Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

Renato Troilo

Caratterizzazione delle precessioni semiregolari con asse di precessione verticale

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 46 (1971), p. 329-337

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1971__46__329_0>

CARATTERIZZAZIONE DELLE PRECESSIONI SEMIREGOLARI CON ASSE DI PRECESSIONE VERTICALE

RENATO TROILO *)

È nota una classe di precessioni con asse di precessione verticale dinamicamente possibili per un corpo rigido pesante asimmetrico fissato senza attrito per un suo punto 0. Si tratta della classe di tutti i possibili moti di Hess precessionali con asse di precessione verticale [1]). Tali moti sono precessioni nelle quali risulta costante la velocità di precessione, ossia precessioni semiregolari.

Può porsi il problema di vedere se i moti precessionali di Hess suddetti esauriscano la classe delle precessioni semiregolari (non degeneri) [2]) aventi asse di precessione verticale dinamicamente possibili per il corpo rigido pesante asimmetrico.

In questa nota si dà risposta affermativa al quesito provando che: per il corpo rigido pesante asimmetrico fissato senza attrito per un suo punto 0 non sono dinamicamente possibili precessioni semiregolari con asse di precessione verticale se, rispetto a 0, non è verificata la condizione strutturale di Hess. Ciò consente una caratterizzazione dei moti precessionali di Hess con asse di precessione verticale.

---

*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico Università, Via Belzoni, 3, 35100 Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca del C.N.R.

[1]) Cfr. [2] e anche [1].

[2]) Anche le note rotazioni uniformi del solido pesante possono riguardarsi come precessioni (degeneri) semiregolari con asse di precessione verticale. Tale caso verrà considerato nel paragrafo 5, nel seguito, tranne contrario avviso, col termine precessione si intenderà precessione effettiva.

Si fornisce inoltre una caratterizzazione dei moti di precessione generalizzata regolare di vettore $\boldsymbol{K}$ [3]) dinamicamente possibili per il corpo rigido pesante asimmetrico.

1. Sia M un moto di precessione semiregolare con asse di precessione verticale dinamicamente possibile per un corpo rigido pesante asimmetrico $\mathcal{C}$ fissato senza attrito per un suo punto 0.

Si scelga una terna solidale $\mathcal{T} \equiv (0, \boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3)$ avente il terzo asse coincidente con l'asse di figura della precessione e quindi, detta $\boldsymbol{w}$ la velocità angolare e $\boldsymbol{c}$ il versore della normale discendente, si ha

$$\boldsymbol{w} = \partial \boldsymbol{c} + \mu \dot{\boldsymbol{i}}_3 \qquad (\partial = \text{cost.}). \tag{1}$$

È inoltre possibile [4]) supporre scelta $\mathcal{T}$ in modo tale che la matrice d'inerzia di $\mathcal{C}$ rispetto a 0 sia

$$\sigma = \begin{bmatrix} A & 0 & -B' \\ 0 & B & -A' \\ -B' & -A' & C \end{bmatrix} \qquad \text{con } B \geq A. \tag{2}$$

Moti di precessione semiregolare con asse di precessione verticale, ossia moti per cui valga la (1), sono dinamicamente possibili per il corpo rigido pesante asimmetrico: in [2] si è provata la possibilità dinamica di precessioni di questo tipo non appena sia soddisfatta, rispetto a 0, la condizione strutturale di Hess. Si vuole provare che, al di fuori di queste, non vi sono altri moti di precessione semiregolare con asse di precessione verticale dinamicamente possibili per $\mathcal{C}$.

---

[3]) Con $\boldsymbol{K}$ si indica il momento delle quantità di moto rispetto al punto fisso 0.

[4]) Si scelga $\mathcal{T}$ avente il terzo asse parallelo all'asse di figura di M e gli altri due assi paralleli agli assi di simmetria dell'ellisse che risulta dall'intersezione dell'ellissoide d'inerzia con il piano per 0 perpendicolare al terzo asse. L'orientazione degli assi così definiti viene poi fissata in modo che risulti $B \geq A$.

2. Dalla (1) si deducono le componenti (rispetto a $\mathcal{T}$) del versore della verticale, ottenendosi

$$c_1 = \frac{\omega_1}{\partial}, \qquad c_2 = \frac{\omega_2}{\partial}, \qquad c_3 = \cos\theta, \tag{3}$$

essendo θ l'angolo di nutazione.

Indicando con m e G la massa e il baricentro di $\mathcal{C}$, con g il modulo della accelerazione di gravità, si ponga

$$0G^* = mg0G.$$

Tenendo conto della posizione precedente, l'integrale dell'energia assume la forma

$$K_1\omega_1 + K_2\omega_2 + K_3\omega_3 - 20G^* \cdot \mathbf{c} = 2E_0\,, \tag{4}$$

nella qualeK_i rappresentano le componenti del vettore $\boldsymbol{K}$, momento delle quantità di moto rispetto a 0, componenti che sono

$$K_1 = A\omega_1 - B'\omega_3\,, \quad K_2 = B\omega_2 - A'\omega_3\,, \quad K_3 = C\omega_3 - A'\omega_2 - B'\omega_1\,. \tag{5}$$

Facendo uso delle (3), l'integrale del momento verticale delle quantità di moto si scrive

$$K_1\frac{\omega_1}{\partial} + K_2\frac{\omega_2}{\partial} + K_3\cos\theta = K_c \tag{6}$$

con evidente significato di K_c.

Moltiplicando entrambi i membri della (6) per ∂ e sottraendo la relazione così ottenuta dalla (4) si ottiene

$$K_3(\omega_3 - \partial\cos\theta) - 20G^* \cdot \mathbf{c} = 2E_0 - \partial K_c\,. \tag{7}$$

3. Sia $\mathcal{T}^*$ una terna fissa avente il terzo asse parallelo a $\mathbf{c}$ e siano φ, ψ, θ gli ordinari angoli di Eulero relativi alle terne $\mathcal{T}^*$ e $\mathcal{T}$. Con tale scelta l'angolo θ risulta costante e coincidente con l'angolo di nutazione della precessione M in esame.

Per le componenti della velocità angolare rispetto alla terna valgono quindi le seguenti espressioni [5])

$$(8) \qquad \omega_1 = \partial \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, \quad \omega_2 = \partial \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, \quad \omega_3 = \dot{\varphi} + \partial \cos \theta.$$

Dalla (6) e della (7) mediante la sostituzione di ω_3 con la sua espressione fornita dalla terza delle (8) e tenuto conto delle (5), si ottiene, rispettivamente

$$(9) \qquad \dot{\varphi}(C\partial \cos\theta - A'\omega_2 - B'\omega_1) = \partial K_c - C\partial^2 \cos^2\theta + \\ + 2\partial \cos\theta(A'\omega_2 + B'\omega_1) - (A\omega_1^2 + B\omega_2^2)$$

e

$$(10) \qquad C\dot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}(C\partial \cos\theta - A'\omega_2 - B'\omega_1) - 2 0G^* \cdot \boldsymbol{c} = 2E_0 - \partial K_c\,.$$

Sostituendo in queste due ultime relazioni a ω_1 e ω_2 le loro espressioni (8) e sostituendo nella (10) l'espressione di $\dot{\varphi}$ ricavata dalla (9), si ottiene una equazione nella sola φ che, nella ipotesi della compatibilità dinamica della precessione M, deve essere soddisfatta identicamente rispetto a φ.

Procedendo nel modo indicato e posto

$$0G^* = (\xi^*_1\,,\ \xi^*_2\,,\ \xi^*_3), \ \alpha = \partial K_c - C\partial^2 \cos^2\theta, \ \beta = 2E_0 - \partial K_c - 2\xi^*_3 \cos\theta$$

si ottiene

$$(11) \qquad C[\alpha + 2\partial^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta(A' \cos\varphi + B' \operatorname{sen}\varphi) - \\ - \partial^2 \operatorname{sen}^2\theta(A \operatorname{sen}^2\varphi + B\cos^2\varphi)]^2 + \\ + [(\alpha - \beta) + 2 \operatorname{sen}\theta(A'\partial^2 \cos\theta - \xi^*_2) + 2 \operatorname{sen}\theta(B'\partial^2 \cos\theta - \xi^*_1) - \\ - \partial^2 \operatorname{sen}^2\theta(A \operatorname{sen}^2\varphi + B\cos^2\varphi)] \cdot \\ \cdot [C\partial \cos\theta - \partial \operatorname{sen}\theta(A' \cos\varphi + B' \operatorname{sen}\varphi)]^2 \equiv 0.$$

---

[5]) Si ricordi che $\dot{\psi} = \partial$.

4. Il primo membro della (11) è una funzione razionale negli argomenti sen φ, cos φ del tipo

$$\sum_{\substack{0\\ i+j=4}}^{4}{}_{ij}\, a_{ij} \operatorname{sen}^i \varphi \cos^j \varphi + \sum_{\substack{0\\ i+j=3}}^{3}{}_{ij}\, b_{ij} \operatorname{sen}^i \varphi \cos^j \varphi + \ldots$$

e si può facilmente verificare che, perchè la (11) sia identicamente soddisfatta rispetto a φ, sono necessarie le condizioni

$$a_{40}+a_{04}-a_{22}=0, \quad a_{31}=a_{13} \tag{12}$$

$$b_{03}=b_{21}\,, \quad b_{30}=b_{12}\,. \tag{13}$$

Le espressioni esplicite di a_{04}, a_{40}, a_{22}, fornite dalla (11), sono date da

$$a_{40}=\partial^4 \operatorname{sen}^4 \theta(CA^2-AB'^2), \quad a_{04}=\partial^4 \operatorname{sen}^4 \theta(CB^2-BA'^2),$$

$$a_{22}=\partial^4 \operatorname{sen}^4 \theta(2ABC-AA'^2-BB'^2).$$

Pertanto, tenendo conto che, per quanto convenuto in nota 2), è $\partial \operatorname{sen} \theta \neq 0$, le due condizioni (12) si traducono nelle seguenti

$$(B-A)[C(B-A)+B'^2-A'^2]=0, \tag{14}$$

$$(B-A)A'B'=0. \tag{15}$$

Si escluda, per il momento, il caso $A=B$, sia cioè $B>A$, dalla (15) si deduce

$$A'B'=0.$$

Non può darsi il caso $A'=B'=0$ in quanto dalla (14) seguirebbe $A=B$, ma non può neppure essere $A'=0$, $B'\neq 0$, in tal caso, infatti dalla (14) seguirebbe $B<A$.

Deve essere pertanto

$$B'=0, \qquad A'\neq 0, \tag{16}$$

e quindi la condizione (14) si riduce a

$$C(B-A)-A'^2=0. \tag{17}$$

Mediante le condizioni (13), tenuto conto di (16) e (17), si ottiene facilmente che

$$\xi^*_1=\xi^*_2=0. \tag{18}$$

Le (18) significano che l'asse di versore $\boldsymbol{i}_3$ passa per il baricentro (ossia, stante la scelta della terna solidale $\mathcal{T}$, che l'asse di figura è baricentrale); con tale condizione, espressa dalla seguente:

$$\boldsymbol{i}_3= \text{vers}\, 0G, \tag{19}$$

le (16), (17) esprimono la condizione strutturale di Hess.

Resta da considerare il caso $A=B$, in tale eventualità, dalla seconda delle (13) si ottiene

$$A'=B'=0,$$

oppure

$$A'\partial^2 \cos\theta-\xi^*_2=B'\partial^2 \cos\theta-\xi^*_1=0. \tag{20}$$

Il primo caso è da escludersi in quanto implica $\xi^*_1=\xi^*_2=0$ e quindi $\mathcal{C}$ sarebbe un giroscopio.

Per il secondo caso, è conveniente [6]) ricorrere alla terza equazione di Eulero che, in base alle (5) e alle (8), dopo agevoli semplificazioni si riduce a

$$C\ddot{\varphi}+(\xi^*_2-A'\partial^2\cos\theta)\,\text{sen}\,\varphi-(\xi^*_1-B'\partial^2\cos\theta)\cos\varphi=0.$$

Da questa consegue, tenuto conto delle (20), che $\dot{\varphi}=\text{cost.}$, ossia la regolarità della precessione ed è ben noto che ciò non è dinamicamente pos-

[6]) Dato che, stanti le (16), (17) e (20), la (11) è identicamente soddisfatta rispetto a φ.

sibile stante la verticalità dell'asse di precessione [7]). Va escluso quindi il caso $A=B$.

Ricordando quanto in precedenza provato, si ha in conclusione il seguente teorema:

I. *Per il corpo rigido pesante asimmetrico fissato senza attrito per un suo punto* 0, *sono dinamicamente possibili moti precessionali semiregolari con asse di precessione verticale solo se, rispetto a* 0, *risulta verificata la condizione strutturale di Hess e l'asse di figura risulta baricentrale.*

5. In [2] si è provato che, se rispetto al punto fisso 0 è verificata la condizione strutturale di Hess, le uniche precessioni con asse di precessione verticale dinamicamente possibili sono quelle appartenenti alla classe di moti di Hess che, in [2] stesso, è stata completamente individuata.

Precisamente, supposte verificate le condizioni espresse da (16), (17) e (19), per la velocità angolare di tali moti risulta

$$\omega=\sqrt{\frac{|0G^*|}{A\cos\theta}}\left[\boldsymbol{c}+\operatorname{sen}\theta\left(\frac{A'}{C}\cos\Phi-\cot g\theta\right)\boldsymbol{i}_3\right],$$

essendo $\cos\theta>0$ e Φ soluzione della equazione differenziale

$$\dot{\Phi}=\sqrt{\frac{|0G^*|}{A\cos\theta}}\left[\cos\theta-\operatorname{sen}\theta\frac{A'}{C}\cos\Phi\right].$$

Risulta evidente che tali moti sono precessioni semiregolari.

Da quanto ora ricordato e dal teorema I discende quindi la seguente caratterizzazione delle precessioni semiregolari:

II. *La classe, delle precessioni semiregolari con asse di precessione verticale dinamicamente possibili per il corpo rigido pesante asimmetrico è coincidente con la classe dei moti di Hess sopra descritta.*

---

7) Cfr. [3].

Per completezza è il caso di ampliare il teorema precedente includendovi il caso delle rotazioni uniformi. È noto che sono dinamicamente possibili per $\mathcal{C}$ rotazioni uniformi ed esse avvengono necessariamente attorno a un asse verticale, ovviamente tali moti possono essere intesi come caso limite o degenere di precessioni semiregolari con asse di precessione verticale. Indicando con R la classe di tali moti e con H quella dei moti di Hess prima definita, dal Teorema II e da quanto ora esposto si ha

III. *La classe delle precessioni semiregolari (effettive e degeneri) con asse di precessione verticale dinamicamente possibili per il corpo rigido pesante asimmetrico coincide con la classe $H \cup R$.*

6. Mediante i risultati del numero precedente è possibile fornire una caratterizzazione dei moti di *precessione generalizzata regolare* di vettore $\boldsymbol{K}$, ossia quei moti di $\mathcal{C}$ nei quali il momento $\boldsymbol{K}$ delle quantità di moto rispetto al punto fisso 0, risulta

$$\boldsymbol{K} = \alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{k} \tag{21}$$

con $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{k}$ versori, rispettivamente, fisso e solidale e α, β costanti.

La classe di tali moti coincide [8]) con la classe $H \cup R$ e quindi per il teorema III segue che:

IV. *La classe delle precessioni generalizzate regolari di vettore $\boldsymbol{K}$ dinamicamente possibili per il corpo rigido pesante asimmetrico coincide con la classe delle possibili precessioni semiregolari (effettive e degeneri) con asse di precessione verticale.*

---

[8]) In [2] si è infatti provato che tutte e solo le precessioni generalizzate regolari di vettore $\boldsymbol{K}$ sono moti di H, se si escludono le rotazioni uniformi, ma anche questi moti sono precessioni generalizzate regolari di vettore $\boldsymbol{K}$: le rotazioni uniformi si possono infatti caratterizzare come i moti di $\mathcal{C}$ per cui risulta costante nel corpo il momento delle quantità di moto (Cfr. [4], VIII, 27).

BIBLIOGRAFIA

[1] Bressan, A.: *Sulle precessioni di un corpo rigido costituenti moti di Hess*, Rend. Sem. Mat. dell'Univ. di Padova, vol. XXVII (1967).

[2] Grioli, G.: *Forma intrinseca delle equazioni del solido pesante asimmetrico con punto fisso e ricerca di moti di precessione*, Ann. dell'Univ. di Ferrara, S. VII, vol. III (1954).

[3] Grioli, G.: *Questioni di dinamica del solido pesante asimmetrico*, Rend. Sem. Mat. dell'Univ. di Padova, vol. XXI (1952).

[4] Levi-Civita, T.: *Meccanica Razionale*, Vol. II, P. II, Zanichelli, Bologna (1952).

Manoscritto pervenuto in redazione l'8 luglio 1971.