

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

WALTER STREB

Über Algebren mit nilpotenten assoziierten Lie-Ringen

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 46 (1971), p. 137-139

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1971__46__137_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÜBER ALGEBREN MIT NILPOTENTEN ASSOZIIERTEN LIE-RINGEN

WALTER STREB *)

S. A. Jennings [1; S. 597] wirft die Frage auf, ob jeder Ring S mit nilpotentem assoziierten Lie-Ring ein nilpotentes Kommutatorideal S' besitzt. In dieser Arbeit wird eine Algebra A angegeben, die einen nilpotenten assoziierten Lie-Ring, jedoch kein Ideal $J \neq 0$ besitzt, das das Kommutatorideal A' von A annulliert. Diese Algebra kann dann also kein nilpotentes Kommutatorideal haben.

Mit den abzählbar vielen Unbestimmten x_1, x_2, x_3, \dots , deren Menge wir mit U bezeichnen, bildet man formale Potenzprodukte $p = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n}$ beliebiger Dimension $d(p) = n$, deren Menge mit P bezeichnet sei, und weiter über einem kommutativem Ring R mit Einselement die assoziative Algebra B der formalen endlichen Summen $\sum_{i=1}^m r_i p_i$ mit $r_i \in R$ und $p_i \in P$ für $1 \leq i \leq m$. Die Forderung der Multiplikationsregeln $x_i x_j = -x_j x_i$ und $x_i x_i = 0$ für $x_i, x_j \in U$ führt zu einer Klasseneinteilung der Elemente von B , die mit der Struktur verträglich ist, und deshalb zu einer weiteren assoziativen Algebra A über R . Diese Klasseneinteilung bedingt folgende Kongruenzen:

1) Für $p = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n} \in P$ gilt: $p \equiv 0$ genau dann, wenn es j und k mit $1 \leq j, k \leq n$ gibt, so daß $j \neq k$ und $i_j = i_k$ gilt.

Sei \bar{P} die Menge aller Potenzprodukte $f \neq 0$ und Q die Menge aller Potenzprodukte $g = x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_n}$ mit $j_1 < j_2 < \dots < j_n$.

*) Indirizzo dell'A.: Dr. Walter Streb, 857 Pegnitz, Leibnizweg 10, Germania occ.

2) Ist $f = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n} \in \bar{P}$ und $g = x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_n} \in Q$ und sind die Indexmengen (i_1, i_2, \dots, i_n) und (j_1, j_2, \dots, j_n) als ungeordnete Mengen gleich, so gilt $f \equiv s(f)g$.

Hierbei sei $s(f) = 1$ bzw. $s(f) = -1$, wenn (i_1, i_2, \dots, i_n) eine gerade bzw. ungerade Permutation von (j_1, j_2, \dots, j_n) ist.

3) Für $f, g \in P$ gilt:

$$gf \equiv (-1)^{d(g)d(f)} fg.$$

1) und 2) besagen, daß jedes $a \in A$ eine Normaldarstellung $a = \sum_{i=1}^m r_i p_i$ mit $r_i \in R$ und $p_i \in Q$ für $1 \leq i \leq m$ besitzt.

Mit Hilfe von 3) zeigen wir:

$$(a \circ b) \circ c = 0 \text{ für alle } a, b, c \in A.$$

Hierbei sei $r \circ s := rs - sr$ für Elemente r und s eines Ringes S .

BEWEIS. Wegen der Distributivität genügt ein Kongruenzbeweis für Elemente rp mit $r \in R$ und $p \in P$. Da R kommutativ ist, reicht ein entsprechender Nachweis für Elemente aus P .

Für $f, g, h \in P$ gilt:

$$\begin{aligned} (f \circ g) \circ h &= fgh - gfh - hfg + hgf \equiv fgh - (-1)^{d(f)d(g)} fgh - \\ &- (-1)^{d(f)d(h) + d(g)d(h)} fgh + (-1)^{d(f)d(g) + d(f)d(h) + d(g)d(h)} fgh \equiv \\ &\equiv ((-1)^{d(f)d(g)} - 1)((-1)^{(d(f) + d(g))d(h)} - 1) fgh \equiv 0. \end{aligned}$$

Zum Nachweis der letzten Kongruenz unterscheiden wir zwei Fälle:

a) Ist $d(f)$ oder $d(g)$ gerade, so ist $(-1)^{d(f)d(g)} - 1 = 0$.

b) Ist $d(f)$ und $d(g)$ ungerade, so ist $d(f) + d(g)$ gerade und damit $(-1)^{(d(f) + d(g))d(h)} - 1 = 0$.

Im folgenden setzen wir zusätzlich voraus, daß R ein Ring der Charakteristik 0 oder ein Körper von Primzahlcharakteristik ungleich 2 ist, und zeigen weiter, daß es in diesen Fällen kein Ideal $J \neq 0$ von A gibt,

das das Kommutatorideal A' von A annulliert. Es reicht für $f = \sum_{i=1}^m r_i p_i$ mit $r_i \in R$ und $p_i \in Q$ zu zeigen: Ist $f \neq 0$, so existieren zwei verschiedene ganze Zahlen j und k , so daß $f(x_j \circ x_k) \neq 0$.

BEWEIS. Zu $f \neq 0$ wählt man zwei verschiedene ganze Zahlen j und k , so daß x_j und x_k keine aufbauenden Faktoren der Potenzprodukte p_i für $1 \leq i \leq m$ sind. Weiter sei o.B.d.A. $j < k$. Es gilt dann $f(x_j \circ x_k) = f 2x_j x_k = \sum_{i=1}^m 2r_i p_i x_j x_k \neq 0$, da $f \neq 0$ und die Charakteristik von R von 2 verschieden ist.

BIBLIOGRAFIA

- [1] JENNINGS, S. A.: *On rings whose associated Lie Rings are nilpotent*, Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 53 (1947), S. 593-597.

Manoscritto pervenuto in redazione il 16 aprile 1971.