RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

HUGO BEIRÃO DA VEIGA

Proprietà di sommabilità e di limitatezza per soluzioni di disequazioni variazionali ellittiche

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 46 (1971), p. 141-171

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1971__46__141_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

PROPRIETÀ DI SOMMABILITÀ E DI LIMITATEZZA PER SOLUZIONI DI DISEQUAZIONI VARIAZIONALI ELLITTICHE

HUGO BEIRÃO DA VEIGA *)

Introduzione.

Dati x, $y \in \boldsymbol{R}^N$ indicheremo con $|x|$ e $x \cdot y$ rispettivamente il modulo di x ed il prodotto scalare di x e y; rappresenteremo con (x_i) il vettore di $\boldsymbol{R}^N$ di componenti x_i. *Se* $f(x)=(f_i(x))$ e se $f_i(x) \in X$, ove X è uno spazio di funzioni, porremo per comodità $\| f \|_X = \| \, | f | \, \|_X$.

Indicheremo con Ω un aperto limitato di $\boldsymbol{R}^N$ di frontiera $\partial\Omega$ e supporremo nota la definizione dello spazio $L^p(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. Porremo $p'=p/(p-1)$ e, se $1 \leqslant p < N$, $p^*=pN/(N-p)$, $\bar{p}=(p^*)'$.

Sia $V=H^{1,\alpha}(\Omega)$ lo spazio di Sobolev [1]) relativo all'esponente α, $1<\alpha<N$, V' il duale di V e $\langle \, , \, \rangle$ il pairing fra V' e V. Indicheremo con $A : V \to V'$ l'operatore variazionale ellittico non lineare definito da (1.18), ossia

$$(1) \qquad \langle Au, v \rangle = \int_\Omega \{ A(x, \nabla u) \cdot \nabla v + \lambda(x) \, | u |^{\alpha-2} uv \} dx, \qquad \forall v \in V,$$

con $A(x, p)$ soddisfacente (1.16), (1.17).

Siano $\Phi_i : V \to \boldsymbol{R} \cup \{+\infty\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, funzionali convessi s.c.i. (semi continui inferiormente) e propri ($\not\equiv +\infty$) definiti da (1.14) [2]) ossia

---

*) Indirizzo dell'A.: Instituto de Fisica e Matemática, Av. Gama Pinto, 2 Lisboa - 4 Portogallo.

[1]) Per definizioni precise vedi i numeri seguenti.

[2]) Per alcuni esempi semplici di tali funzioni cf. l'appendice I.

$$\Phi_i(v)=\int_{B_i} \varphi_i(x,\ \gamma_i v(x))d\mu_i(x) \tag{2}$$

con B_i, μ_i, φ_i e γ_i (ed anche ξ_i) soddisfacenti l'ipotesi 1.4 scritta per $p=\alpha$; inoltre siano $\Psi_j : V \to \boldsymbol{R} \cup \{+\infty\}$, $1 \leqslant j \leqslant m$, m funzionali convessi, s.c.i. e propri del tipo (1.15) i.e.

$$\Psi_j(v)=\begin{cases} 0 \text{ se } v \geqslant \theta_j \text{ [opp. se } v \leqslant \theta_j] \text{ su } E_j, \\ +\infty \text{ altrove,} \end{cases} \tag{3}$$

ove $E_j \subset \overline{\Omega}$ è chiuso e $\theta_j \in V$. Supponiamo finalmente che esista $u_0 \in V$ per cui $\Phi_i(u_0) < +\infty$ e $\Psi_j(u_0) < +\infty$ per tutti gli indici i e j.

Dato che l'operatore A è monotono, emicontinuo, limitato e coercitivo su V la disequazione variazionale

$$\begin{aligned} \langle Au,\ v-u\rangle + \sum_{i=1}^{n} [\Phi_i(v)-\Phi_i(u)] + \\ + \sum_{j=1}^{m} [\Psi_j(v)-\Psi_j(u)] \geqslant \langle F,\ v-u\rangle, \qquad \forall v \in V, \end{aligned} \tag{4}$$

ammette una ed una sola soluzione $u \in V$ per ogni $F \in V'$ (cf. ad esempio [10] teor. 8.5).

Supposto F scritto sotto la forma (1.22) dimostreremo in questo lavoro risultati di regolarità del seguente tipo [3]):

Se $f_0 \in L_*^p(\Omega)$, $f \in [L_*^q(\Omega)]^N$ e le funzioni ξ_i e θ_j relative *ai funzionali* Φ_i e Ψ_j (cf. (1.12)) appartengono a spazi $H^{1,s}(\Omega)$, [resp. $L^\infty(\Omega)$], con p, q e s convenienti, allora la soluzione u del problema (4) appartiene a $L_*^\beta(\Omega)$, con $\beta=\beta(p,\ q,\ s)$ [resp. a $L^\infty(\Omega)$]. Inoltre saranno dimostrate maggiorazioni per le corrispondenti norme delle soluzioni (cf. (2.39′), (2.40′), (2.42′), (2.43), p. 20). Per i dettagli rimandiamo il lettore al teorema 2.9 (cf. anche i teoremi 2.8 e 2.10).

Risultati di questo tipo si generalizzano ad operatori della forma

---

3) Per la definizione di $L_*^p(\Omega)$ cf. la def. 1.1.

$$(5) \qquad \langle Au, v\rangle = \int_\Omega \{A(x, u, \nabla u)\cdot \nabla v + B(x, u, \nabla u)v\}dx$$

ove $A : \Omega \times \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^N \to \boldsymbol{R}^N$ e $B : \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^N \to \boldsymbol{R}$, misurabili nella prima variabile e continue nelle altre due soddisfano le maggiorazioni (gli esponenti di $|y|$ possono essere aumentati. Cf. [16] teorema IV)

$$(6) \qquad \begin{cases} A(x, y, p)\cdot p \geqslant a\,|p|^\alpha - b(x)\,|y|^\alpha - l(x), \\ |B(x, y, p)| \leqslant d(x)\,|p|^{\alpha-1} + e(x)|y|^{\alpha-1} + f(x), \\ |A(x, y, p)| \leqslant a^{-1}\,|p|^{\alpha-1} + g(x)\,|y|^{\alpha-1} + h(x), \end{cases}$$

con a costante positiva; la regolarità delle soluzioni u della disequazione (4) dipenderà allora dagli spazi L^p cui si suppongono appartenere le funzioni al secondo membro delle relazioni (6).

Per particolari funzionali convessi Φ tali risultati (relativi all'opetore A definito in (5)) sono stati dimostrati in [16], teor. I, II e IV [4]); cfr. anche [17]. Essendo lo scopo di questo lavoro generalizzare la forma del funzionale convesso Φ tralascieremo di considerare l'operatore più generale A per semplificare l'esposizione; A sarà dato da (1.18), (1.16), (1.17).

Il metodo seguito per dimostrare il teorema 2.9 si ricollega ad un noto metodo introdotto da G. Stampacchia (cf. ad esempio [14]).

Con la tecnica usata nel presente lavoro si possono ottenere, per le soluzioni di (4), risultati di regolarità negli spazi capacitari (introdotti in [4]).

Si osservi che in ipotesi di maggiore regolarità sui dati si possono dimostrare, in corrispondenza a particolari funzionali convessi Φ, dei risultati di regolarità più forti per le soluzioni di (1.21); cf. ad esempio [9], [3], [15], [16], [8], [6], [2], [5]. In particolare i risultati di hölderiana contenuti in [16] (teor. III e IV) si estendono facilmente e con lo stesso metodo ad una classe più ampia di disequazioni variazionali, sempre del tipo (4) (cf. anche [5]).

L'impostazione dei diversi problemi ai limiti nella forma (4) si tro-

---

[4]) In [16] si cercano soluzioni in particolari convessi chiusi $\boldsymbol{K} \subset V$; tali problemi si possono esprimere tramite la disequazione (4) introducendo funzionali convenienti.

va anche in [2] ove per $\alpha=2$, A operatore lineare a coefficienti regolari, $j=0$, $i=1$, $\varphi_1(x, y)$ indipendente da x, $B_1=\partial\Omega$ e $\mu_1=$area su $\partial\Omega$, si dimostra che se $f\in L^p(\Omega)$, $2\leqslant p<N$, allora $u\in H^{1,p^*}(\Omega)$ e quindi $u\in L^\beta(\Omega)$ con $\beta=Np/(N-2p)$. Noi invece otteniamo, in questo caso, che se $f\in L_*^p(\Omega)$ allora $u\in L_*^\beta(\Omega)$ per lo stesso β.

Infine rimandiamo il lettore all'appendice I per qualche semplice esempio e qualche considerazione su una classe di problemi caratterizzati dalla disequazione variazionale (4).

1. Definizioni e risultati noti.

Sia Ω un aperto limitato e connesso di $\boldsymbol{R}^N$ di frontiera $\partial\Omega$.

DEFINIZIONE 1.1. *Dato $p>1$, indicheremo con $L_*^p(\Omega)$ lo spazio delle funzioni $f(x)$ misurabili in Ω e tali che*

$$|\{x\in\Omega : |f(x)|>t\}|\leqslant(A/t)^p, \qquad \forall t>0, \tag{1.1}$$

con A costante positiva; la più piccola costante A che verifica (1.1) *verrà indicata con $|f|_p$.*

Si vede facilmente che lo spazio vettoriale $L_*^p(\Omega)$ è completo rispetto alla quasi-norma $|\ |_p$. Inoltre per $1\leqslant\beta<p$ si ha

$$L^p(\Omega)\subset L_*^p(\Omega)\subset L^\beta(\Omega)$$

con immersioni continue.

È ben noto il seguente risultato:

(1.2) Se $1/p+1/q<1$, $f\in L_*^p(\Omega)$, $g\in L^q(\Omega)$ allora per ogni $E\subset\Omega$ misurabile si ha

$$\int_E |fg|dx\leqslant c(p, q)\,|E|^{1-1/q-1/p}\,\|g\|_q\,|f|_p\,.$$

Nel seguito *supporremo che Ω sia localmente dalla stessa parte di $\partial\Omega$, e che $\partial\Omega$ sia lipschitziana,* i.e.:

(1.3) Dato un punto $x_0\in\partial\Omega$ esista un sistema ortogonale di coordinate $(y_1, \ldots, y_N)$ e una funzione lipschitziana $f(y_1, \ldots, y_{N-1})=f(y')$ definita

sul cubo chiuso $N-1$ dimensionale $C=\{|y_i|\leqslant 1 : 1\leqslant i\leqslant N-1\}$, e tale che $x_0=(y'_0, f(y'_0))$ per un $y'_0\in C$; inoltre esista $\beta>0$ tale che i punti (y', y_N) per cui $y'\in C$ e $f(y')<y_N<f(y')+\beta$ appartengono a Ω ed i punti (y', y_N) per cui $y'\in C$ e $f(y')-\beta<y_N<f(y')$ appartengano al complementare di $\bar{\Omega}$.

Inoltre si suppone che con un numero finito di tali carte si ricopra tutta la frontiera $\partial\Omega$.

In queste condizioni (cf. ad esempio [11]) si hanno le seguenti proprietà:

a) l'immersione di $H^{1,p}(\Omega)$ in $L^{p^*}(\Omega)$ è continua, $1\leqslant p<N$.

b) l'applicazione di traccia è continua di $H^{1,p}(\Omega)$ in $L^p(\partial\Omega)$ [5].

Con $H^{1,p}(\Omega)$, $1\leqslant p<+\infty$, abbiamo indicato il completamento di $C^1(\bar{\Omega})$, spazio delle funzioni con prime derivate continue in $\bar{\Omega}$, rispetto alla norma

$$\| v \|_{1,p}=\| v \|_p+\| \nabla v \|_p ;$$

data la regolarità di Ω segue che $H^{1,p}(\Omega)\equiv W^{1,p}(\Omega)$, spazio delle distribuzioni appartenenti con le sue derivate prime a $L^p(\Omega)$.

Dato un sottoinsieme chiuso E di $\bar{\Omega}$ ed una funzione $u\in H^{1,p}(\Omega)$ diremo (cf. [14]) che $u\geqslant 0$ su E se esiste una successione di funzioni u_n appartenenti a $C^1(\bar{\Omega})$, $u_n\to u$ in $H^{1,p}$ e $u_n(x)\geqslant 0$ per ogni $x\in E$. Se u, $\theta\in H^{1,p}(\Omega)$ diremo che $u\geqslant\theta$ su E se $u-\theta\geqslant 0$ su E, ecc.

Sia μ una misura a supporto compatto (positiva ed a variazione limitata) in $\bar{\Omega}$ e $B\subset\bar{\Omega}$ tale che $\mu(\complement B)=0$. Si ha il seguente

LEMMA 1.2. *Sia γ una applicazione lineare e continua di $H^{1,p}(\Omega)$, $1<p<+\infty$, in $L_\mu^1(B)$, tale che*

$$\gamma v=v_{/B} \qquad \forall v\in \mathrm{Lip}\,(\bar{\Omega}) \text{ [6]}. \tag{1.4}$$

Allora se u e ψ appartengono a $H^{1,p}(\Omega)$ si ha

$$\gamma \max(u, \psi)=\max(\gamma u, \gamma\psi). \tag{1.5}$$

---

[5]) Più precisamente l'applicazione di traccia è continua a valori in $H^{1/p',p}(\partial\Omega)$.

[6]) $v_{/B}$ = restrizione di v a B. Lip $(\bar{\Omega})$ = spazio delle funzioni lipschitziane su $\bar{\Omega}$.

La (1.5) *si estende ovviamente ad un numero finito qualunque di funzioni.*

DIMOSTRAZIONE. Possiamo supporre senza ledere la generalità che $\psi=0$; sia inoltre $Tz=\max(z, 0)$. Dalla (1.4) segue

$$T\gamma v=\gamma Tv \qquad \forall v\in \mathrm{Lip}\,(\bar{\Omega}). \tag{1.6}$$

Sia $\{u_n\}$ una successione di Lip $(\bar{\Omega})$ convergente verso u in $H^{1,p}(\Omega)$; $Tu_n \to Tu$ debolmente in $H^{1,p}$ (cf. [16]) ed il teorema di Banach e Saks garantisce l'esistenza di una sottosuccessione di $\{u_n\}$, che indicheremo ancora con $\{u_n\}$, tale che

$$M_m(\{Tu_n\}) \to Tu \qquad \text{in } H^{1,p}(\Omega) \tag{1.7}$$

quando $m\to+\infty$; $M_m(\{\alpha_n\})$ indica la media aritmetica $m^{-1}\sum_1^m \alpha_n$ (cf. [1]). Da (1.7) segue

$$\gamma M_m(\{Tu_n\}) \to \gamma Tu \qquad \text{in } L_\mu^1(B); \tag{1.8}$$

inoltre da (1.6) discende

$$\gamma M_m(\{Tu_n\})=M_m(\{\gamma Tu_n\})=M_m(\{T\gamma u_n\}),$$

relazione che assieme alla (1.8) implica

$$M_m(\{T\gamma u_n\}) \to \gamma Tu \qquad \text{in } L_\mu^1(B). \tag{1.9}$$

D'altra parte $T\gamma u_n \to T\gamma u$ in $L_\mu^1(B)$ e pertanto

$$M_m(\{T\gamma u_n\}) \to T\gamma u \qquad \text{in } L_\mu^1(B); \tag{1.10}$$

finalmente da (1.9) e (1.10) segue la tesi.

COROLLARIO 1.3. *Sia* $1<p<+\infty$ e sia Γ *una ipersuperficie contenuta in* $\bar{\Omega}$; *se l'applicazione di traccia*

$$\gamma : H^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Gamma) \qquad (\textit{oppure } H^{1/p',p}(\Gamma)) \tag{1.11}$$

è continua allora la (1.5) *è verificata per ogni coppia* u, $\psi\in H^{1,p}(\Omega)$; *in particolare le operazioni di traccia e di troncatura commutano.*

IPOTESI 1.4. *Sia* μ *una misura di Borel positiva ed a variazione limitata con supporto in* $\overline{\Omega}$ *e sia* $B \subseteq \overline{\Omega}$ *tale che* $\mu(\complement B)=0$. *Sia* $\varphi(x, y)$ *una funzione definita su* $B \times \boldsymbol{R}$ *a valori in* $\boldsymbol{R} \cup \{+\infty\}$, μ-*misurabile in* x *per tutti gli* $y \in \boldsymbol{R}$ *e convessa, s.c.i. e propria in* y *per* μ-*quasi tutti gli* $x \in B$. *Sia inoltre* $\gamma : H^{1,p}(\Omega) \to L^1_\mu(B)$ *lineare e continua e supponiamo che esista* $\xi(x) \in H^{1,p}(\Omega)$ *per cui*

$$0 \in \partial_y \varphi(x, \gamma\xi(x)) \tag{1.12}$$

per μ-*quasi tutti gli* $x \in B$, *ove* $\partial_y \varphi(x, z)$ *è il subdifferenziale della funzione* $\varphi(x, \cdot)$ *nel punto* z. *Supporremo ancora che*

$$\varphi(x, \gamma\xi(x)) \in L_\mu^1(B). \tag{1.13}$$

Si ha il seguente risultato

LEMMA 1.5. *Nelle ipotesi* 1.4 *il funzionale*

$$\Phi(v) = \int_B \varphi(x, \gamma v(x)) d\mu(x) \tag{1.14}$$

definito su $H^{1,p}(\Omega)$ *a valori in* $\boldsymbol{R} \cup \{+\infty\}$ *è convesso, s.c.i. e proprio.*

DIMOSTRAZIONE. Per quanto riguarda la misurabilità di $\varphi(x, \gamma v(x))$ rimandiamo il lettore all'appendice II.

Da (1.12) segue $\varphi(x, \gamma v(x)) \geqslant \varphi(x, \gamma\xi(x))$ per quasi tutti (rispetto s'intende alla misura μ) gli $x \in B$ e perciò $\Phi(v) \geqslant \mathrm{Cost.} = \Phi(\xi)$ per ogni v. Inoltre da (1.13) segue $\Phi(\xi) < +\infty$, per cui Φ è propria. Essendo evidente la convessità di Φ dimostriamo la s.c.i.: Supponiamo che $u_n \to u$ in $H^{1,p}(\Omega)$, sia $i = \liminf \Phi(u_n)$, e $i < +\infty$. Poichè $\gamma u_n \to \gamma u$ in $L_\mu^1(B)$ esiste una sottosuccessione $\{\gamma u_\beta\}$ tale che $\lim \Phi(u_\beta) = i$ e $\gamma u_\beta(x) \to \gamma u(x)$ quasi ovunque su B. Allora $\varphi(x, \gamma u(x)) \leqslant \liminf \varphi(x, \gamma u_\beta(x))$ q.o. su B e ne segue dal lemma di Fatou [7]) che

$$\Phi(u) = \int_B \varphi(x, \gamma u(x)) d\mu(x) \leqslant \int_B \liminf \varphi(x, \gamma u_\beta(x)) d\mu(x) \leqslant$$

---

[7]) Si osserva che per ogni β si ha $\varphi(x, \gamma u_\beta(x)) \geq \varphi(x, \gamma\xi(x)) \in L_\mu^1(B)$.

$$\leqslant \liminf \int_{\mathring{B}} \varphi(x,\ \gamma u_\beta(x))d\mu(x) = i.$$

Siano E un sottoinsieme chiuso di $\overline{\Omega}$ e $\theta \in H^{1,p}(\Omega)$; allora

LEMMA 1.6. *Il funzionale* $\Psi(v)$ *definito su* $H^{1,p}(\Omega)$ *da* [8])

$$\Psi(v) = \begin{cases} 0 \text{ se } v \geqslant \theta \text{ (opp. } v \leqslant \theta) \text{ su } E, \\ +\infty \text{ altrove,} \end{cases} \tag{1.15}$$

è un funzionale convesso s.c.i. e proprio.

Infatti l'insieme $\boldsymbol{K} = \{v \in H^{1,p}(\Omega) : \Psi(v) = 0\}$ è convesso e chiuso.

Introduciamo ora l'operatore $\mathcal{A}$ e la disequazione variazionale associata. Siano $A_i(x, p)$, $i = 1, \ldots, N$, N funzioni reali definite su $\Omega \times \boldsymbol{R}^N$, misurabili in x per tutti i $p \in \boldsymbol{R}^N$ e continue in p per quasi tutti gli $x \in \Omega$; sia $A = (A_i)$ e supponiamo che esistano costanti positive ν, η e α, $1 < \alpha < N$ [9]), tali che per ogni $p \in \boldsymbol{R}^N$ si abbia

$$\begin{cases} A(x,\ p) \cdot p \geqslant \nu \mid p \mid^\alpha \\ \mid A(x,\ p) \mid \leqslant \eta \mid p \mid^{\alpha-1} \end{cases} \tag{1.16}$$

per quasi tutti gli $x \in \Omega$. Supponiamo inoltre che per quasi tutti gli $x \in \Omega$ si abbia (in (1.17) basta $\geqslant 0$ data la (1.19))

$$(A(x,\ p) - A(x,\ q)) \cdot (p - q) > 0, \qquad \text{se } p \neq q. \tag{1.17}$$

Posto $V = H^{1,\alpha}(\Omega)$ consideriamo l'operatore $A : V \to V'$ così definito:

$$\langle Au,\ v \rangle = \int_{\Omega} \{A(x,\ \nabla u) \cdot \nabla v + \lambda(x) \mid u \mid^{\alpha-2} uv\} dx, \qquad \forall v \in V, \tag{1.18}$$

---

[8]) $v \geq \theta$ è inteso nel senso introdotto a p. 8.

[9]) Non consideriamo il caso $\alpha > N$ poichè $H^{1,\alpha}(\Omega) \subset C^{0,1-N/\alpha}(\overline{\Omega})$.

ove

$$\lambda(x) \geqslant \lambda > 0, \ \lambda(x) \in L^{N/\alpha}(\Omega). \tag{1.19}$$

Si verifica facilmente che l'operatore A è monotono, emicontinuo, limitato e coercitivo su V. Si tenga presente che $H^{1,\alpha}(\Omega) \subset L^{\alpha^*}(\Omega)$.

All'operatore A viene associato al solito modo l'operatore differenziale in Ω

$$\mathcal{A}u = -\operatorname{div} A(x, \nabla u) + \lambda(x) \mid u \mid^{\alpha-2} u. \tag{1.20}$$

Siano dati n funzionali convessi Φ_i su V del tipo (1.14) (con B_i, μ_i, $\varphi_i(x, y)$ e $\xi_i(x)$ soddisfacenti per ogni i, $1 \leqslant i \leqslant n$, l'ipotesi 1.4) ed m funzionali convessi Ψ_j del tipo (1.15) (in corrispondenza a m 'ostacoli, E_j, θ_j). Sia inoltre verificata la seguente ipotesi di compatibilità:

IPOTESI 1.7. *Esiste* $u_0 \in H^{1,\alpha}(\Omega)$ *per cui* $\Phi_i(u_0) < +\infty$, $i = 1, \ldots, n$, *e* $\Psi_j(u_0) < +\infty$, $j = 1, \ldots, m$.

In queste condizioni è ben noto (cf. ad esempio [10] teor. 8.5) che dato $F \in V'$ esiste ed è unica la funzione $u \in V$ soluzione della disequazione variazionale (4).

Nel seguito rappresenteremo il funzionale $F \in V'$ sotto la forma

$$\langle F, v \rangle = \int_\Omega (f_0 v + f \cdot \nabla v) dx, \qquad \forall v \in V, \tag{1.22}$$

ove $f = (f_i) \in [L^{\alpha'}(\Omega)]^N$ e $f_0 \in L^{\bar{\alpha}}(\Omega)$ con $\bar{\alpha} = (\alpha^*)'$.

OSSERVAZIONE. Possiamo sostituire (1.19) con « $\lambda(x) \geqslant 0$ » se (almeno) uno dei funzionali convessi che compaiono in (4) introduce una condizione di Dirichlet (opp. due ostacoli; esempio 6) su una ipersuperficie contenuta in $\bar{\Omega}$ di misura $(N-1)$-dimensionale non nulla; sotto questa ipotesi la condizione di coercività (cf. ad esempio [10], (8,49)) è ovviamente verificata.

2. Un risultato di regolarità.

LEMMA 2.1. *Essendo $A(x, p)$ una funzione soddisfacente* (1.16), *si ha per quasi tutti gli $x \in \Omega$*

$$A(x, p+q)\cdot p \geqslant \nu_0 \,|\, p \,|^\alpha - \eta_0 \,|\, q \,|^\alpha, \qquad \forall p, q \in \boldsymbol{R}^N \tag{2.1}$$

ove $\eta_0 = \eta_0(\nu, \eta, \alpha)$, $\nu_0 = 2^{-\alpha}\nu$. *Inoltre*

$$|\, y+\zeta \,|^{\alpha-2}(y+\zeta) \geqslant 2^{1-\alpha} \,|\, y \,|^{\alpha-2} y - c \,|\, \zeta \,|^{\alpha-1} \qquad \forall y, \zeta \in \boldsymbol{R} \tag{2.2}$$

con $c = c(\alpha)$.

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che $A(x, p+q)\cdot p = A(x, p+ +q)\cdot(p+q) - A(x, p+q)\cdot q$ ed applicare le (1.16).

Siano ξ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, le funzioni relative alla proprietà (1.12) dei funzionali Φ_i, e θ_j, $1 \leqslant j \leqslant m$, le funzioni relative alla definizione dei funzionali Ψ_j (cf. (1.15)). Poniamo

$$\zeta(x) = \max\,(\xi_1(x), \ldots, \xi_n(x), \theta_1(x), \ldots, \theta_m(x)); \tag{2.3}$$

data una funzione $g(x) \in H^{1,\alpha}(\Omega)$ indicheremo con $\bar{g}(x)$ la funzione

$$\bar{g}(x) = g(x) - \zeta(x). \tag{2.4}$$

Indicheremo nel seguito con c delle costanti dipendenti al più dalle costanti α, N, ν, η, λ, da Ω e dagli esponenti di sommabilità degli spazi ai quali si suppongono appartenenti le funzioni $\lambda(x)$, f_0, f, ξ_i e θ_j; ad esempio se $f_0 \in L_*^p(\Omega)$ c può dipendere da p ma non dalla particolare f_0. Inoltre il valore di una costante c può essere alterato lungo una dimostrazione senza che il simbolo usato venga cambiato.

LEMMA 2.2. *Siano soddisfatte le ipotesi* 1.4 (*per ogni* Φ_i), 1.7 *e* (1.16) *e sia u la soluzione del problema* (4) *con F dato da* (1.22); *allora per ogni reale non negativo k si ha*

$$\int_{A(k)} |\, \nabla \bar{u} \,|^\alpha \, dx + \int_{A(k)} (\bar{u}-k)^\alpha dx \leqslant \tag{2.5}$$

$$\leqslant c \left\{ \int_{A(k)} |\nabla \zeta|^{\alpha} dx + \int_{A(k)} \lambda |\zeta|^{\alpha-1} (\bar{u}-k) dx + \right.$$

$$\left. + \int_{A(k)} f_0(\bar{u}-k) dx + \int_{A(k)} f \cdot \nabla \bar{u} dx \right\}$$

ove

$$A(k) = \{x \in \Omega : \bar{u}(x) \geqslant k\}. \tag{2.6}$$

DIMOSTRAZIONE. Sia

$$v = \min(u, \zeta + k); \tag{2.7}$$

ne segue che

$$\begin{cases} \text{se } x \in A(k) : v-u = k-\bar{u} \text{ e } \nabla_i(v-u) = -\nabla_i \bar{u}; \\ \text{se } x \in \complement A(k) : v-u = 0 \text{ e } \nabla_i(v-u) = 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

D'altra parte dal lemma 1.2, (2.3) e (2.7) segue che per μ_i-quasi tutti gli $x \in \Gamma_i$ si ha $\gamma_i \xi_i(x) \leqslant \gamma_i \zeta(x)$ e $\gamma_i v(x) = \min(\gamma_i u, \gamma_i \zeta + k)$ e pertanto o $\gamma_i v(x) = \gamma_i u(x)$ oppure $\gamma_i \xi_i(x) \leqslant \gamma_i v(x) \leqslant \gamma_i u(x)$; allora tenendo presente la convessità di $\varphi_i(x, \cdot)$ e (1.12) segue che $\varphi_i(x, \gamma_i v(x)) - \varphi_i(x, \gamma_i u(x)) \leqslant 0$; quest'ultima disuguaglianza implica

$$\Phi_i(v) - \Phi_i(u) \leqslant 0, \qquad \forall\, 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{2.9}$$

Inoltre risulta ovviamente

$$\Psi_j(v) - \Psi_j(u) = 0, \qquad \forall\, 1 \leqslant j \leqslant m. \tag{2.10}$$

Da (4), (2.8), (2.9) e (2.10) segue

$$- \int_{A(k)} A(x, \nabla \bar{u}(x) + \nabla \zeta(x)) \cdot \nabla \bar{u}(x) dx -$$

$$-\int_{A(k)} \lambda(x)\,|\,\bar{u}+\zeta\,|^{\alpha-2}(\bar{u}+\zeta)(\bar{u}-k)dx \geqslant$$

$$\geqslant \int_{A(k)} f_0(k-\bar{u})dx - \int_{A(k)} f\cdot\nabla\bar{u}dx$$

relazione che, insieme al lemma 2.1 e a (1.19), implica

$$\nu_0 \int_{A(k)} |\,\nabla\bar{u}\,|^{\alpha}\,dx + 2^{1-\alpha}\lambda \int_{A(k)} |\,\bar{u}\,|^{\alpha-2}\,\bar{u}(\bar{u}-k)dx \tag{2.11}$$

$$\leqslant \eta_0 \int_{A(k)} |\,\nabla\zeta\,|^{\alpha}\,dx + c\int_{A(k)} \lambda(x)\,|\,\zeta\,|^{\alpha-1}(\bar{u}-k)dx -$$

$$-\int_{A(k)} f_0(k-\bar{u})dx + \int_{A(k)} f\cdot\nabla\bar{u}dx.$$

Poichè $0\leqslant\bar{u}-k\leqslant\bar{u}$ su $A(k)$ si ha

$$\int_{A(k)} |\,\bar{u}\,|^{\alpha-2}\,\bar{u}(\bar{u}-k)dx \geqslant \int_{A(k)} (\bar{u}-k)^{\alpha}dx. \tag{2.12}$$

Da (2.11) e (2.12) segue la tesi.

LEMMA 2.3. *Supponiamo verificate le ipotesi del lemma 2.2 e supponiamo che* $f_0\in L_*^p(\Omega)$, $f\in[L_*^{p^*}(\Omega)]^N$ *e* $\zeta\in H^{1,s}(\Omega)$, *con*

$$s=(\alpha-1)p. \tag{2.13}$$

Inoltre sia $\lambda\in L^{(N/\alpha)+}(\Omega)$ *se* $p=N/\alpha$, *e* $\lambda\in L^p(\Omega)$ *se* $p>N/\alpha$. *Allora*

$$|\,A(h)\,|\leqslant c\,\frac{H^{\alpha^*/\alpha}}{(h-k)^{\alpha^*}}\,|\,A(k)\,|^{\alpha^*(1/\alpha-1/s)}, \qquad \forall h>k\geqslant 0 \tag{2.14}$$

ove

$$(2.15)\qquad H=\begin{cases} \| \nabla\zeta \|_s^\alpha + \| \lambda \|_{N/\alpha}^{\alpha/(\alpha-1)} \| \zeta \|_{s^*}^\alpha + | f_0 |_p^{\alpha/(\alpha-1)} + | f |_{p^*}^{\alpha/(\alpha-1)} \\ \| \nabla\zeta \|_N^\alpha + \| \lambda \|_{(N/\alpha)+}^{\alpha/(\alpha-1)} \| \zeta \|_{1,N}^\alpha + | f_0 |_p^{\alpha/(\alpha-1)} + | f |_{p^*}^{\alpha/(\alpha-1)} \\ \| \nabla\zeta \|_s^\alpha + \| \lambda \|_p^{\alpha/(\alpha-1)} \| \zeta \|_\infty^\alpha + | f_0 |_p^{\alpha/(\alpha-1)} + | f |_{p^*}^{\alpha/(\alpha-1)} \end{cases}$$

rispettivamente se $\bar{\alpha}<p<N/\alpha$, $p=N/\alpha$ *o* $N/\alpha<p<N$. *Con* $(N/\alpha)+$ *abbiamo indicato un qualunque reale maggiore di* N/α.

Saranno utili nel seguito le seguenti relazioni:

$$(2.15')\qquad \begin{cases} \bar{\alpha}<p<N/\alpha \Leftrightarrow \alpha'<p^*<N/(\alpha-1) \Leftrightarrow \alpha<s<N, \\ p=N/\alpha \Leftrightarrow p^*=N/(\alpha-1) \Leftrightarrow s=N, \\ N/\alpha<p<N \Leftrightarrow N(\alpha-1)<p^*<+\infty \Leftrightarrow N<s<+\infty. \end{cases}$$

Consideriamo dapprima il caso $\bar{\alpha}<p<N/\alpha$; poichè $\alpha/N+1/\alpha^*+(\alpha-1)/s^*+(\alpha-1)(1/\alpha-1/s)=1$, segue dalla disuguaglianza di Hölder e dalla immersione di $H^{1,\alpha}(\Omega)$ in $L^{\alpha^*}(\Omega)$ che

$$(2.16)\qquad \int_{A(k)} \lambda \, | \zeta |^{\alpha-1} (\bar{u}-k)dx \leqslant$$

$$\| \lambda \|_{N/\alpha} \| \zeta \|_{s^*}^{\alpha-1} \left(\int_{A(k)} (\bar{u}-k)^{\alpha^*} dx \right)^{1/\alpha^*} \cdot | A(k) |^{(\alpha-1)(1/\alpha-1/s)}$$

Da (2.5), (2.16) e (1.2) risulta

$$(2.17)\qquad \int_{A(k)} | \nabla \bar{u} |^\alpha dx + \int_{A(k)} (\bar{u}-k)^\alpha dx \leqslant$$

$$\leqslant c\{ \| \nabla\zeta \|_s^\alpha \, | A(k) |^{1-\alpha/s} + \| \lambda \|_{N/\alpha} \| \zeta \|_{s^*}^{\alpha-1} \cdot$$

$$\cdot \left(\int_{A(k)} (\bar{u}-k)^{\alpha^*} dx \right)^{1/\alpha^*} | A(k) |^{(\alpha-1)(1/\alpha-1/s)} +$$

$$+|f_0|_p\left(\int_{A(k)}(\bar{u}-k)^{\alpha^*}dx\right)^{1/\alpha^*}|A(k)|^{1/\bar{\alpha}-1/p}+$$

$$+|f|_{p^*}\left(\int_{A(k)}|\nabla\bar{u}|^{\alpha}dx\right)^{1/\alpha}|A(k)|^{1/\alpha'-1/p^*}\};$$

da (2.17) si deduce facilmente che

$$\int_{A(k)}|\nabla\bar{u}|^{\alpha}dx+\int_{A(k)}(\bar{u}-k)^{\alpha}dx\leqslant \tag{2.18}$$

$$\leqslant c\{\|\nabla\zeta\|_s^{\alpha}|A(k)|^{1-\alpha/s}+\|\lambda\|_{N/\alpha}\|\zeta\|_{s^*}^{\alpha-1}\cdot$$

$$\cdot\left(\int_{A(k)}(\bar{u}-k)^{\alpha^*}dx\right)^{1/\alpha^*}|A(k)|^{(\alpha-1)(1/\alpha-1/s)}+$$

$$+|f_0|_p\left(\int_{A(k)}(\bar{u}-k)^{\alpha^*}dx\right)^{1/\alpha^*}|A(k)|^{1/\alpha'-1/p^*}+$$

$$+|f|_{p^*}^{\alpha/(\alpha-1)}|A(k)|^{[\alpha/(\alpha-1)](1/\alpha'-1/p^*)}.$$

Finalmente da (2.18) e dalla maggiorazione di Sobolev $\|w\|_{\alpha^*}\leqslant \leqslant c\|w\|_{1,\alpha}$ applicata alla funzione $w=v-u$ (cf. (2.8)) si ricava con qualche calcolo la maggiorazione

$$\left(\int_{A(k)}(\bar{u}-k)^{\alpha^*}dx\right)^{\alpha/\alpha^*}\leqslant cH|A(k)|^{1-\alpha/s} \tag{2.19}$$

con H dato da (2.15.1). Se $h>k$ dalla (2.19) e dalla maggiorazione

$$|A(h)|^{\alpha/\alpha^*}(h-k)^{\alpha}\leqslant\left(\int_{A(k)}(\bar{u}-k)^{\alpha^*}dx\right)^{\alpha/\alpha^*}$$

segue la (2.14).

Gli altri due casi si dimostrano allo stesso modo: se $p=N/\alpha$ si ha che $\lambda\in L^t(\Omega)$ con $1/t=\alpha/N-1/\delta$, $\delta>0$. Allora dalla disuguaglianza di

Hölder si ricava la maggiorazione

$$\int_{A(k)} \lambda \,|\, \zeta \,|^{\alpha-1} (\bar{u}-k)dx \leqslant \tag{2.20}$$

$$\leqslant \| \lambda \|_t \, \| \zeta \|^{\alpha-1}_{(\alpha-1)/\delta} \left(\int_{A(k)} (\bar{u}-k)^{\alpha^*} dx \right)^{1/\alpha^*} \cdot$$

$$\cdot \,|\, A(k) \,|^{(\alpha-1)(1/\alpha-1/N)};$$

poichè $\| \zeta \|_{(\alpha-1)/\delta} \leqslant c \, \| \zeta \|_{1,r} \leqslant c \, \| \zeta \|_{1/N}$, con r tale che $r^* = (\alpha-1)/\delta$, da (2.20) segue

$$\int_{A(k)} \lambda \,|\, \zeta \,|^{\alpha-1} (\bar{u}-k)dx \leqslant c \, \| \lambda \|_t \, \| \zeta \|^{\alpha-1}_{1,N} \cdot$$

$$\cdot \left(\int_{A(k)} (\bar{u}-k)^{\alpha^*} dx \right)^{1/\alpha^*} |\, A(k) \,|^{(\alpha-1)(1/\alpha-1/N)};$$

questa maggiorazione sostituisce la (2.16); la dimostrazione prosegue come prima.

Se invece $p > N/\alpha$ la (2.16) si sostituisce con

$$\int_{A(k)} \lambda \,|\, \zeta \,|^{\alpha-1} (\bar{u}-k)dx \leqslant \| \lambda \|_p \, \| \zeta \|^{\alpha-1}_{\infty} \cdot$$

$$\cdot \left(\int_{A(k)} (\bar{u}-k)^{\alpha^*} dx \right)^{1/\alpha^*} |\, A(k) \,|^{(\alpha-1)(1/\alpha-1/s)}.$$

COROLLARIO 2.4. *Supponiamo verificate le ipotesi del lemma* 2.2 *e supponiamo inoltre che* $f_0 \in L_*^p(\Omega)$, $f \in [L_*^{p^*}(\Omega)]^N$, $\zeta \in H^{1,s}(\Omega)$ *con* s *dato da* (2.13). *Si hanno i seguenti risultati*:

a) *se* $\bar{\alpha} < p < N/\alpha$ *allora*

$$|\, \{u-\zeta \geqslant t\} \,| \leqslant (cH^{1/\alpha} t^{-1})^{s^*}, \qquad \forall t > 0 \tag{2.21}$$

con H *dato da* (2.15.1).

b) *se* $p=N/\alpha$ *e* $\lambda\in L^{(N/\alpha)+}(\Omega)$ *allora*

$$|\{u-\zeta\geqslant t\}|\leqslant e\,|\Omega|\exp(-cH^{-1/\alpha}t), \qquad \forall t>0, \tag{2.22}$$

con H *dato da* (2.15.2).

c) *se* $p>N/\alpha$ *e* $\lambda\in L^p(\Omega)$ *allora*

$$u-\zeta\leqslant cH^{1/\alpha} \qquad \text{q.o. in } \Omega \tag{2.23}$$

con H *dato da* (2.15.3).

Il corollario è una semplice conseguenza del lemma 2.3 e del seguente lemma di G. Stampacchia [10]) applicato alla funzione $\varphi(t)=|A(t)|$:

LEMMA 2.5. *Sia* $\varphi(t)$ *una funzione reale definita per* $t\geqslant 0$, *non negativa e non decrescente, tale che per* $h>k\geqslant 0$ *si abbia*:

$$\varphi(h)\leqslant z(h-k)^{\mu}[\varphi(k)]^{\beta}$$

con z, μ *e* β *costanti positive. Allora si ha*:

a) *se* $\beta<1$:

$$\varphi(t)\leqslant \frac{2^{\mu/(1-\beta)^2}\,z^{1/(1-\beta)}}{\sigma^{\mu/(1-\beta)}}.$$

b) *se* $\beta=1$:

$$\varphi(t)\leqslant e\varphi(0)\exp\left[-(ez)^{-1/\mu}t\right].$$

c) *se* $\beta>1$:

$$\varphi(t_0)=0$$

per $t_0\geqslant z^{1/\mu}2^{\beta/(\beta-1)}[\varphi(0)]^{(\beta-1)/\mu}$.

Indicheremo ora con ζ' la funzione

$$\zeta'(x)=-\min(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n,\ \theta_1,\ \ldots,\ \theta_m); \tag{2.24}$$

---

10) Cf. [12] per i casi a) e c), e [13] per il caso b).

si ha il seguente risultato:

COROLLARIO 2.6. *Supponiamo verificate le ipotesi del lemma* 2.2 *e supponiamo inoltre che* $f_0 \in L_*^p(\Omega)$, $f \in [L_*^p(\Omega)]^N$, $\zeta' \in {}^{1,s}(\Omega)$ *con* s *dato da* (2.13). *Allora*:

a) *se* $\bar{\alpha} < p < N/\alpha$ *si ha*

$$|\{-u-\zeta' \geqslant t\}| \leqslant (cH^{1/\alpha}t^{-1})^{s^*}, \qquad \forall t>0, \tag{2.25}$$

con H *dato da* (2.15.2) *e con* ζ' *al posto di* ζ.

b) *se* $p=N/\alpha$ *e* $\lambda \in L^{(N/\alpha)+}$ *allora si ha*

$$|\{-\zeta'-u \geqslant t\}| \leqslant e\,|\Omega| \exp(-cH^{-1/\alpha}t), \qquad \forall t>0, \tag{2.26}$$

con H *dato da* (2.15.3) *e con* ζ' *al posto di* ζ.

c) *se* $p>N/\alpha$ *e* $\lambda \in L^p(\Omega)$ *si ha*

$$-u-\zeta' \leqslant cH^{1/\alpha} \tag{2.27}$$

con H *dato da* (2.15.3) *e* ζ' *al posto di* ζ.

DIMOSTRAZIONE. Posto $\tilde{\varphi}_i(x, y) = \varphi_i(x, -y)$ segue da (1.12) che

$$0 \in \partial_y \tilde{\varphi}_i(x, -\gamma\xi_i(x)). \tag{2.28}$$

Definiamo

$$\tilde{\Phi}_i(v) = \int_{B_i} \tilde{\varphi}_i(x, \gamma v(x))\,d\mu_i(x) \equiv \Phi_i(-v), \text{ e} \tag{2.29}$$

$$\tilde{\Psi}_j(v) = \Psi_j(-v) \equiv \begin{cases} 0 \text{ se } v \leqslant -\theta_j \text{ (resp. } \geqslant) \text{ su } E, \\ +\infty \text{ altrove.} \end{cases} \tag{2.30}$$

Finalmente poniamo

$$\tilde{A}(x, p) = -A(x, -p); \tag{2.31}$$

la funzione $\tilde{A}$ soddisfa in particolare la proprietà (1.16).

Con la notazione introdotta la (4) si scrive

$$(2.32)\qquad \int_\Omega \tilde{A}(x,\ \nabla(-u))\cdot\nabla(w-(-u))dx+$$
$$+\int_\Omega \lambda\,|-u\,|^{\alpha-2}(-u)(w-(-u))dx+\sum_j\,[\tilde{\Phi}_i(w)-\tilde{\Phi}_i(-u)]+$$
$$+\sum_j[\tilde{\Psi}_j(w)-\tilde{\Psi}_j(-u)]\geqslant\int_\Omega -f_0(w-(-u))dx+$$
$$+\int_\Omega -f\cdot\nabla(w-(-u))dx,\qquad \forall\, w\in V.$$

Applicando il corollario 2.4 alla soluzione $-u$ di (2.32) si ottengono i risultati descritti nel corollario 2.6. Si tenga presente che le funzioni $-\xi_i$ e $-\theta_j$ svolgono ora il ruolo delle ξ_i e θ_j nel caso anteriore, come segue dalle (2.28) e (2.30); inoltre da (2.24) risulta

$$\zeta'=\max(-\xi_1\,,\ \ldots,\ -\xi_n\,,\ -\theta_1\,,\ \ldots,\ -\theta_m);$$

si osservi finalmente che $\overline{(-u)}=-\zeta'-u$.

LEMMMA 2.7. *Siano verificate le ipotesi del lemma* 2.2, *sia* u *la soluzione di* (4), ζ *e* ζ' *le funzioni definite in* (2.3) *e* (2.24) *e sia* $f_0\in L_*^p(\Omega)$, $f\in[L_*^{p^*}(\Omega)]^N$, $\zeta,\ \zeta'\in H^{1,s}(\Omega)$ *con* s *dato da* (2.13). *Allora*

a) *se* $\bar{\alpha}<p<N/\alpha$ *si ha*

$$(2.33)\qquad |\{|u|\geqslant t\}|\leqslant\left(c\,\frac{H^{1/\alpha}+H'^{1/\alpha}+|\zeta|_{s^*}+|\zeta'|_{s^*}}{t}\right)^{s^*}$$

b) *se* $p=N/\alpha$ *e* $\lambda\in L^{(N/\alpha)+}$ *si ha*

$$(2.34)\qquad |\{|u|\geqslant t\}|\leqslant c\exp\{-c[H^{1/\alpha}+H'^{1/\alpha}+$$
$$+\|\zeta\|_{1,N}+\|\zeta'\|_{1,N}]^{-1}t\}.$$

c) *se* $N>p>N/\alpha$ *e* $\lambda\in L^p(\Omega)$ *si ha*

$$(2.35)\qquad \|u\|_\infty\leqslant cH^{1/\alpha}+cH'^{1/\alpha}+\|\zeta\|_\infty+\|\zeta'\|_\infty\,.$$

DIMOSTRAZIONE. Evidentemente risulta per ogni $t>0$

$$\{|u|\geqslant t\}=\{u\geqslant t\}\cup\{-u\geqslant t\}\subset \tag{2.36}$$
$$\subset\{t/2\leqslant u-\zeta\}\cup\{t/2\leqslant\zeta\}\cup\{-u-\zeta'\geqslant t/2\}\cup\{\zeta'\geqslant t/2\}.$$

Da (2.36) e dai casi a) dei corollari 2.4 e 2.6 otteniamo il caso a) del presente lemma

Da (2.36) e dai casi b) dei corollari riferiti segue il caso b) del teorema. Si osservi che se $f\in[H^{1,N}(\Omega)]^N$ allora

$$|\{\sigma\leqslant|f|\}|\leqslant c\exp(-c\,\|f\|_{1,N}^{-1}\sigma),\qquad \forall\sigma>0; \tag{2.37}$$

per verificare (2.37) basta 'prolungare, con continuità $H^{1,N}(\Omega)$ ad $H_0^{1,N}(\Omega')$, con $\Omega\subset\subset\Omega'$, osservare che ($\tilde{f}_j$=prolungata di f_j) $\Delta\tilde{f}_j=$ $=\sum_i\nabla_i(\nabla_i\tilde{f}_j)$, con $\tilde{f}_j\in H_0^{1,N}(\Omega')$, ed applicare alla soluzione f_j noti risultati di regolarizzazione (cf. [13]).

Finalmente il caso c) del teorema segue dai corrispondenti casi dei corollari 2.4 e 2.6. Si osservi che $H^{1,s}(\Omega)\subset L^\infty(\Omega)$.

Poniamo

$$\beta=\min\left(\frac{(\alpha-1)Np}{N-\alpha p},\ \frac{(\alpha-1)Nq}{N-(\alpha-1)q},\ \frac{Nr_i}{N-r_i},\ \frac{Nt_j}{N-t_j}\right)^{(11)}. \tag{2.38}$$

Dal lemma 2.7 e dalle definizioni date segue immediatamente il seguente risultato.

TEOREMA 2.8. *Siano soddisfatte le ipotesi* 1.4, 1.7 *e* (1.16), *sia* u *la soluzione di* (4), *e supponiamo che* $f_0\in L_*^p(\Omega)$, $f\in[L_*^q(\Omega)]^N$, $\xi_j\in H^{1,r_i}(\Omega)$, $\theta_j\in H^{1,t_j}(\Omega)$. *Allora*:

a) *se* $p>\bar{\alpha}$, $q>\alpha'$, r_i, $t_j>\alpha$, *si ha* $u\in L_*^\beta(\Omega)$ *con* β *dato da* (2.38), *ed inoltre*

---

11) Non sono da considerarsi i termini al secondo membro della (2.38) con denominatore nullo o negativo. Se ciò capita per tutti i termini allora $\beta>1$ può essere scelto arbitrariamente grande. Di più possiamo applicare uno dei casi b) o c) del teorema.

$$(2.39)\qquad |u|_\beta \leqslant c\{(|f_0|_p+|f|_q)^{1/(\alpha-1)}+\sum_i \|\nabla\xi_i\|_{r_i}+$$
$$+\sum_j \|\nabla\theta_j\|_{t_j}+(1+\|\lambda\|_{N/\alpha})^{1/(\alpha-1)}(\sum_i \|\xi_i\|_{r^*_i}+\sum_j \|\theta_j\|_{t^*_j})\}.$$

b) *se* $p\geqslant N/\alpha$, $q\geqslant N/(\alpha-1)$, r_i, $t_j\geqslant N$ *e* $\lambda\in L^{(N/\alpha)+}(\Omega)$, *allora*

$$(2.40)\qquad |\{|u(x)|\geqslant t\}|\leqslant c\exp(-c\mathcal{K}^{-1}t),\qquad \forall t>0,$$

ove

$$(2.41)\qquad \mathcal{K}=(|f_0|_p+|f|_q)^{1/(\alpha-1)}+(1+\|\lambda\|_{(N/\alpha)+})^{1/(\alpha-1)}\cdot$$
$$\cdot(\sum_i \|\xi_i\|_{1,r_i}+\sum_j \|\theta_j\|_{1,t_j}).$$

c) *se* $N/\alpha<p$, $N/(\alpha-1)<q$, $N<r_i$, t_j, *e se* $\lambda\in L^{\bar{s}}(\Omega)$ *con* $\bar{s}>N/\alpha$, *allora* $u\in L^\infty(\Omega)$ *ed inoltre*

$$(2.42)\qquad \|u\|_\infty\leqslant c\{(|f_0|_p+|f|_q)^{1/(\alpha-1)}+\sum_i \|\nabla\xi_i\|_{r_i}+$$
$$+\sum_j \|\nabla\theta_j\|_{t_j}+(1+\|\lambda\|_{\bar{s}})^{1/(\alpha-1)}(\sum_i \|\xi_i\|_\infty+\sum_j \|\theta_j\|_\infty)\}.$$

Come caso particolare del teorema precedente si ottiene la proposizione seguente:

TEOREMA 2.9. *Siano soddisfatte le ipotesi* 1.4, 1.7 *e* (1.16), *sia* u *la soluzione di* (4), *e supponiamo che* $\lambda(x)\leqslant c$, $f_0\in L_*^p(\Omega)$, $f\in[L_*^q(\Omega)]^N$ (*cf.* (1.22)) $\xi_i H^{1,r_i}(\Omega)$, $\theta_j H^{1,t_j}(\Omega)$ (*cf.* (1.12), (1.15)); *poniamo*

$$(2.43)\qquad \mathcal{H}=(|f_0|_p+|f|_q)^{1/(\alpha-1)}+\sum_i \|\xi_i\|_{1,r_i}+$$
$$+\sum_j \|\theta_j\|_{1,t_j},$$

e sia β *dato da* (2.38). *Allora*:

a) *se* $p>\bar{\alpha}$, $q>\alpha'$, r_i, $t_j>\alpha$, *si ha* $u\in L_*^\beta(\Omega)$ *ed inoltre*

$$(2.39')\qquad |u|_\beta\leqslant c\mathcal{H}.$$

b) *se* $p \geqslant N/\alpha$, $q \geqslant N(\alpha-1)$, r_i, $t_j \geqslant N$, *allora*

$$|\{|u(x)| \geqslant t\}| \leqslant c \exp(-c\mathcal{H}^{-1}t), \qquad \forall t>0. \tag{2.40'}$$

c) *se* $N/\alpha<p$, $N/(\alpha-1)<q$, $N<r_i$, t_j, *allora* $u \in L^\infty(\Omega)$ *ed inoltre*

$$\| u \|_\infty \leqslant c\mathcal{H}. \tag{2.42'}$$

Le ipotesi usate per ottenere la limitatezza delle soluzioni possono essere indebolite; infatti il caso c) del teorema 2.8 (analogamente per il teorema 2.9) può sostituirsi con il seguente

TEOREMA 2.10. Siano soddisfatte le ipotesi 1.4, 1.7 e (1.4) e sia u la soluzione di (4); supponiamo che $f_0 \in L_*^p(\Omega)$, $f \in [L_*^q(\Omega)]^N$, $\lambda \in \overline{L}^{\bar{s}}(\Omega)$ con $p>N/\alpha$, $q>N/(\alpha-1)$, $\bar{s}>N/\alpha$ e supponiamo inoltre che ξ_i, θ_j, $\in L^\infty(\Omega)$. Allora $u \in L^\infty(\Omega)$ e

$$\begin{aligned} \| u \|_\infty \leqslant c(|f_0|_p + |f|_q)^{1/(\alpha-1)} + \\ + (1+\|\lambda\|_{\bar{s}})^{1/(\alpha-1)}(\sum_i \|\xi_i\|_\infty + \sum_j \|\theta_j\|_\infty). \end{aligned} \tag{2.44}$$

Per dimostrare il teorema basta sostituire in (2.3) le funzioni $\xi_i(x)$ e $\theta_j(x)$ con rispettivamente le funzioni costanti $\tilde{\xi}_i(x) = \operatorname{Sup} \xi_i$ e $\tilde{\theta}_j(x) = \operatorname{Sup} \theta_j(x)$ (di conseguenza si sostituiscono in (2.24) le funzioni $\xi_i(x)$ e $\theta_j(x)$ con $\tilde{\xi}_i(x) = \operatorname{Inf} \xi_i$ e $\tilde{\theta}_j(x) = \operatorname{Inf} \theta_j$); essendo ancora verificato il lemma 2.2 la (2.44) discende immediatamente dalla (2.42).

Appendice I.

In quest'appendice daremo alcuni esempi (fra i più semplici) di problemi il cui studio si riduce allo studio di disequazioni del tipo (4).

Sia Γ una ipersuperficie contenuta in $\bar{\Omega}$, di misura d'area $\mu = S$ e supponiamo che l'applicazione di traccia $\gamma : H^{1,\alpha}(\Omega) \to L_S^\alpha(\Gamma) = L^\alpha(\Gamma)$ sia continua; sia $\varphi(x, y)$ una funzione definita su $\Gamma \times \boldsymbol{R}$ a valori in $\boldsymbol{R} \cup \{+\infty\}$, misurabile in x e convessa, s.c.i. e propria in y; supponiamo che esista $\xi(x) \in H^{1,\alpha}(\Omega)$ per cui la (1.12) e la (1.13) siano verifi-

cate (con $B=\Gamma$ e $d\mu=ds$). Allora il funzionale

$$\Phi(v)=\int_\Gamma \varphi(x,\ v(x))dS(x) \tag{1'}$$

è convesso s.c.i. e proprio (lemma 1.5) su V. La disequazione (4) con F sotto la forma (1.22), $m=0$, $n=1$ e $\Phi_1=\Phi$ si scrive

$$\langle Au,\ v-u\rangle+\int_\Gamma [\varphi(x,\ v)-\varphi(x,\ u)]dS\geqslant \tag{2'}$$

$$\geqslant \int_\Omega f_0(v-u)dx+\int_\Omega f\cdot\nabla(v-u)dx, \qquad \forall v\in V.$$

Posto $\operatorname{div} f=\sum_{i=1}^{N}\nabla_i f_i$, $\nabla_i=\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, le soluzioni della disequazione (2') verificano, nel senso debole usuale, l'equazione differenziale

$$\mathcal{A}u\equiv-\operatorname{div} A(x,\ \nabla u)+\lambda\,|\,u\,|^{\alpha-2}u=f_0-\operatorname{div} f \tag{3'}$$

nel dominio $\Omega-\Gamma$; inoltre da (2') e da (3') segue almeno formalmente [12]), per ogni $v\in V$

$$\int_\Gamma [\varphi(x,\ v)-\varphi(x,\ u)]dS\geqslant \tag{4'}$$

$$\geqslant \int_{\partial\Omega}[f-A(x,\ \nabla u)]\cdot n(v-u)dS+\int_{\Gamma-\partial\Omega}[A^{+\nu}(x,\ \nabla u)-A^{-\nu}(x,\ \nabla u)]\cdot$$

$$\cdot\nu(v-u)dS$$

ove n, vettore unitario normale a $\partial\Omega$, è orientato verso l'esterno di Ω e ν è uno dei due vettori unitari normali nel punto x a $\Gamma-\partial\Omega$; inoltre $A^{\pm\nu}(x,\ (\nabla u)(x))=\lim_{\varepsilon\to 0}A(z,\ (\nabla u)(z))$, ove $z=x\pm\varepsilon\nu$, $\varepsilon>0$.

---

[12]) i.e. la (4') è verificata nel senso classico se l'operatore, la soluzione e i dati sono regolari.

Se $\Gamma=\partial\Omega$ otteniamo in particolare

$$\mathcal{A}u=f_0-\operatorname{div} f \qquad \text{su } \Omega, \tag{5'}$$

$$\int_{\partial\Omega}[\varphi(x,\ v)-\varphi(x,\ u)]dS\geqslant\int_{\partial\Omega}(f-A)\cdot n(v-u)dS \tag{6'}$$

per ogni $v\in V$.

Osservazione. Siano Ω regolare, $H^{1/\alpha',\alpha}(\partial\Omega)$ lo spazio di tracce delle funzioni di $H^{1,\alpha}(\Omega)$ e $H^{-1/\alpha',\alpha'}(\partial\Omega)$ il suo duale. Dato $g\in H^{-1/\alpha',\alpha'}(\partial\Omega)$ esistono funzioni $\bar{f}_0$ e f_i, $1\leqslant i\leqslant N$, appartenenti a $L^{\alpha'}(\Omega)$ tali che

$$\int_{\partial\Omega}gudS=\int_{\Omega}\bar{f}_0udS+\int_{\Omega}f\cdot\nabla udx, \tag{7'}$$

ove $f=(f_i)$; dati perciò $e\in L^{\alpha'}(\Omega)$ e $g\in H^{-1/\alpha',\alpha'}(\partial\Omega)$, posto $f_0=1+\bar{f}_0$, la disequazione variazionale (2′) si scrive

$$\langle Au,\ v-u\rangle+\Phi(v)-\Phi(u)\geqslant\int_{\Omega}l(v-u)dx+\int_{\partial\Omega}g(v-u)dS; \tag{8'}$$

di conseguenza la soluzione u di (2′) soddisfa l'equazione

$$\mathcal{A}u=l \qquad \text{su } \Omega, \tag{9'}$$

con l funzione arbitraria di $L^{\alpha'}(\Omega)$, e

$$\int_{\partial\Omega}[\varphi(x,\ v)-\varphi(x,\ u)]ds\geqslant\int_{\partial\Omega}(g-A\cdot n)(v-u)dS, \qquad \forall v\in V, \tag{10'}$$

con g elemento arbitrario di $H^{-1/\alpha',\alpha'}(\partial\Omega)$.

Se le funzioni $A(x,\ p)$ sono regolari allora si può dare un senso più preciso alla (10′) poichè si dimostra, servendosi della (9′), che si può definire $A(x,\ \nabla u)\cdot n$ come elemento di $H^{-1/\alpha',\alpha'}(\partial\Omega)$; cf. [10], p. 205.

Diamo ora alcuni esempi, fra i più semplici, di funzionali del tipo (1′) e dei problemi loro associati.

ESEMPIO 1. Siano $\Gamma=\partial\Omega$, $\xi(x)$ una funzione definita su $\partial\Omega$ e φ data da

$$\varphi_1(x, y)=\begin{cases} 0 & \text{se } y=\xi(x), \\ +\infty & \text{se } y\neq\xi(x); \end{cases}$$

allora (6′) equivale alla condizione di Dirichlet $u(x)=\xi(x)$ su $\partial\Omega$.

ESEMPIO 2. Siano $\Gamma=\partial\Omega$ e $\varphi\equiv\varphi_2(x, y)=0$; allora (6′) equivale alla condizione di Neumann $A(x, \nabla u)\cdot n=g(x)$, $x\in\partial\Omega$, ove

$$g(x)=f\cdot n. \tag{11′}$$

ESEMPIO 3. Sia $\Gamma=\partial\Omega$ e

$$\varphi_3(x, y)=\frac{k(x)}{2}(y-\xi(x))^2$$

ove $k(x)\geqslant 0$ e $\xi(x)$ sono definite su $\partial\Omega$; in questo caso abbiamo il cosiddetto « terzo problema ai limiti »

$$k(x)[u(x)-\xi(x)]+A(x, \nabla u)\cdot n=g(x), \qquad x\in\partial\Omega, \tag{12′}$$

con $g(x)$ data da (11′).

Per verificare che (6′) implica (12′) basta sostituire in (6′) la funzione $v=u\pm\varepsilon\psi$ (con $\varepsilon>0$ e ψ arbitraria su $\partial\Omega$), dividere per ε e passare al limite quando $\varepsilon\to 0$. Per fare la verifica opposta basta osservare che $\varphi_3(x, y)\geqslant\varphi_3(x, z)+k(x)(z-\xi(x))(y-z)$, $\forall x\in\partial\Omega$, $\forall y, z\in\boldsymbol{R}$; da questa relazione e da (12′) segue che l'integrando al primo membro di (6′) maggiora quello al secondo membro.

ESEMPIO 4. Sia $\Gamma=\partial\Omega$, $\xi(x)$ definita su $\partial\Omega$ e

$$\varphi_4(x, y)=\begin{cases} 0 & \text{se } y\geqslant\xi(x), \\ +\infty & \text{se } y<\xi(x). \end{cases}$$

Il problema ai limiti corrispondente generalizza il cosiddetto « problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno » (cf. [7]); infatti si hanno su $\partial\Omega$ le condizioni

$$\begin{cases} u-\xi\geqslant 0, \\ A\cdot n-g\geqslant 0, \\ (A\cdot n-g)(u-\xi)\geqslant 0. \end{cases}$$

ESEMPIO 5 (*problemi misti*). Preso Γ come l'unione di un numero finito di ipersuperfici $\Gamma^{(i)}$ senza punti interni in comune (nella topologia di Γ), e posto

$$\varphi(x,\ y)=\varphi^{(i)}(x,\ y) \text{ se } x\in\Gamma^{(i)},$$

si ottengono problemi di tipo misto. La soluzione u soddisfa su ogni $\Gamma^{(i)}$ la condizione ai limiti relativa alla funzione $\varphi^{(i)}$; in particolare se $\Gamma=\partial\Omega=\Gamma^{(1)}\cup\Gamma^{(2)}$ e se $\varphi^{(i)}(x,\ y)=\varphi_i(x,\ y)$, $i=1,\ 2$, sono le funzioni introdotte negli esempi 1 e 2, otteniamo il problema misto di Dirichlet-Neumann.

ESEMPIO 6 (*ostacoli sottili*). Supponiamo che il funzionale convesso Φ sia dato da $\Phi^{(1)}+\Phi^{(2)}$ ove $\Phi^{(1)}$ corrisponde ad esempio a un problema di frontiera e

$$\Phi^{(2)}(v)=\int_{\Gamma}\varphi^{(2)}(x,\ v(x))dS,$$

con Γ sottoinsieme $N-1$ dimensionale di Ω e

$$\varphi^{(2)}(x,\ y)=\begin{cases} +\infty & \text{se } y<\eta(x), \\ 0 & \text{se } \eta(x)\leqslant y\leqslant\xi(x), \\ +\infty & \text{se } \xi(x)<y; \end{cases}$$

$\eta(x)$ e $\xi(x)$ sono funzioni definite su $\partial\Omega$ e tali che $\eta(x)\leqslant\xi(x)$.

L'introduzione del funzionale convesso $\Phi^{(2)}$ nell'inequazione (2') corrisponde ad introdurre in $\Omega\times\boldsymbol{R}$ i due ostacoli sottili ($N-1$ dimen-

sionali)

$$s_\eta = \{(x,\ \eta(x)) : x \in \Gamma\},\ S_\xi = \{(x,\ \xi(x)) : x \in \Gamma\}$$

ed a imporre che il grafico $\{(x,\ u(x))\}$ della soluzione u rimanga fra i due ostacoli S_η e S_ξ; si possono considerare un numero finito qualunque di ostacoli. Il problema degli ostacoli sottili può anche essere affrontato con funzionali del tipo (1.15); cf. [5].

Altri tipi di funzionali Φ_i possono essere considerati, in particolare funzionali del tipo

$$\Phi(v) = \int_E \varphi(x,\ v(x))dx,$$

con E sottoinsieme misurabile di Ω di misura N-dimensionale non nulla.

Osservazione. Si possono considerare dei funzionali convessi dipendenti anche dalle derivate prime; un caso semplice è quello relativo al funzionale Θ definito da

$$\Theta(v) = \int_E \theta(x,\ \nabla v(x))dx$$

con $E \subset \Omega$, θ convessa, s.c.i. (nella seconda variabile) e soddisfacente $0 \in \partial_z \theta(x,\ \nabla \zeta(x))$, con $\zeta(x) \in H^{1,\alpha}(\Omega)$.

Per tali funzionali soon ancora verificati risultati del tipo di quelli che abbiamo dimostrato poichè le relazioni

$$(13') \quad \begin{cases} \Theta(u) \geqslant \Theta(\min(u,\ \zeta + k)) \\ \Theta(u) \geqslant \Theta(\max(u,\ \zeta + k)) \end{cases}$$

sono verificate per ogni k reale. Si possono considerare dei funzionali $\Theta(v)$, dipendenti dalle derivate prime, di tipo più generale, per cui pur non essendo verificate maggiorazioni del tipo (13′) si riescano a valutare in modo adeguato gli incrementi $\Theta(v) - \Theta(u)$, con v, troncata generica della soluzione u, definita in modo conveniente.

Appendice II.

Dimostreremo in questa appendice che la funzione $\varphi(x, \gamma v(x))$ che compare nel lemma 1.5 è μ-misurabile su B per ogni $v \in H^{1,p}(\Omega)$; più precisamente dimostreremo il seguente risultato:

TEOREMA. *Sia μ una misura su B positiva ed a variazione limitata e sia*

$$\varphi : B \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R} \cup \{+\infty\} \tag{1''}$$

una funzione convessa, propria e s.c.i. nella seconda variabile per μ-quasi tutti gli $x \in B$ e μ-misurabile nella prima variabile per tutti gli $y \in \boldsymbol{R}$.

Supponiamo che esista almeno una funzione reale $\xi(x)$ μ-misurabile su B per cui

$$\varphi(x, \xi(x)) < +\infty \tag{2''}$$

μ-q.o. su B.

$$\varphi(x, \xi(x)) \tag{3''}$$

sia μ-misurabile.

Allora la funzione $\varphi(x, u(x))$ è μ-misurabile per ogni funzione reale e μ-misurabile $u(x)$.

Dimostreremo questo risultato adoperando note tecniche di teoria della misura. Premettiamo il seguente lemma:

LEMMA. *Sia A un insieme μ-misurabile contenuto in B e sia $u(x)$ μ-misurabile; allora esistono funzioni semplici (e μ-misurabili) $u_n(x)$, nulle su $\complement A$, e tali che:*

a) $\lim_{n \to +\infty} u_n(x) = u(x)$ μ-*q.o. in* A.

b) *dato $x \in A$ esiste un intero positivo $N(x)$ tale che se $n > N(x)$ allora*

$$u_n(x) \leqslant u_{n+1}(x) \leqslant u(x) \tag{4''}$$

per μ*-quasi tutti gli* $x \in A$.

DIMOSTRAZIONE. Poniamo per ogni indice positivo n

$$\begin{cases} E_{n,i} = A \cap u^{-1}([(i-1)2^{-n},\ i2^{-n})) & 1 \leqslant i \leqslant n2^n, \\ \tilde{E}_{n,i} = A \cap u^{-1}([-i2^n,\ (i-1)2^{-n})) & 1 \leqslant i \leqslant n2^n, \\ F_n = A \cap u^{-1}([n,\ \infty)), \\ F_n = A \cap u^{-1}((-\infty,\ -n)); \end{cases} \tag{5''}$$

Evidentemente tali insiemi sono misurabili. Poniamo [13])

$$u_n = \sum_{i=1}^{n2^n} [(i-1)2^{-n}\chi_{E_{n,i}} - i2^{-n}\chi_{\tilde{E}_{n,i}}] + n\chi_{F_n}; \tag{6''}$$

le u_n sono funzioni semplici, misurabili e inoltre sono nulle su $\complement A$.

Fissato $x_0 \in A$ poniamo $N(x_0) > |u(x_0)|$; per ogni $n > N(x_0)$ il punto x_0 appartiene ad uno e uno solo degli insiemi $E_{n,i}$ o $E_{n,i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n2^n)$; inoltre essendo $u_{n+1}(x_0) \leqslant u_n(x_0) \leqslant u(x_0)$ vale b), ed essendo $u(x_0) - 2^{-n} < u_n(x_0) \leqslant u(x_0)$ vale a).

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA. Per ogni x per cui $\varphi(x, \cdot)$ sia convessa, s.c.i. e propria e per cui $\varphi(x, \xi(x)) < +\infty$, poniamo $Y^-(x) = \{y : y < \xi(x) \text{ e } \varphi(x, y) = +\infty\}$, $Y^+(x) = \{y : \xi(x) < y \text{ e } \varphi(x, y) = +\infty\}$ e

$$\begin{cases} a(x) = \begin{cases} \sup\limits_{y \in Y^-} y & \text{se } Y^- \neq \emptyset \\ -\infty & \text{se } Y^- = \emptyset \end{cases} \\ b(x) = \begin{cases} \inf\limits_{y \in Y^+} y & \text{se } Y^+ \neq \emptyset \\ +\infty & \text{se } Y^+ = \emptyset \end{cases} \end{cases} \tag{7''}$$

---

[13]) χ_E funzione caratteristica di E.

Si ha $a(x) \leqslant \xi(x) \leqslant b(x)$; inoltre è ben noto che la funzione $\varphi(x, \cdot)$ è continua su $[a(x), b(x)]$ a valori in $\boldsymbol{R} \cup \{+\infty\}$, potendo essere $+\infty$ negli estremi dell'intervallo.

Consideriamo i seguenti insiemi misurabili:

$$(8'') \qquad \begin{cases} B_1 = \{x \in B : u(x) < \xi(x)\}, \\ B_2 = \{x \in B : \xi(x) < u(x)\}, \\ B_3 = \{x \in B : \xi(x) = u(x)\}; \end{cases}$$

dal lemma precedente segue l'esistenza di successioni $\{u_n^{(1)}(x)\}$ e $\{u_n^{(2)}(x)\}$ di funzioni semplici e misurabili tali che:

a) $u_n^{(j)}(x) \to u(x)$ q.o. su B_j, $j=1, 2$.

b) dato $x \in B_1$ [risp. B_2] esiste $N(x)$ tale che $n > N(x)$ implica $u_n^{(1)}(x) \geqslant u(x)$ [risp. $u_n^{(2)}(x) \leqslant u(x)$].

Inoltre $u_n^{(j)} = 0$ su $\complement B_j$, $j=1, 2$.

Consideriamo le funzioni

$$(9'') \qquad \varphi_n(x) = \begin{cases} \varphi(x, u_n^{(j)}(x)) & \text{se } x \in B_j, \ j=1, 2, \\ \varphi(x, \xi(x)) & \text{se } x \in B_3, \end{cases}$$

e dimostriamo la loro misurabilità su B, ossia, su B_1, B_2, e B_3 separatamente. Su B_3 un tale fatto è ovvio; dimostriamolo su B_1, ossia, dimostriamo la misurabilità dell'insieme

$$(10'') \qquad \{x \in B_1 : \varphi(x, u_n^{(1)}(x)) \in I\}$$

con I aperto qualunque di $\boldsymbol{R} \cup \{+\infty\}$:

essendo $u_n^{(1)}(x) = \sum_j \beta_j \chi_{E_j}$ su B_1, con $\cup E_j = B_1$, $E_i \cap E_j = \emptyset$, $\beta_j \in \boldsymbol{R}$ e E_j misurabili segue che l'insieme (10″) è uguale all'unione

$$\bigcup_j \{x \in E_j : \varphi(x, \beta_j) \in I\}$$

che è misurabile poichè $\varphi(\ , \beta_j)$ è misurabile per ipotesi.

Per terminare la dimostrazione è sufficiente verificare che

$$(12'') \qquad \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x)=\varphi(x,\ u(x)) \qquad \text{q.o. su } B.$$

Se $x\in B_3$ la (12″) è ovvia. Supponiamo invece che sia $x\in B_2$; in questo caso $\xi(x)<u(x)$, $\lim u_n^{(2)}(x)=u(x)$ e, per $n>N(x)$, $u^{(2)}(x)\leqslant u(x)$; in particolare riesce

$$(13'') \qquad a(x)\leqslant\xi(x)<u_n^{(2)}(x)\leqslant u(x), \qquad \text{per } n>N(x).$$

Distinguiamo ora i casi $b(x)<u(x)$ e $u(x)\leqslant b(x)$; nella prima ipotesi si ha, per n sufficientemente grande, $b(x)<u_n^{(2)}(x)$ e pertanto $\varphi(x,\ u_n^{(2)}(x))=+\infty=\varphi(x,\ u(x))$. Se invece $u(x)\leqslant b(x)$ la (13″) implica $a(x)<u_n^{(2)}(x)\leqslant u(x)\leqslant b(x)$; ed essendo $\varphi(x,\ \cdot)$ continua su $[a(x),\ b(x)]$ ne segue che $\lim\varphi(x,\ u_n^{(2)}(x))=\varphi(x,\ u(x))$, come volevamo dimostrare.

Osservazione. L'ipotesi dell'esistenza di $\xi(x)$ tale che la (3″) sia verificata è (nel caso generale) essenziale. Infatti siano $B=(0,\ 1)\subset\boldsymbol{R}$, μ la misura di Lebesgue su B e $\zeta(x)=x^2$, per $x\in B$. Poniamo

$$\varphi(x,\ y)=\begin{cases} g(x) & \text{se } x\in B,\ y=\zeta(x), \\ +\infty & \text{se } x\in B,\ y\neq\zeta(x), \end{cases}$$

con $g(x)$ funzione reale e non misurabile su B. Tutte le ipotesi del teorema precedente sono soddisfatte tranne la (3″); e per $u(x)=\zeta(x)$ la tesi non è verificata.

BIBLIOGRAFIA

[1] Banach, S. et Saks, S.: *Sur la convergence forte dans les champs L^p*, Studia Mathematica, 2 (1930), 51-57.

[2] Brezis, H.: *Problèmes unilateraux* (preprint).

[3] Brezis, H. et Stampacchia, G.: *Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques*, Bull. Société Mathématique de France, 96 (1968), 153-180.

[4] Conti, F.: *Su alcuni spazi funzionali e loro applicazioni, ecc.*, Boll. Unione Mat. Italiana, N. 4-5 (1969), 554-596.

[5] CONTI, F. e VEIGA, H., BEIRAO DA: *Equazioni ellittiche non lineari con ostacoli sottili. Applicazioni allo studio dei punti regolari* (in corso di stampa sugli Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa).

[6] DIAS, J. P. CARVALHO: *Une classe de problèmes variationnels non lineaires de type elliptique ou parabolique,* (à paraître).

[7] FICHERA, C.: *Problemi elastostatici con vincoli unilaterali: il problema, ecc.,* Mem. Accad. Naz. Lincei, s. 8, vol. 7 (1964), 91-140.

[8] LEWI, H. and STAMPACCHIA, G.: *On existence and smoothness of solutions of some non-coercive variational inequalities,* (preprint).

[9] LIONS, J. L.: *Equations aux dérivées partielles et calcul des variations,* Cours Fac. Sciences Paris, 2e semestre (1967), (multigr.).

[10] LIONS, J. L.: *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires,* ed. Dunod, Paris (1969).

[11] NEČAS, J.: *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques,* Masson et Cie (1967).

[12] STAMPACCHIA, G.: *Régularisation des solutions de problèmes aux limites, etc.,* Inter. Symp. on Linear Spaces, Jerusalem (1960), 399-408.

[13] STAMPACCHIA, G.: *Some limit cases of L^p-estimates for solutions, etc.,* Comm. Pure Appl. Math., 16 (1963), 505-510.

[14] STAMPACCHIA, G.: *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques, etc.,* Ann. Inst. Fourier, 15 (1965), 189-250.

[15] VEIGA, H. BEIRÃO DA: *Sulla holderianità delle soluzioni di alcune disequazioni, ecc.,* Ann. Mat. Pura Appl., 83 (1969), 73-112.

[16] VEIGA, H. BEIRÃO DA: *Sur la régularité des solutions de l'équation* $\operatorname{div} A(x, u, \nabla u) = B(x, u, \nabla u)$ *avec des conditions aux limites unilatérales et mêlées* (preprint).

[17] VEIGA, H. BEIRÃO DA: *Régularité pour une classe d'inéquations non linéaires,* C. R. Acad. Sc. Paris, t. 271 série A-23 (6 juillet 1970), 23-25.

Manoscritto pervenuto in redazione il 21 aprile 1971.