RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

FEDERICO MENEGAZZO

Alcune proprietà gruppali invarianti per semi-isomorfismi

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 46 (1971), p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1971__46__1_0>

ALCUNE PROPRIETÀ GRUPPALI INVARIANTI PER SEMI-ISOMORFISMI

FEDERICO MENEGAZZO *)

In [3] è introdotta la nozione di semi-isomorfismo tra gruppi: una applicazione $\varphi : G \to H$, dove G, H sono gruppi, è detta un semi-isomorfismo se è biiettiva e $(xyx)\varphi = x\varphi y\varphi x\varphi$ per ogni coppia x, y di elementi di G. L'origine di tale nozione può essere rintracciata in questioni di teoria dei corpi non commutativi (cfr. il teorema di Hua [1]); il suo significato nella teoria dei gruppi è principalmente nella connessione con gli isomorfismi reticolari e con gli S-isomorfismi, messa in evidenza in [4], [5] e [3]. Questo lavoro tratta una questione che si pone in maniera naturale: quali proprietà gruppali sono invarianti per semi-isomorfismi? Più esplicitamente, se G è un gruppo abeliano, nilpotente, ecc. e φ è un semi-isomorfismo di G sul gruppo H, è ancora H abeliano, nilpotente, ecc.? Per trattare questo ordine di problemi è sembrato conveniente introdurre in maniera ovvia la nozione di semi-omomorfismo. I risultati ottenuti sono riassunti nella proposizione seguente:

Sia φ un semi-omomorfismo del gruppo G su tutto il gruppo H. Se G è nilpotente (rispettivamente: superiormente nilpotente, risolubile, supersolubile), allora H è nilpotente (rispettivamente: superiormente nilpotente, risolubile, supersolubile).

Le notazioni sono quelle usuali nella teoria dei gruppi; le applicazioni sono scritte a destra.

---

*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, 35100 Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei programmi di ricerca matematica del C.N.R.

1. Definizioni e prime proprietà.

DEFINIZIONE 1.1. Siano G, H gruppi, $\varphi : G \to H$ un'applicazione. φ si dirà semi-omomorfismo se per ogni coppia x, y di elementi di G si ha $(xyx)\varphi = x\varphi y\varphi x\varphi$. Il semi-omomorfismo φ si dice naturale se è suriettivo e se $1\varphi = 1$ (cioè se l'immagine dell'unità di G è l'unità di H). φ è un semi-isomorfismo se è un semi-omomorfismo biiettivo. Se $\varphi : G \to H$ è un semi-omomorfismo suriettivo (rispettivamente: semi-isomorfismo) si dice che H è immagine semi-omomorfa di G (rispettivamente: semi-isomorfa, oppure G e H semi-isomorfi).

PROPOSIZIONE 1.2. Sia $\varphi : G \to H$ un semi-omomorfismo. Allora $(1\varphi)^2 = 1$; inoltre $1\varphi x\varphi = x\varphi 1\varphi$ per ogni $x \in G$.

PROPOSIZIONE 1.3. Se il semi-omomorfismo $\varphi : G \to H$ è suriettivo, 1φ è nel centro di H; inoltre $\psi : G \to H$ definito ponendo $x\psi = x\varphi 1\varphi$ è un semi-omomorfismo naturale.

PROPOSIZIONE 1.4. Sia $\varphi : G \to H$ un semi-omomorfismo tale che $1\varphi = 1$. Per ogni $x \in G$ e per ogni intero n si ha $(x\varphi)^n = x^n\varphi$.

PROPOSIZIONE 1.5. Ogni omomorfismo e ogni anti-omomorfismo è un semi-omomorfismo; se $\varphi : G \to H$ e $\psi : H \to K$ sono semi-omomorfismi (naturali), anche $\varphi\psi : G \to K$ è un semi-omomorfismo (naturale); se $\varphi : G \to H$ è un semi-isomorfismo anche $\varphi^{-1} : H \to G$ è un semi-isomorfismo.

PROPOSIZIONE 1.6. Sia $\varphi : G \to H$ un semi-omomorfismo naturale; se x, $y \in G$ sono permutabili e $(xy)\varphi = x\varphi y\varphi t$, allora t appartiene al centro di H e $t^2 = [y\varphi, x\varphi]$.

PROPOSIZIONE 1.7. Sia $\varphi : G \to H$ un semi-omomorfismo naturale. Se $g \in G$, l'applicazione $\psi : G \to H$ definita dalla posizione $x\psi = (g\varphi)^{-1} (gx)\varphi$ è un semi-omomorfismo naturale.

Le dimostrazioni degli enunciati precedenti, quando non sono ovvie, si ottengono facilmente rielaborando le dimostrazioni degli analoghi risultati, relativi ai semi-isomorfismi, contenuti in [3].

PROPOSIZIONE 1.8. Sia $\varphi : G \to H$ un semi-omomorfismo naturale. Se N è un sottogruppo normale di G tale che $x\varphi y\varphi = 1$ ogni volta che x, $y \in G$, $xy \in N$, allora $(xN)\bar{\varphi} = x\varphi$ definisce un semi-omomorfismo naturale $\bar{\varphi}: G/N \to H$. Inoltre la famiglia $\mathfrak{F}$ dei sottogruppi normali di G godenti tale proprietà è non vuota e, rispetto all'ordinamento per inclusione, è induttiva.

Siano $x, y \in G$ tali che $xN = yN$; allora $x^{-1}y \in N$, quindi $x^{-1}\varphi y\varphi = (x\varphi)^{-1}y\varphi = 1$, da cui $x\varphi = y\varphi$. Ne consegue che $\bar{\varphi}$ è un'applicazione ben definita, ed è ovvio che si tratti di un semi-omomorfismo naturale. Quanto alla seconda parte, segue da 1.4 che $xy = 1$ implica $x\varphi y\varphi = 1$, e cioè che il sottogruppo identico appartiene ad $\mathfrak{F}$; inoltre se $\{N_i\}$ è una catena di sottogruppi normali di G tali che $xy \in N_i$ implica $x\varphi y\varphi = 1$ per ogni N_i, posto $N = \bigcup N_i$ è chiaro che se $xy \in N$ allora $x\varphi y\varphi = 1$, e cioè $N \in \mathfrak{F}$.

2. Semi-omomorfismi e nilpotenza [1]).

Definizione 2.1. Il gruppo G si dice superiormente nilpotente se ogni immagine omomorfa non identica di G ha centro non identico.

Teorema 2.2. Sia $\varphi: G \to H$ un semi-omomorfismo del gruppo superiormente nilpotente G su tutto il gruppo H. Allora H è superiormente nilpotente.

Per 1.3 non è restrittivo supporre che φ sia un semi-omomorfismo naturale. Sia K una immagine omomorfa non identica di H, $\sigma: H \to K$ un omomorfismo suriettivo; $\psi = \varphi\sigma$ è un semi-omomorfismo naturale. Sia M un elemento massimale della famiglia $\mathfrak{F}$ dei sottogruppi normali N di G tali che $xy \in N \in \mathfrak{F}$ implica $x\psi y\psi = 1$. $M\psi = 1 \neq K = G\psi$, quindi $M \neq G$; poichè G è superiormente nilpotente il centro L/M di G/M è non identico. Per la massimalità di M ciò implica che esistono $x, y \in G$ tali che $xy \in L$ e $x\psi y\psi \neq 1$. Per 1.8 $(gM)\bar{\psi} = g\psi$ definisce un semi-omomorfismo naturale di G/M su K. Se esistono $g, h \in G$ tali che $[gM, hM] = 1$ e $(gMhM)\bar{\psi} \neq (gM)\bar{\psi}(hM)\bar{\psi}$, per 1.6 il centro di K non è identico; possiamo dunque supporre che, qualunque siano $g, h \in G$, da $[gM, hM] = 1$ segua $(gM)\bar{\psi}(hM)\bar{\psi} = (gMhM)\bar{\psi} = (hMgM)\bar{\psi} = (hM)\bar{\psi}(gM)\bar{\psi}$. In

---

[1]) Si osservi che da 1.3, 1.4 segue immediatamente che ogni immagine semi-omomorfa di un gruppo ciclico è ancora un gruppo ciclico. Non è invece vero che ogni immagine semi-omomorfa di un gruppo abeliano sia un gruppo abeliano ([2], [3]).

particolare sarà $(xyM)\bar{\psi}=(xM)\bar{\psi}(yM)\bar{\psi}=x\psi y\psi\neq 1$, e per ogni $g\in G$, poichè $[gM, xyM]=1$, sarà $[(gM)\bar{\psi}, (xyM)\bar{\psi}]=[g\psi, x\psi y\psi]=1$; cioè $x\psi y\psi$ è un elemento non identico del centro di K, e ciò conclude la dimostrazione.

TEOREMA 2.3. Sia $\varphi: G\rightarrow H$ un semi-omomorfismo del gruppo G su tutto il gruppo H. Se G è nilpotente di classe n, H è nilpotente di classe al più $2n$.

Per 1.3 non è restrittivo supporre che φ sia un semi-omomorfismo naturale. Sia $z\in Z_1(G)$; per ogni $g\in G$, posto $(gz)\varphi=g\varphi z\varphi t$, risulta $t\in Z_1(H)$, $[z\varphi, g\varphi]=t^2\in Z_1(H)$, e cioè $z\varphi\in Z_2(H)$. Siano poi x, $y\in G$ tali che $xy\in Z_1(G)$; poichè $[x, y]=1$, si ha $x\varphi y\varphi=(xy)\varphi u$ con $u\in Z_1(H)$ per 1.6 e $(xy)\varphi\in Z_2(H)$ per l'osservazione precedente, da cui $x\varphi y\varphi\in Z_2(H)$.

Per 1.8 $(gZ_1(G))\psi=g\varphi Z_2(H)$ definisce un semi- omomorfismo naturale di $G/Z_1(G)$ su $H/Z_2(H)$; per l'ipotesi induttiva $H/Z_2(H)$ ha classe al più $2(n-1)$, e in definitiva H è nilpotente di classe al più $2n$.

Si osservi che questa limitazione non è in ogni caso la migliore possibile, come mostra la proposizione seguente.

PROPOSIZIONE 2.4. Sia $\varphi: G\rightarrow H$ un semi-omomorfismo suriettivo. Se G è nilpotente di classe al più 2, H ha classe al più 3.

Come al solito supporremo che φ sia un semi-omomorfismo naturale. Nelle attuali ipotesi per ogni a, $b\in G$ si ha $[b^{-1}ab, a]=1$; posto $c=b^{-1}a$ si ottiene $[cb, bc]=1$ per ogni b, $c\in G$, e cioè $cb^2c=bc^2b$. Ma allora $c\varphi(b\varphi)^2c\varphi=b\varphi(c\varphi)^2b\varphi$ per ogni coppia $b\varphi$, $c\varphi$ di elementi di H, e in definitiva $[u^{-1}vu, v]=1$ qualunque siano u, $v\in H$. Per un teorema di Levi [6] H è nilpotente di classe al più 3.

3. Semi-omomorfismi e risolubilità.

DEFINIZIONE 3.1. Il gruppo G si dice risolubile se ogni immagine omomorfa non identica di G ha un sottogruppo abeliano normale non identico.

TEOREMA 3.2. Sia $\varphi: G\rightarrow H$ un semi-omomorfismo suriettivo. Se G è risolubile, allora H è risolubile.

Non è restrittivo supporre φ semi-omomorfismo naturale. Sia K una immagine omomorfa non identica di H, $\sigma: H\rightarrow K$ un omomorfismo suriettivo; $\psi=\varphi\sigma$ è allora un semi-omomorfismo naturale di G su K. Sia M un sottogruppo di G, massimale rispetto alla proprietà di essere normale e tale che $xy\in M$ implica $x\psi y\psi=1$; poichè $M\psi=1\neq K=G\psi$, risulta $M\neq G$. G/M ha dunque un sottogruppo normale abeliano non identico N/M; per la massimalità di M esistono $u, v\in G$ tali che $uv\in N$, $u\psi v\psi\neq 1$. Come si è osservato in 1.8 per ogni $g\in G$, $m\in M$ $(gm)\psi=g\psi$. Fissato ad arbitrio $g\in G$, poichè $N\trianglelefteq G$ e N/M è abeliano, risulta $m=$ $=[g^{-1}uvg, (uv)^{-1}]\in M$, e dunque $guvg^{-1}vug=vugmuv$, da cui

$$g\psi u\psi v\psi(g\psi)^{-1}v\psi u\psi g\psi=v\psi u\psi(gm)\psi u\psi v\psi=v\psi u\psi g\psi u\psi v\psi,$$

e cioè

$$g\psi(u\psi v\psi)(g\psi)^{-1}(v\psi u\psi)=(v\psi u\psi)g\psi(u\psi v\psi)(g\psi)^{-1}.$$

Ne consegue che $u\psi v\psi$ permuta con tutti i suoi coniugati in H, e dunque H contiene il sottogruppo abeliano normale non identico $\langle u\psi v\psi\rangle^{H}$.

Si noti che, a differenza di quanto accade per la nilpotenza, non è disponibile un risultato che assicuri l'esistenza in H di una catena normale finita a quozienti abeliani qualora ciò si verifichi in G.

4. Semi-omomorfismi e supersolubilità.

DEFINIZIONE 4.1. Il gruppo G si dice supersolubile se ogni immagine omomorfa non identica di G ha un sottogruppo normale ciclico non identico.

TEOREMA 4.2. Sia $\varphi: G\to H$ un semi-omomorfismo suriettivo. Se G è supersolubile, allora H è supersolubile.

Non è restrittivo supporre che φ sia un semi-omomorfismo naturale. Sia K una immagine omomorfa non identica di H, $\sigma: H\to K$ un omomorfismo suriettivo; $\psi=\varphi\sigma$ è un semi-omomorfismo naturale di G su K. Sia M un sottogruppo di G massimale rispetto alla proprietà di essere normale e tale che $xy\in M$ implica $x\psi y\psi=1$. Per 1.8 $(gM)\overline{\psi}=$ $=g\psi$ definisce un semi-omomorfismo naturale di G/M su K, e G/M è ancora supersolubile; non è pertanto restrittivo supporre, come faremo nel seguito, $M=1$ e $\overline{\psi}=\psi$. Se esistono $x, y\in G$ tali che $[x, y]=1$,

$(xy)\psi \neq x\psi y\psi$, per 1.6 il centro di K, contenendo $(xy)\psi(x\psi y\psi)^{-1}$, non è identico e non c'è niente da dimostrare. Possiamo dunque supporre che $[x, y]=1$ implichi $(xy)\psi = x\psi y\psi$, da cui $[x\psi, y\psi]=1$. Sia ora $\langle a \rangle$ un sottogruppo normale ciclico non identico di G, con a aperiodico o di ordine primo, e supponiamo risulti $a\psi \neq 1$. Dimostriamo innanzitutto che se $[x, a]=1$, allora $x\psi \in \mathcal{C}(\langle a\psi \rangle^K)$: infatti per ogni $g \in G$ risulta $g^{-1}agxgag^{-1} = g^{-1}ag^2ag^{-1}x$ e inoltre $[g^{-1}ag^2ag^{-1}, x]=1$; allora

$$(g^{-1}agxgag^{-1})\psi = (g\psi)^{-1}a\psi g\psi x\psi g\psi a\psi (g\psi)^{-1} =$$
$$= (g^{-1}ag^2ag^{-1})\psi x\psi = (g\psi)^{-1}a\psi (g\psi)^2 a\psi (g\psi)^{-1}x\psi,$$

da cui

$$x\psi(g\psi a\psi (g\psi)^{-1}) = (g\psi a\psi (g\psi)^{-1})x\psi,$$

come volevasi. Dimostriamo ora che $\mathcal{C}_K(a\psi) = \mathcal{C}_K(\langle a\psi \rangle^K)$ (una delle inclusioni è ovvia). Sia $k \in K$ tale che $[k, a\psi]=1$, $k = g\psi$; se $[g, a]=1$ per quanto visto sopra $k \in \mathcal{C}_K(\langle a\psi \rangle^K)$. Supponiamo dunque $[g, a] \neq 1$: se a è aperiodico risulta

$$gag^{-1} = a^{-1}, \ g = aga, \ g\psi = (aga)\psi = g\psi(a\psi)^2,$$

da cui $(a\psi)^2 = 1$; ma allora qualunque sia $x \in G$ risulta $[x\psi, a\psi]=1$: se $[x, a]=1$ ciò segue da una osservazione precedente, mentre se $[x, a] \neq 1$ $x = axa$ e quindi

$$x\psi = a\psi x\psi a\psi = a\psi x\psi (a\psi)^{-1},$$

come volevasi; cioè $a\psi \in Z_1(K)$, $\langle a\psi \rangle^K = \langle a\psi \rangle$ e l'asserto è dimostrato. Non è invece possibile che sia $[g, a] \neq 1$ se $|a|$ è un numero primo p: se $g^{-1}ag = a^r$ ed s è tale che $rs \equiv 1$ (mod. p) risulta

$$ag^2a = ga^{r+s}g, \ (ag^2a)\psi = k^2(a\psi)^2 = (ga^{r+s}g)\psi = k^2(a\psi)^{r+s},$$

da cui $(a\psi)^2 = (a\psi)^{r+s}$, $(a\psi)^{(r-1)^2} = 1$; ma allora $p \mid (r-1)^2$, $p \mid r-1$ e $[g, a]=1$. Siano ora $x, y \in G$ tali che $xy \in \mathcal{C}_G(a)$; poichè $\mathcal{C}_G(a) \trianglelefteq G$ risulta

$$[y^{-1}x^{-2}y^{-1}, a] = [(xy)^{-1}x^{-1}(xy)^{-1}x, a] = 1.$$

Si ha allora

$$a=xya(xy)^{-1}=xy(ay^{-1}x^{-2}y^{-1})yx,\ a\psi=x\psi y\psi(ay^{-1}x^{-2}y^{-1})\psi y\psi x\psi=$$
$$=x\psi y\psi a\psi(y\psi)^{-1}(x\psi)^{-2}(y\psi)^{-1}y\psi x\psi=x\psi y\psi a\psi(y\psi)^{-1}(x\psi)^{-1},$$

e dunque

$$x\psi y\psi\in\mathcal{C}_K(a\psi)=\mathcal{C}_K(\langle a\psi\rangle^K).$$

Per 1.8 $(g\mathcal{C}_G(a))\chi=g\psi\mathcal{C}_K(\langle a\psi\rangle^K)$ definisce un semi-omomorfismo naturale $\chi: G/\mathcal{C}_G(a)\to K/\mathcal{C}_K(\langle a\psi\rangle^K)$; ne consegue che $K/\mathcal{C}_K(\langle a\psi\rangle^K)$ è ciclico e il suo ordine divide l'ordine di $G/\mathcal{C}_G(a)$; esso è dunque 1 o 2 se a è aperiodico, un divisore di $p-1$ se $|a|=p$. Tenendo conto del fatto che $\langle a\psi\rangle^K$ è abeliano, e anzi un p-gruppo abeliano elementare se $|a|=p$, si verifica immediatamente che $\langle a\psi\rangle^K$ contiene sottogruppi ciclici non identici normali in K, ciò che occorreva dimostrare. Supponiamo ora $a\psi=1$; per le ipotesi fatte esistono u, $v\in G$ tali che $u\psi v\psi\neq 1$, $uv\in\langle a\rangle$ (non è restrittivo supporre addirittura $uv=a$). L'applicazione $\eta: G\to K$ definita ponendo $g\eta=(v\psi)^{-1}(vg)\psi$ è, a norma di 1.7, un semi-omomorfismo naturale, per il quale risulta

$$a\eta=(v\psi)^{-1}(va)\psi=(v\psi)^{-1}(vuv)\psi=u\psi v\psi\neq 1,$$

e la discussione precedente prova che $\langle a\eta\rangle^K$ contiene un sottogruppo ciclico non identico di K, dimostrando così completamente l'asserto.

Si noti che il risultato precedente non garantisce che, se G ha una catena principale a fattoriali ciclici con n termini, H abbia pure una catena principale finita a fattoriali ciclici, nè tanto meno fornisce una limitazione per il numero dei termini di siffatta catena in termini di n.

BIBLIOGRAFIA

[1] ARTIN, E.: *Geometric Algebra*, Interscience, 1957.

[2] LARIN, S. V.: *Semi-isomorphisms of periodic Abelian groups*, Sib. Math. J. 7, 2 (1966).

[3] LARIN, S. V. e LOIKO, N. V.: *Semi-isomorphisms of Abelian groups without torsion,* Sib. Math. J. 7, 2 (1966).

[4] LOIKO, N. V.: *S-isomorphisms of metabelian groups without torsion,* Matem. zapiski Ural'sk. mat. ob-va. 5, 1 (1964).

[5] LOIKO, N. V.: *S-isomorphisms of compound Abelian groups of rank* $r = 1$, Sib. mat. zh. 6, 5 (1965).

[6] SCHENKMAN, E.: *Group theory,* Van Nostrand, 1965.

Manoscritto pervenuto in redazione il 19 settembre 1970.