} G$ und $V \underset{\infty}{\overset{1}{<}} W$.*

In hamiltonschen, also insbesondere auch in abelschen Gruppen, ist somit ein $\times$-Intervall stabil gegenüber endlichen Veränderungen an seinen Grenzen.

Die angegebenen $\divideontimes$-Ketten gestatten nun in natürlicher Weise die Definition von Gruppeneigenschaften, die mit den im Abschnitt 1 angegebenen eingeschränkten Kettenbedingungen verglichen werden sollen.

Das Verhalten eines $\divideontimes$-Intervalles bei Faktorisierung behandelt das folgende Lemma.

LEMMA 2.3. *U sei Untergruppe der Gruppe G, und N sei Normalteiler sowohl von U als auch von G. Es gilt $G \underset{\infty}{\overset{1}{>}} U$ genau dann, wenn $G/N \underset{\infty}{\overset{1}{>}} U/N$.*

Beweis. Sofern der Index $|G:U|$ endlich ist gilt $|G:U| = |G/N : U/N|$. Damit ist das Lemma bewiesen.

In der Gruppe G gelte der eingeschränkte Unter- bzw. Obergruppensatz, dann genügt G der ab- bzw. aufsteigenden $\times$-Kettenbedingung, wenn alle ab- bzw. aufsteigenden $\times$-Ketten zwischen G und 1 gleiche (endliche) Länge besitzen. Man überlegt sich leicht, daß in einer Gruppe, in der der eingeschränkte Unter- bzw. Obergruppensatz gilt, jede ab- bzw. aufsteigende $\times$-Kette endliche Länge haben muß. Diese jeweiligen Längen müssen jedoch nicht gleich sein, wie Satz 2.2 zeigt. Auf die Voraussetzung, daß G einer der beiden eingeschränkten Kettenbedingungen genügen muß, kann nicht verzichtet werden, da erst dadurch die Existenz von $\times$-Ketten gesichert wird und die Möglichkeit besteht, jede Untergruppenkette in eine $\times$-Kette umzuformen bzw. zu verfeinern.

Man zeigt leicht, daß sich sowohl der eingeschränkte Unter- als auch Obergruppensatz auf Untergruppen, Faktoren und nach Baer [1; Lemma 1.1.] auch auf Erweiterungen vererbt.. Nicht so weitgehend sind die Vererbungseigenschaften für die beiden $\times$-Kettenbedingungen. Es gilt:

Lemma 2.4. *Die beiden $\times$-Kettenbedingungen vererben sich auf Untergruppen und Faktoren.*

Beweis. Genüge G der absteigenden $\times$-Kettenbedingung. In jeder Untergruppe U von G gilt natürlich der Untergruppensatz. Gäbe es zwischen U und 1 absteigende $\times$-Ketten ungleicher Länge, so folgte dies auch für G selbst.

In jedem Faktor $\overline{G}$ von G gilt der Untergruppensatz. Gäbe es zwischen $\overline{G}$ und der 1 absteigende $\times$-Ketten ungleicher Länge, so folgte dies nach Lemma 2.3 auch für G selbst. Analog führt man den Beweis auch für die zweite $\times$-Kettenbedingung.

Abelsche Minimaxgruppen haben eine sehr spezielle Struktur. Als erstes überlegt man sich leicht, daß Untergruppen und Faktoren von Minimaxgruppen wieder Minimaxgruppen sind. Des weiteren ist klar, daß in unendlichen direkten Produkten nicht-trivialer Gruppen niemals einer der beiden eingeschränkten Kettensätze gelten kann. Also läßt sich eine abelsche Minimaxgruppe, nach Baer [1; Lemma 1.2.], nur als endliches direktes Produkt von Untergruppen darstellen. Diese Bemerkungen führen schnell auf bestimmte Eigenschaften abelscher Minimaxgruppen.

LEMMA 2.5. *Sei G eine abelsche Minimaxgruppe.*

(1) *G ist ordnungsfinit genau dann, wenn G als endliches direktes Produkt endlicher zyklischer und quasiziklischer (d.h. Gruppen irgend eines Typs* p^{∞}*) Gruppen darstellbar ist.*

(2) *Ist G torsionsfrei, dann besitzt sie eine freiabelsche Untergruppe U endlichen Ranges, deren Faktor G/U ordnungsfinite abelsche Minimaxgruppe ist.*

(3) *G ist darstellbar als direktes Produkt*

$$G = 0 \times T,$$

wobei die abelschen Minimaxgruppen 0 *bzw. T ordnungsfinit bzw. torsionsfrei sind.*

BEWEIS. (1) Eine ordnungsfinite abelsche Gruppe gestattet nach Scott [5; 5.2.10. (Kulikov)] eine sukzessive Abspaltung direkter Faktoren, die entweder zyklisch, von Primpotenzordnung, oder quasizyklisch sind. Da G eine abelsche Minimaxgruppe ist, muß diese Abspaltung nach endlich vielen Schritten beendet sein. Umgekehrt erfüllt eine solche ordnungsfinite Gruppe die Minimalbedingung für Untergruppen (siehe Specht [6; p. 285]), ist also insbesondere eine Minimaxgruppe. Damit ist auch (3) bewiesen.

(2) Die torsionfreie abelsche Gruppe G besitzt eine freiabelsche Untergruppe U mit ordnungsfinitem Faktor G/U. Mit G ist auch U abelsche Minimaxgruppe und daher von endlichem Rang. Damit ist das Lemma bewiesen.

Weitere Eigenschaften abelscher Minimaxgruppen entnimmt man Baer [1; §1], [2; p. 308] und Mutzbauer [4; p. 22-33].

LEMMA 2.6. *G sei eine abelsche Minimaxgruppe. U und V seien zwei freiabelsche Untergruppen maximalen Ranges, so daß also die Faktoren G/U und G/V ordnungsfinit sind. Dann hat der Durchschnitt* $U \cap V$ *denselben endlichen Rang wie U und V.*

BEWEIS. $U/U \cap V \cong UV/V$ und daher ordnungsfinit, ebenso $V/U \cap V \cong VU/U$. Also gilt nach Fuchs [3; p. 36, Nr. 31b], daß $U \cap V$, U und V denselben Rang haben. Da G eine abelsche Minimaxgruppe ist, sind diese Ränge nach Lemma 2.5 endlich, und der Beweis ist vollständig.

$\times$-Intervalle haben in abelschen Gruppen eine sehr spezielle Struktur, wie das folgende Lemma zeigt.

LEMMA 2.7. *G sei eine abelsche Gruppe. Gilt* $G \overset{1}{\underset{\infty}{>}} 1$, *so ist G das direkte Produkt* $G = F \times H$ *einer endlichen Gruppe F und einer Gruppe H, die entweder unendlich zyklisch oder eine quasizyklische Gruppe ist.*

BEWEIS. Aus $G \overset{1}{\underset{\infty}{>}} 1$ folgt, daß in G der eingeschränkte Obergruppensatz gilt, und damit ist G, nach Baer [1; Lemma 1.2], eine Minimaxgruppe. Die spezielle Gestalt solcher Gruppen (Lemma 2.5) führt mit der Beziehung $G \overset{1}{\underset{\infty}{>}} 1$ sofort zur Einsicht, daß G entweder ordnungsfinit oder zerlegbar ist. Damit erhält man leicht die angegebenen Möglichkeiten für G.

SATZ 2.1. *Die folgenden Eigenschaften der abelschen Gruppe G sind äquivalent:*

(1) *G ist Minimaxgruppe.*

(2) *Der eingeschränkte Obergruppensatz gilt in G.*

(3) *Der eingeschränkte Untergruppensatz gilt in G.*

(4) *G genügt der absteigenden* $\times$*-Kettenbedingung.*

(5) *G genügt der aufsteigenden* $\times$*-Kettenbedingung.*

BEWEIS. (1) bis (3) sind nach Baer [1; Lemma 1.2.] äquivalent. Aus (4) bzw. (5) folgen per definitionem (2) bzw. (3). Nun soll gezeigt werden, daß (4) eine Folge (1) ist. In der abelschen Minimaxgruppe G gilt der eingeschränkte Untergruppensatz, und alle absteigenden $\times$-Ketten zwischen G und 1 sind von endlicher Länge und haben die Form:

$$G = U_0 \overset{1}{\underset{\infty}{>}} U_1 \overset{1}{\underset{\infty}{>}} \dots \overset{1}{\underset{\infty}{>}} U_n = 1,$$

mit abelschen Faktoren $U_{i-1}/U_i \overset{1}{\underset{\infty}{>}} 1$ für alle $1 \leqslant i \leqslant n$.

Nach Lemma 2.7 gibt es eine endliche Verfeinerung einer solchen Kette zu:

$$G = V_0 > V_1 > \ldots > V_m = 1, \qquad (\times)$$

mit Faktoren V_{i-1}/V_i, die entweder endlich, unendlich zyklisch oder quasizyklisch sind. Die Anzahl der unendlich zyklischen Faktoren solcher Ketten ist nach Specht [6; p. 348, Satz 15 (Hirsch)] ein Invariante der Gruppe, also insbesondere eine Invariante für absteigende $\times$-Ketten.

Nun gibt es in G eine freiabelsche Untergruppe U endlichen maximalen Ranges, deren Faktor G/U eine ordnungsfinite abelsche Minimaxgruppe ist. Die Kette $(\times)$ induziert in G/U die Kette

$$G/U = V_0U/U \geqslant V_1U/U \geqslant \ldots \geqslant V_mU/U = 1, \qquad (\times\times)$$

mit Faktoren, die entweder trivial, endlich oder quasizyklisch sind. Beim Übergang von $(\times)$ zu $(\times\times)$ blieb die Anzahl der quasizyklischen Faktoren gleich. Da G/U, nach Lemma 2.5, bis auf einen endlichen direkten Faktor, ein endliches direktes Produkt quasizyklischer Gruppen ist, muß die Anzahl der quasizyklischen Faktoren einer solchen Kette $(\times\times)$ gleichfalls eine Invariante der Gruppe G sein. Das Korollar 2.1 beweist nun endgültig (4). Ganz analog zeigt man, daß (5) eine Folge von (1) ist.

Mit einem Beispiel [1]) soll jetzt bewiesen werden, daß sich die Voraussetzung « abelsch » im Satz 2.1 nicht in « fastabelsch » abschwächen läßt, sondern, daß es vielmehr in einer fastabelschen Gruppe G, in der die eingeschränkten Kettensätze gelten, durchaus ab- oder aufsteigende $\times$-Ketten verschiedener, endlicher Länge zwischen G und 1 geben kann.

Auf der freiabelschen Gruppe A des Ranges vier

$$A = \mathbf{Z}_1 \times \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_4,$$

---

[1]) Dieses Beispiel verdanke ich Herrn H. Heineken, dem ich an dieser Stelle herzlich für die Unterstützung und das Interesse and meiner Arbeit danke.

mit $\boldsymbol{Z}_i=\langle a_i\rangle$ für $1\leqslant i\leqslant 4$, sei ein Automorphismus α erklärt durch:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4)^\alpha=(-a_4, a_1, a_2, a_3).$$

Es gilt:

$$\alpha^8=1.$$

Sei nun (α, A) die Erweiterung von A mit dem Automorphismus α.

LEMMA 2.8. *In der fastabelschen Gruppe* (α, A) *gelten sowohl der eingeschränkte Ober- als auch Untergruppensatz.*

BEWEIS. Es gilt:

$$(\alpha, A)>(\alpha^2, A)\underset{\infty}{\overset{1}{>}}(\alpha^2, \boldsymbol{Z}_1\times\boldsymbol{Z}_3)>(\alpha^4, \boldsymbol{Z}_1\times\boldsymbol{Z}_3),$$

wobei die Indizes

$$|(\alpha, A):(\alpha^2, A)| \text{ und } |(\alpha^2, \boldsymbol{Z}_1\times\boldsymbol{Z}_3):(\alpha^4, \boldsymbol{Z}_1\times\boldsymbol{Z}_3)|.$$

endlich sind. Weiter prüft man leicht nach:

$$(\alpha, A)\underset{\infty}{\overset{1}{>}}(\alpha^4, \boldsymbol{Z}_1\times\boldsymbol{Z}_2\times\boldsymbol{Z}_3)\underset{\infty}{\overset{1}{>}}(\alpha^4, \boldsymbol{Z}_1\times\boldsymbol{Z}_3).$$

Diese beiden Ketten gestatten nach Lemma 2.1 die Konstruktion verschieden langer $\asymp$-Ketten zwischen G und 1. Damit ist der Beweis beendet.

$\asymp$-Intervalle sind also i.a. nicht stabil gegenüber endlichen Vergrößerungen.

3. Dem Satz 2.2 entnimmt man, daß abelsche Minimaxgruppen doch eine wesentlich andere Struktur haben als fastabelsche, gerade in Bezug auf $\asymp$-Ketten. Vor diesem Hintergrund erscheint die angekündigte Verallgemeinerung des Satzes von Baer keineswegs mehr selbstverständlich. Daß der Beweis trotzdem gelingt, liegt an dem folgenden Lemma.

LEMMA 3.1. *Die abelsche Minimaxgruppe H sei Normalteiler der Gruppe G mit endlichem Faktor G/H. Dann ist G Minimaxgruppe.*

BEWEIS. H enthält eine freiabelsche Untergruppe N mit ordungsfinitem Faktor H/N. Für alle Elemente g von G haben die freiabelschen, zu N konjugierten, Untergruppen N^g ordnungsfinite Faktoren H/N^g. Nach Lemma 2.6 sind also insbesondere die Faktoren $N/N \cap N^g$ für alle Elemente g von G endlich.

Sei $N_G = \bigcap_{g \in G} N^g$ der normale Kern von N in G. Da H abelsch und G/H endlich ist, läßt sich N_G mit gewissen Elementen g_i $(1 \leqslant i \leqslant l)$ von G als endlicher Durchschnitt

$$N_G = \bigcap_{1 \leq i \leq l} N^{g_i}$$

darstellen, und damit ist der Faktor N/N_G endlich.

Da H/N die Minimalbedingung für Untergruppen erfüllt, und N/N_G endlich ist, folgt aus der Isomorphie

$$H/N \cong (H/N_G)/(N/N_G),$$

daß H/N_G, als Erweiterung von Gruppen mit Minimalbedingung, gleichfalls dieser Bedingung genügt. Daraus, und da G/H endlich ist, folgt wegen

$$G/H \cong (G/N_G)/(H/N_G),$$

daß G/N_G wiederum, als Erweiterung von Gruppen mit Minimalbedingung, diese Bedingung erfüllt. Das und die Tatsache, daß N der Maximalbedingung für Untergruppen genügt und folglich auch die Untergruppe N_G von N, zeigen, daß G eine Minimaxgruppe ist.

Nun ergibt sich ohne große Mühe der schon genannte Satz.

SATZ 3.1. *Die folgenden Eigenschaften der fastabelschen Gruppe G sind äquivalent:*

(1) *G ist Minimaxgruppe.*

(2) *Der eingeschränkte Obergruppensatz gilt in G.*

(3) *Der eingeschränkte Untergruppensatz gilt in G.*

Beweis. Sei G eine fastabelsche Minimaxgruppe. Es gibt einen abelschen Normalteiler H von G, der Minimaxgruppe ist und dessen Faktor G/H endlich ist. Nach Baer [1; Lemma 1.2.] gilt in H sowohl der eingeschränkte Ober- als auch Untergruppensatz. Auf Grund der Erweiterungsvererblichkeit dieser Kettenbedingungen gelten sie auch in G.

Sei G umgekehrt eine fastabelsche Gruppe, die einer der beiden eingeschränkten Kettenbedingungen genügt. Jede dieser Bedingungen vererbt sich insbesondere auf einen abelschen Normalteiler H von G, dessen Faktor G/H endlich ist. Nach Baer [1; Lemma 1.2.] ist H abelsche Minimaxgruppe, so daß G die Voraussetzungen von Lemma 3.1 erfüllt und somit eine Minimaxgruppe ist.

Damit ist gezeigt, daß (1) sowohl zu (2) als auch zu (3) äquivalent ist, und der Satz ist bewiesen.

LITERATUR

[1] Baer, R.: *Polyminimaxgruppen*, Math. Ann. *175*, 1-43 (1968).

[2] Baer, R.: *Das Hyperzentrum einer Gruppe III*, Math. Z. *59*, 299-338 (1953).

[3] Fuchs, L.: *Abelian Groups*, Pergamon Press, 1958.

[4] Mutzbauer, O.: *Fastabelsche Minimaxgruppen*, Dissertation, Erlangen (1971).

[5] Scott, W. R.: *Group Theory*, Prentice Hall, 1964.

[6] Specht, W.: *Gruppentheorie*, Springerverlag, 1956.

Manoscritto pervenuto in redazione il 15 luglio 1971.