Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Maria Teresa Molfino

Su alcuni invarianti numerici associati a sistemi di equazioni lineari in un modulo

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 46 (1971), p. 215-222
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1971__46__215_0>

SU ALCUNI INVARIANTI NUMERICI ASSOCIATI A SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI IN UN MODULO

MARIA TERESA MOLFINO *)

Le nozioni di ordine globale e di rango di un sistema di equazioni lineari in un modulo (sopra un anello principale), sono state introdotte in [1].

In questa nota dimostro che, nel caso di un modulo divisibile, l'ordine globale e il rango dipendono unicamente dallo spazio delle soluzioni e sono pertanto invarianti per i sistemi di equazioni equivalenti.

Introduco inoltre un nuovo invariante: l'ordine ridotto. Per questo ultimo stabilisco alcune relazioni con l'ordine globale e assegno un criterio di finitezza.

1. Sia Λ un anello principale e X un Λ-modulo divisibile. Dato il sistema di equazioni:

$$
\begin{array}{c}
\lambda_{11}x_1+\lambda_{12}x_2+\ \dots\ +\lambda_{1p}x_p=0\\
\lambda_{21}x_1+\lambda_{22}x_2+\ \dots\ +\lambda_{2p}x_p=0\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\lambda_{q1}x_1+\lambda_{q2}x_2+\ \dots\ +\lambda_{qp}x_p=0
\end{array}
\tag{1}
$$

*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico dell'Università, Via L. B. Alberti 4, 16132 Genova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R., riprendente in parte la tesi di laurea dell'A. (Genova, Febbraio 1968).

dove i coefficienti λ_{ij} appartengono a Λ e le incognite x_j ad X, indicata con $L=\{\lambda_{ij}\}$ la matrice dei coefficienti, l'insieme delle soluzioni del sistema si può esprimere come nucleo del morfismo di Λ-moduli:

$$\Phi : X^p \to X^q \text{ dove } \Phi = L \otimes X.$$

Infatti seguendo [1] la matrice dei coefficienti L può essere interpretata come morfismo tra Λ-moduli liberi di rango p e q.

$$L : \Lambda^p \to \Lambda^q$$

ed una risoluzione libera di Coker L è:

$$0 \to \operatorname{Ker} L \to \Lambda^p \xrightarrow{L} \Lambda^q \to \operatorname{Coker} L \to 0.$$

Tensorializzando con X si ottiene il complesso

$$0 \to (\operatorname{Ker} \mathrm{L}) \otimes X \to X^p \xrightarrow{\Phi} X^q \to (\operatorname{Coker} L) \otimes X \to 0$$

a cui è associata la sequenza esatta di Λ-moduli:

(2) $$0 \to (\operatorname{Ker} L) \otimes X \to \operatorname{Ker} \Phi \to \operatorname{Tor}(\operatorname{Coker} L, X) \to 0$$

che, essendo $(\operatorname{Ker} L) \otimes X$ divisibile, risulta essere spezzante.

Essendo Λ principale $\operatorname{Ker} L$ è isomorfo a Λ^k dove $k = p - \operatorname{rang} L$ ($\operatorname{rang} L$ è la caratteristica della matrice L); il numero k si dice rango del sistema $\Phi x = 0$, $x \in X^p$.

2. Se Λ è un dominio d'integrità per ogni Λ-modulo X indicheremo con μX il massimo sottomodulo divisibile di X. Questo si identifica con l'unione di tutti i sottomoduli divisibili. Poichè un morfismo di Λ-moduli $f : X \to Y$ subordina un morfismo $\mu f : \mu X \to \mu Y$, ne risulta il carattere functoriale di μ. Anzi il funtore μ è un funtore additivo della categoria dei Λ-moduli in sè.

Dimostriamo il seguente

TEOREMA 1. *Se* Λ *è un anello principale ed* X *un* Λ*-modulo divisibile il morfismo* $j : (\mathrm{Ker}\, L) \otimes X \to \mathrm{Ker}\, \Phi$, *nella sequenza spezzante* (2), *ha come immagine* $\mu\, \mathrm{Ker}\, \Phi$.

DIM. Essendo $(\mathrm{Ker}\, L) \otimes X$ un modulo divisibile, la sua immagine mediante j è ovviamente divisibile pertanto contenuta in $\mu\, \mathrm{Ker}\, \Phi$.

Esiste quindi il monomorfismo $\iota : (\mathrm{Ker}\, L) \otimes X \to \mu\, \mathrm{Ker}\, \Phi$ che rende commutativo il primo quadrato del diagramma a righe esatte:

$$
\begin{array}{ccccccc}
0 \to & (\mathrm{Ker}\, L) \otimes X & \xrightarrow{j} & \mathrm{Ker}\, \Phi & \to & \mathrm{Tor}\,(\mathrm{Coker}\, L,\ X) & \to 0 \\
 & {\scriptstyle \iota}\downarrow & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon} & \\
0 \to & \mu\, \mathrm{Ker}\, \Phi & \to & \mathrm{Ker}\, \Phi & \to & \mathrm{Ker}\, \Phi/\mu\, \mathrm{Ker}\, \Phi & \to 0.
\end{array} \tag{3}
$$

Per provare che ι è isomorfismo basta verificare che $\mu\, \mathrm{Tor}\,(\mathrm{Coker}\, L,$ $X)=0$. Infatti poichè Λ è un anello principale e $\mathrm{Coker}\, L$ è un modulo finitamente generato, la sua torsione $t(\mathrm{Coker}\, L)$ si spezza nella somma diretta di un numero finito di moduli ciclici: $t(\mathrm{Coker}\, L) = \bigoplus_{i \in I} M_i$ dove gli M_i ammettono una risoluzione del tipo:

$$0 \to \Lambda \xrightarrow{\lambda_i} \Lambda \to M_i \to 0 \quad \lambda_i \neq 0 \quad \lambda_i \in \Lambda.$$

Tensorializzando con X si ha la sequenza esatta:

$$0 \to \mathrm{Tor}\,(M_i\,,\ X) \to X \xrightarrow{\lambda_i \otimes x} X \to M_i \otimes X \to 0$$

da cui:

$$\mathrm{Tor}\,(M_i\,,\ X) = \mathrm{Ker}\,(X \xrightarrow{\lambda_i \otimes x} X) \text{ per ogni } i \in I$$

è quindi ovvio che per ogni $i \in I$ si ha $\mu\, \mathrm{Tor}\,(M_i\,,\ X)=0$.

Per la distributività dei funtori μ e $\mathrm{Tor}\,(-,\ X)$ rispetto alla somma diretta, si ha $\mu\, \mathrm{Tor}\,(\mathrm{Coker}\, L,\ X) = \mu\, \mathrm{Tor}\,(t\, \mathrm{Coker}\, L,\ X) = 0$.

Resta quindi definito l'isomorfismo ε dalla commutatività del diagramma (3).

Noto $\mathrm{Ker}\, \Phi$ possiamo considerare la sequenza esatta:

$$0 \to \mu\, \mathrm{Ker}\, \Phi \to \mathrm{Ker}\, \Phi \xrightarrow{\tau} \mathrm{Ker}\, \Phi/\mu\, \mathrm{Ker}\, \Phi \to 0 \tag{2'}$$

che, essendo $\mu \operatorname{Ker} \Phi$ divisibile, è spezzante; possiamo quindi scegliere un morfismo ν inverso a destra di τ:

$$\nu : \operatorname{Ker} \Phi / \mu \operatorname{Ker} \Phi \rightarrow \operatorname{Ker} \Phi .$$

Lo spazio delle soluzioni $\operatorname{Ker} \Phi$ è allora somma diretta dei suoi sottomoduli $\mu \operatorname{Ker} \Phi$ e $\operatorname{Im} \nu$.

La sequenza spezzante (2′) coincide a meno di isomorfismi con la (2), però non dipende più dalla matrice L che caratterizza il sistema, ma solo dallo spazio delle soluzioni $\operatorname{Ker} \Phi$.

Nella nota citata al n. 1 s'introduce la nozione di ordine globale di un sistema del tipo (1), nell'ipotesi che Λ sia una K-algebra (principale), come $\dim_K \operatorname{Tor}(\operatorname{Coker} L, X)$.

Possiamo quindi enunciare il seguente:

TEOREMA 2. *L'ordine globale è invariante per sistemi equivalenti in quanto dipende unicamente dallo spazio delle soluzioni.*

3. Osserviamo che $\operatorname{Ker} \Phi / \mu \operatorname{Ker} \Phi$ è un modulo di torsione; infatti tale è $\operatorname{Tor}(\operatorname{Coker} L, X)$ (Cfr. [1], p. 310). Esso è perciò decomponibile nella somma diretta delle sue componenti $\mathfrak{p}$-primarie: $X = \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{B}} X_{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{B}$ è l'insieme degli ideali primi di Λ.

Converrà introdurre la seguente:

DEFINIZIONE 1. *Diciamo ordine ridotto del sistema* (1) *il numero* (*eventualmente infinito*) *delle componenti primarie non nulle di* $\operatorname{Ker} \Phi / \mu \operatorname{Ker} \Phi$.

Vale in proposito il:

TEOREMA 3. *Per ogni sistema* (1) *l'ordine globale è maggiore od uguale dell'ordine ridotto; ed è uguale se e solo se*

$$\dim_K (\operatorname{Ker} \Phi / \mu \operatorname{Ker} \Phi)_{\mathfrak{p}} \leq 1$$

per ogni $\mathfrak{p} \in \mathfrak{B}$.

DIM. $\operatorname{Ker}\Phi/\mu\operatorname{Ker}\Phi=\bigoplus\limits_{\mathfrak{p}\in\mathfrak{B}}(\operatorname{Ker}\Phi/\mu\operatorname{Ker}\Phi)_{\mathfrak{p}}$ quindi

$$\dim_K(\operatorname{Ker}\Phi/\mu\operatorname{Ker}\Phi)=\sum_{\mathfrak{p}\in\mathfrak{B}}\dim_K(\operatorname{Ker}\Phi/\mu\operatorname{Ker}\Phi)_{\mathfrak{p}}$$

da cui si ha la tesi.

Si osservi che se $\operatorname{Ker}\Phi/\mu\operatorname{Ker}\Phi$ è un modulo finitamente generato l'ordine ridotto del sistema (1) è finito (cfr. [2], p. 74). In tale ipotesi scelto un sistema di generatori $v_1, v_2, \ldots, v_r$, di $\operatorname{Im}\nu$ la soluzione generale del sistema (1) sarà esprimibile nella forma:

$$\begin{aligned}
x_1&=\vartheta_{11}u_1+\vartheta_{12}u_2+\ldots+\vartheta_{1k}u_k+\lambda_1v_{11}+\lambda_2v_{12}+\ldots+\lambda_rv_{1r}\\
x_2&=\vartheta_{21}u_1+\vartheta_{22}u_2+\ldots+\vartheta_{2k}u_k+\lambda_1v_{21}+\lambda_2v_{22}+\ldots+\lambda_rv_{2r}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_p&=\vartheta_{p1}u_1+\vartheta_{p2}u_2+\ldots+\vartheta_{pk}u_k+\lambda_1v_{p1}+\lambda_2v_{p2}+\ldots+\lambda_rv_{pr}
\end{aligned}$$

al variare dei parametri $u_1, u_2, \ldots, u_k$ in X e $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ in Λ; ove $\{\vartheta_{ij}\}$ è una matrice di elementi di Λ (cfr. [1]) e $v_j=(v_{1j}, v_{2j}, \ldots, v_{pj})\in tX^p$; e quindi le componenti v_{ij} sono elementi della torsione tX. Si noti che la soluzione individua univocamente i parametri u_j, ma non univocamente i λ_i.

Un criterio per riconoscere se $\operatorname{Ker}\Phi/\mu\operatorname{Ker}\Phi$ è di tipo finito come Λ-modulo è fornito dal:

TEOREMA 4. *Condizione necessaria et sufficiente affinchè per ogni sistema del tipo* (1), $\operatorname{Ker}\Phi/\mu\operatorname{Ker}\Phi$ *sia un modulo finitamente generato è che per ogni numero naturale n e per ogni elemento primo $\pi\in\Lambda$ l'endomorfismo $\pi^n : X\to X$ abbia nucleo finitamente generato.*

DIM. Che la condizione sia necessaria è banale poichè basta considerare i sistemi $\pi^n x=0$ al variare di π elemento primo in Λ e n numero naturale.

Per provare la sufficienza osserviamo che:

$$\operatorname{Tor}(\operatorname{Coker}L, X)=\bigoplus_{i\in I}\operatorname{Ker}(X\xrightarrow{\lambda_i}X)\qquad\text{(cfr. n. 3)}$$

per opportuni $\lambda_i\in\Lambda$.

Ma se $\lambda=\lambda_0 \Pi \pi_j^{n_j}$ con π_j elementi primi e λ_0 divisore dell'unità in Λ

$$\mathrm{Ker}\,(X \xrightarrow{\lambda} X) = \bigoplus_j \mathrm{Ker}\,(X \xrightarrow{\pi_j^{n_j}} X)$$

(cfr. [2] § 2, prop. 1) e quindi la tesi.

4. In questo numero dimostriamo che il rango (cfr. n. 1) è invariante per sistemi equivalenti. Al fine di provare ciò premettiamo alcuni lemmi.

Lemma 1. Sia $X \neq 0$ e $\sigma : \Lambda^k \to \Lambda^{k'}$ un morfismo di Λ-moduli. Se $\sigma \otimes X : X^k \to X^{k'}$ è un isomorfismo di Λ-moduli allora Coker σ è un modulo di torsione.

Dim. Tensorializzando con X la sequenza esatta:

$$0 \to \mathrm{Ker}\,\sigma \to \Lambda^k \to \Lambda^{k'} \to \mathrm{Coker}\,\sigma \to 0$$

si ha la sequenza pure esatta:

$$0 \to \mathrm{Tor}\,(\mathrm{Coker}\,\sigma,\ X) \to \mathrm{Ker}\,\sigma \otimes X \to X^k \to X^{k'} \to \mathrm{Coker}\,\sigma \otimes X \to 0$$

in cui Coker $\sigma \otimes X=0$.

Posto Coker $\sigma = \bigoplus_i M_i$ (somma diretta finita), gli M_i essendo dei moduli ciclici, risulta Coker $\sigma \otimes X = \bigoplus_i M_i \otimes X = 0$ da cui segue che gli M_i devono essere moduli di torsione e tale dovrà essere anche Coker σ.

Lemma 2. Sia T un Λ-modulo di torsione e

$$\Lambda^k \xrightarrow{\sigma} \Lambda^{k'} \to \Lambda^n \oplus T \to 0 \tag{4}$$

una sequenza esatta di Λ-moduli.

Se $k<k'$ allora $n>0$.

DIM. Sia K il corpo delle frazioni su Λ. Tensorializzando con K la sequenza (4) si ha la sequenza esatta di spazi vettoriali:

$$0 \to (\mathrm{Ker}\,\sigma) \otimes K \to K^k \to K^{k'} \to K^n \to 0$$

da cui:

$$\dim_K (\mathrm{Ker}\,\sigma) \otimes K + k' = k + n$$

essendo $k' \leq k+n$ segue la tesi.

LEMMA 3. Sia $X \neq 0$ e $\sigma : \Lambda^k \to \Lambda^{k'}$ un morfismo di Λ-moduli, se $\sigma \otimes X : X^k \to X^{k'}$ è un isomorfismo di Λ-moduli allora $k = k'$.

DIM. Ovviamente si ha $(\mathrm{Ker}\,\sigma) \otimes X = 0$; essendo $\mathrm{Ker}\,\sigma$ isomorfo a Λ^n si ha, tensorializzando con X, $(\mathrm{Ker}\,\sigma) \otimes X = X^n = 0$ da cui $n = 0$. L'asserto è allora immediata conseguenza dei lemmi precedenti.

TEOREMA 5. *Il rango è invariante per sistemi equivalenti.*

DIM. Siano L ed L' due matrici a termini in Λ del tipo (p, q) e (p, q') rispettivamente e siano $\Phi = L \otimes X : X^p \to X^q$ e $\Phi' = L' \otimes X : X^p \to X^{q'}$ i morfismi associati.

Poichè $\mathrm{Ker}\,L$ è sottomodulo di Λ^p esiste un monomorfismo $\vartheta : \Lambda^k \to \Lambda^p$ che fornisce una rappresentazione di $\mathrm{Ker}\,L$. Poichè $\mathrm{Ker}\,L$ è componente diretta in Λ^p esisterà un morfismo $\eta : \Lambda^p \to \Lambda^k$ inverso a destra di ϑ; analogamente sia $\vartheta' : \Lambda^{k'} \to \Lambda^p$ una rappresentazione di $\mathrm{Ker}\,L'$ ed η' un inverso a destra di ϑ'.

Posto $\sigma = \eta' \circ \vartheta : \Lambda^k \to \Lambda^{k'}$ si ha che $\sigma \otimes X : X^k \to X^{k'}$ è isomorfismo; infatti nel diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
X^k \arrow[r, "\vartheta \otimes X"] \arrow[dr, "\bar{\vartheta}"'] & X^p \arrow[r, "\eta' \otimes X"] & X^{k'} \\
& \mu\,\mathrm{Ker}\,\Phi \arrow[u] \arrow[ur, "\bar{\eta}"'] &
\end{tikzcd}$$

in cui la freccia verticale è l'inclusione, i morfismi $\bar{\vartheta}$ ed $\bar{\eta}$ sono isomorfismi.

Allora, atteso che k e k' sono il rango dei sistemi di equazioni aventi rispettivamente L ed L' come matrici associate, per il lemma 3 si ha $k=k'$ da cui l'asserto.

BIBLIOGRAFIA

[1] Darbo, G.: *Sulla rappresentazione parametrica della soluzione generale di un sistema di equazioni lineare in un modulo sopra un anello principale,* Rend. Sem. Mat. Un. Padova, 1967, pp. 307-311.

[2] Bourbaki, N.: *Algebra Cap. VII (Moduli su anelli principali).*

[3] Boero, P.: *Metodi omologici elementari ...,* Rend. del Sem. Mat. Un. Padova, 1967, pp. 289-306.

Manoscritto pervenuto in redazione il 21 maggio 1971.