

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

A. BASILE

P. BRUTTI

Alcuni risultati sui $\{q(n-1)+1; n\}$ -archi di un piano proiettivo finito

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 46 (1971), p. 107-125

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1971__46__107_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ALCUNI RISULTATI SUI
{ $q(n-1)+1; n$ }-ARCHI DI UN PIANO PROIETTIVO FINITO

A. BASILE e P. BRUTTI *)

1. Sia $\pi(q)$ un piano proiettivo di ordine $q=p^r$, p intero primo. Un (k, n) -arco di $\pi(q)$ è un insieme di k punti del piano tali che n è il massimo numero di essi che sono allineati. Supporremo nel seguito $n \geq 3$.

Fra i (k, n) -archi di $\pi(q)$ hanno un certo rilievo i $\{q(n-1)+1; n\}$ -archi, in quanto è stato congetturato da Lunelli e Sce (cfr. L. Lunelli e M. Sce [4]), che, per $q \not\equiv 0 \pmod{n}$, l'estremo superiore dei valori di k sia $q(n-1)+1$. Chiameremo tali archi « *LS*-archi ».

La nota si compone di due parti. Nella prima sono studiate alcune proprietà caratteristiche di una classe di *LS*-archi, che abbiamo chiamato « regolari », con riferimento a condizioni necessarie di esistenza. Nella seconda si dimostrano alcuni teoremi relativi al problema della completezza degli *LS*-archi regolari.

Converremo di chiamare « secanti di ordine i » o « i -secanti » ($0 \leq i \leq n$), le rette del piano incidenti un (k, n) -arco esattamente in i punti. Saranno frequentemente usati i seguenti simboli:

r_i^P = numero delle i -secanti ($1 \leq i \leq n$) passanti per un punto P dell'arco.

h_j^Q = numero delle j -secanti ($0 \leq j \leq n$) passanti per un punto Q non dell'arco.

*) Indirizzo degli AA.: Istituto di Matematica, Università di Perugia, 06100 Perugia.

Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per le Strutture Algebriche e Geometriche e loro applicazioni del C.N.R.

$H_k =$ numero totale delle k -secanti ($0 \leq k \leq n$).

Le n -secanti passanti per un punto P di un LS -arco saranno talvolta dette « secanti di ordine massimo » per P , poichè è di semplice verifica che per ogni punto di un LS -arco passa almeno una n -secante.

2. In questo numero introdurremo il concetto di « regolarità » per i punti di un LS -arco \mathbb{C} e determineremo una condizione necessaria e sufficiente per la regolarità dei punti di \mathbb{C} .

DEF. Un punto di un LS -arco \mathbb{C} è detto « regolare » se le secanti di ordine non massimo passanti per esso hanno tutte lo stesso ordine. L'arco \mathbb{C} è detto « regolare » se tutti i suoi punti sono regolari.

Esistono numerosi esempi non banali di archi che soddisfano la definizione precedente (cfr. A. Barlotti [1], capitolo III).

Se P è un punto di un LS -arco \mathbb{C} , indichiamo con $\lambda = \sum_{i=1}^{n-1} r_i^P$ il numero delle secanti di ordine non massimo passanti per P e con i_0 l'ordine minimo di tali secanti. Si osservi che deve essere $1 \leq \lambda \leq n-1$. Infatti se fosse $\lambda=0$, sulle rette per P si avrebbero più di $q(n-1)+1$ punti dell'arco. Sia allora $\lambda \neq 0$, da

$$\lambda(n-2) + (q+1-\lambda)(n-1) \geq q(n-1)$$

segue $\lambda \leq n-1$. Vale il teorema seguente:

TEOREMA 1. *Un punto P di un $\{q(n-1)+1; n\}$ -arco \mathbb{C} è regolare se e solo se è verificata la seguente relazione fra gli interi i_0 e λ relativi al punto P :*

$$(2.1) \quad i_0 = \frac{(\lambda-1)n+1}{\lambda}.$$

DIM. Sia P un punto regolare di \mathbb{C} e indichiamo con i l'ordine delle secanti per P che non sono n -secanti. Si può scrivere:

$$\lambda(i-1) + (q+1-\lambda)(n-1) = q(n-1)$$

e da qui:

$$i = \frac{(\lambda-1)n+1}{\lambda} = i_0.$$

Viceversa, sia P un punto di \mathbb{C} per cui vale la (2.1). I punti diversi da P sulle n -secanti per P sono in numero di $(q+1-\lambda)(n-1)$. I rimanenti punti di \mathbb{C} diversi da P sono allora $(\lambda-1)(n-1)$. Essi si distribuiscono sulle λ secanti di ordine non massimo in modo che ciascuna ne possiede almeno

$$i_0 - 1 = \frac{(\lambda-1)(n-1)}{\lambda}.$$

Ne segue che ciascuna delle λ secanti per P possiede esattamente i_0 punti.

Si osservi che è $\lambda = r_{i_0}^P$ per ogni punto regolare dell'arco. Inoltre $r_{i_0}^P$ deve essere un divisore di $n-1$ e ogni punto regolare possiede al più una 1-secante.

3. Sia \mathbb{C} un LS -arco regolare. Diciamo « punti di tipo i » quei punti dell'arco per i quali passano r_i^P secanti di ordine i ($i \leq n-1$). Indichiamo con ρ_i il numero dei punti di tipo i dell'arco. Si hanno allora le seguenti relazioni:

$$(3.1) \quad \sum_{r_i^P | n-1} \rho_i = q(n-1) + 1$$

$$(3.2) \quad \sum_{r_i^P | n-1} (q+1 - r_i^P) \rho_i = nH_n$$

e da queste:

$$(3.3) \quad (q+1)[q(n-1)+1] - \sum_{r_i^P | n-1} r_i^P \rho_i = nH_n.$$

Essendo il secondo membro della (3.3) divisibile per n , se ne conclude che deve essere:

$$(3.4) \quad \sum_{r_i^P | n-1} r_i^P \rho_i \equiv 1 - q^2 \pmod{n}.$$

Si è così ottenuto il seguente:

TEOREMA 2. *Condizione necessaria per l'esistenza in $\pi(q)$ di un $\{q(n-1)+1; n\}$ -arco regolare è che valga la (3.4).*

Esamineremo alcune conseguenze del teorema 2, nel caso in cui un LS -arco \mathbb{C} regolare sia dotato solo di punti di tipo uno e punti di tipo i , per un fissato valore $i \leq n-1$.

Dalla relazione (2.1) scritta nella forma:

$$(3.5) \quad r_i^p = \frac{n-1}{n-i}$$

e dalle (3.1) e (3.4) si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} \rho_1 + \rho_i \equiv 1 - q \pmod{n} \\ \rho_1 + \frac{n-1}{n-i} \rho_i \equiv 1 - q^2 \pmod{n} \end{cases}$$

che fornisce le congruenze:

$$(3.6) \quad \rho_i(i-1) \equiv iq(q-1) \pmod{n}$$

$$(3.7) \quad \rho_1(1-i) \equiv q(iq-1) + (1-i) \pmod{n}.$$

Le (3.6) e (3.7) possono essere usate in due diverse direzioni di indagine. Fissato un valore di $q \pmod{n}$, esse determinano una condizione necessaria di esistenza per LS -archi regolari con due tipi di punti, stabilendo limitazioni a cui deve soddisfare il numero complessivo delle 1-secanti. Noto invece il numero totale delle 1-secanti di un LS -arco \mathbb{C} , le (3.6), (3.7) stabiliscono che esso può esistere solo se certe congruenze \pmod{n} , sono soddisfatte da q . Mostriamo alcune applicazioni di questo procedimento.

a) Sia $q \equiv 0$ oppure $1 \pmod{n}$. La (3.7) diviene:

$$\rho_1 \equiv 1 \text{ oppure } 0 \left(\pmod{\frac{n}{(n, i-1)}} \right)$$

dove $(n, i-1)$ è il *M.C.D.* fra n . ed $i-1$.

b) Se \mathbb{C} è un *LS*-arco regolare i cui punti sono tutti di tipo $n-1$, dalla (3.6), ponendo $i=n-1$ e $\rho_{n-1}=q(n-1)+1$ si ottiene:

$$(q+2)(q-1) \equiv 0 \pmod{n}$$

e se n è primo ciò implica:

$$q \equiv -2 \pmod{n}$$

oppure

$$q \equiv 1 \pmod{n}.$$

Tale risultato è stato ottenuto per altra via da A. Barlotti (cfr. [1], cap. III-9).

c) Consideriamo ora un *LS*-arco \mathbb{C} regolare i cui punti siano tutti di tipo uno. La (3.6) si scrive:

$$q(q-1) \equiv 0 \pmod{n}.$$

Per $q \equiv 1 \pmod{n}$, la curva algebrica del piano di Galois $PG(2, p^{2m})$ di equazione

$$x_1^{p^m+1} + x_2^{p^m+1} + x_3^{p^m+1} = 0$$

è un esempio di arco del tipo in esame con $n=p^m+1$ (cfr. R. C. Bose [2], n. 5). Esistono esempi di archi di questo tipo ($q \equiv 1 \pmod{n}$) anche in piani non desarguesiani, coordinatizzati su un « Dickson commutative division ring » (vedi F. Piper [5]). Mostriamo invece che un arco \mathbb{C} con le proprietà precedenti non può esistere per $q \equiv 0 \pmod{n}$.

In tal caso infatti si ha:

$$H_1 = q(n-1) + 1; \quad nH_n = q[q(n-1) + 1]$$

e di conseguenza

$$H_0 = q^2 + q + 1 - H_1 - H_n = \frac{q}{n} [q - (n-1)^2].$$

Poichè $H_0 \geq 0$ ne segue $q \geq (n-1)^2$ e tenuto conto che è $q \equiv 0 \pmod{n}$,

$q = p^r$ (p primo), si conclude:

$$(3.8) \quad q \geq n^2 \text{ (cioè } H_0 > 0\text{)}.$$

Sia Q un punto non appartenente a \mathbb{C} . Dalle relazioni:

$$h_0^Q + h_1^Q + h_n^Q = q + 1$$

$$h_1^Q + nh_n^Q = q(n-1) + 1$$

si trova:

$$(3.9) \quad h_1^Q = \eta n + 1; \quad h_0^Q = \frac{q}{n} - \eta(n-1); \quad h_n^Q = \frac{q}{n}(n-1) - \eta$$

per un certo intero $\eta \geq 0$, variabile da punto a punto.

Posto $n = p^s$, si ha $r \geq 2s$ e dalla seconda delle (3.9)

$$\eta = \frac{\frac{q}{n} - h_0^Q}{n-1} = \frac{p^{r-s} - h_0^Q}{p^s - 1}.$$

Il resto della divisione a secondo membro è della forma

$$p^{r-is} - h_0^Q$$

e perchè η sia intero si deve avere:

$$(3.10) \quad h_0^Q = p^{r-is} \quad \text{con } i \geq 1.$$

Risulta cioè:

$$\eta = \frac{\frac{q}{n} - \frac{q}{n^i}}{n-1}$$

e la prima delle (3.9) diviene:

$$(3.11) \quad h_1^Q = \frac{q}{n-1} \frac{n^{i-1} - 1}{n^{i-1}} + 1 = h_1(i)$$

dove $h_1(i)$ cresce al crescere dell'intero i .

Sia t una 1-secante di \mathbf{C} . Diciamo y il numero dei punti di t non appartenenti all'arco per cui passa la sola 1-secante t , x il numero dei rimanenti, per ciascuno dei quali passano almeno $\frac{q}{n}+1$ 1-secanti, come segue facilmente dalla (3.11) ponendo in essa $i \geq 2$. Si ha allora:

$$x \frac{q}{n} \leq H_1 - 1 = q(n-1)$$

cioè:

$$x \leq n(n-1); \quad y \geq q - n(n-1).$$

Indicato con \mathbb{P}_0 l'insieme dei punti non appartenenti all'arco, sia $\mathbb{P}_j \subset \mathbb{P}_0$ l'insieme dei punti per i quali passano $h_i(j)$ 1-secanti. Poichè due qualsiasi 1-secanti si intersecano in un punto che non appartiene a $\overline{\mathbb{P}_1}$, si può scrivere:

$$|\mathbb{P}_1| \geq H_1[q - n(n-1)].$$

D'altra parte:

$$q(q-n+2) = |\mathbb{P}_0| > |\mathbb{P}_1| \geq [q(n-1)+1][q-n(n-1)],$$

disuguaglianza che è verificata solo per $q \leq n^2$ e, ricordando la (3.8), si conclude:

$$q = n^2.$$

La (3.10) si scrive allora:

$$h_0^Q = n^{2-i}$$

e sono perciò possibili solo i valori $i=1, 2$. Di conseguenza:

$$h_1^Q = 1, \quad n-1; \quad x = n(n-1); \quad y = n; \quad |\mathbb{P}_0| = n^2(n^2 - n + 2);$$

$$|\mathbb{P}_1| = n^3(n-1) + n; \quad |\mathbb{P}_2| = n(2n-1).$$

Scelto un punto $Q \in \mathbb{P}_2$, per esso passano $n+1$ 1-secanti ciascuna contenente $n(n-1)-1$ punti di \mathbb{P}_2 diversi da Q ; si ha allora:

$$(n+1)[n(n-1)-1] \leq |\mathbb{P}_2| - 1 = n(2n-1) - 1$$

cioè:

$$n^2 - 2n - 1 \leq 0$$

che è soddisfatta solo per $n \leq 2$, contro la condizione assunta inizialmente che sia sempre $n \geq 3$. Riassumendo si può enunciare il seguente teorema:

TEOREMA 3. *Condizione necessaria per l'esistenza in $\pi(q)$, $q = p^r$, di un $\{q(n-1)+1; n\}$ -arco regolare ($n \geq 3$), i cui punti siano di tipo uno, è che risulti:*

$$q \not\equiv 0 \pmod{n}$$

e

$$q(q-1) \equiv 0 \pmod{n}.$$

Questo teorema è una estensione di un risultato ottenuto da A. Bartolotti in [1] (pp. III-7).

4. In questo numero studieremo il problema della completezza degli LS -archi regolari. Ricordiamo che un (k, n) -arco del piano $\pi(q)$ si dice completo se non esiste, in $\pi(q)$, alcun (k', n) -arco ($k' > k$) che lo contiene propriamente.

Per rendere più semplice l'esposizione dei risultati ottenuti intorno a questo problema, ci sembra opportuno mettere in evidenza le caratteristiche geometriche di due particolari tipi di LS -archi regolari che hanno un ruolo importante nell'analisi che svilupperemo.

Indichiamo con \mathfrak{A} la classe degli LS -archi regolari con un punto di tipo uno e $q(n-1)$ punti di tipo $n-1$; con \mathfrak{B} la classe degli LS -archi regolari con $(n-2)^2$ punti di tipo $n-2$ ed $(n-1)(q-n+3)$ punti di tipo $n-1$.

TEOREMA 4. *Ogni $\{q(n-1)+k; n\}$ -arco ($n \geq k \geq 2$) contiene dei $\{q(n-1)+1; n\}$ -archi. Se uno di questi, \mathfrak{C} , è regolare, allora \mathfrak{C} appartiene alla classe \mathfrak{A} o alla classe \mathfrak{B} .*

DIM. La prima parte del teorema si dimostra con un procedimento di induzione su k .

Sia \mathbf{C}' un $\{q(n-1)+2; n\}$ -arco. Per ogni punto P di \mathbf{C}' passano almeno due n -secanti, infatti:

$$(n-1)r_n^P + (n-2)(q+1-r_n^P) \geq q(n-1)+1$$

da cui:

$$r_n^P \geq q-n+3$$

cioè:

$$r_n^P \geq 2.$$

Da qui segue che l'insieme $\mathbf{C}' - \{P\}$ è un $\{q(n-1)+1; n\}$ -arco qualunque sia P appartenente a \mathbf{C}' e la proposizione è vera per $k=2$. Supponiamola vera per $k=m-1$ e consideriamo un $\{q(n-1)+m; n\}$ -arco \mathbf{C}' . Lo stesso ragionamento fatto in precedenza porta alla conclusione che per ogni punto P di \mathbf{C}' passano almeno due n -secanti. Allora $\mathbf{C}' - \{P\}$ è un $\{q(n-1)+(m-1); n\}$ -arco contenuto in \mathbf{C}' che, per ipotesi di induzione, contiene un LS -arco \mathbf{C} .

Sia \mathbf{C} regolare. Esiste almeno un punto P non appartenente a \mathbf{C} tale che $h_n^P=0$. Segue facilmente che deve essere $h_0^P=0$ e che esistono, per P , delle secanti di ordine inferiore ad $n-1$. Diciamo $i_M (1 \leq i_M \leq n-2)$ l'ordine massimo di queste secanti. Poichè vi sono delle i_M -secanti per P , esiste almeno un punto Q di \mathbf{C} di tipo i_M . Se è $i_M > 1$, la (3.5) assicura l'esistenza di almeno una i_M -secante passante per Q e non incidente con P , indicata con r . Congiungendo allora con P i punti dell'arco appartenenti ad r , si ottengono, dato che lo LS -arco \mathbf{C} è regolare, i_M rette i_M -secanti distinte. In tale caso si può quindi scrivere:

$$\sum_{\substack{r_i^Q |_{n-1} \\ i \leq i_M}} \rho_i \geq i_M^2.$$

Se invece $i_M=1$ la disuguaglianza precedente vale banalmente. Si osservi poi che è:

$$(n-1)h_{n-1}^P + (q+1-h_{n-1}^P)i_M \geq q(n-1)+1$$

cioè:

$$h_{n-1}^P \geq q - \frac{i_M-1}{n-1-i_M}$$

quindi:

$$\rho_{n-1} \geq (n-1) \left(q - \frac{i_M - 1}{n-1-i_M} \right).$$

Si ha così:

$$i_M^2 \leq \sum_{\substack{r_i^0 | n-1 \\ i \leq i_M}} \rho_i = q(n-1) + 1 - \rho_{n-1} \leq q(n-1) + 1 - (n-1) \left(q - \frac{i_M - 1}{n-1-i_M} \right)$$

ed infine:

$$i_M^2 - (n-1)i_M + (n-2) \geq 0$$

che è soddisfatta soltanto per $i_M \leq 1$ oppure $i_M \geq n-2$. È allora necessariamente $i_M = 1$ oppure $i_M = n-2$. Se è $i_M = 1$, per il punto P passano soltanto 1-secanti ed $(n-1)$ -secanti all'arco \mathbb{C} . Il seguente sistema:

$$\begin{cases} h_1^P + (n-1)h_{n-1}^P = q(n-1) + 1 \\ h_1^P + h_{n-1}^P = q + 1 \end{cases}$$

fornisce allora la soluzione $h_1^P = 1$, $h_{n-1}^P = q$. L'arco \mathbb{C} possiede di conseguenza un solo punto di tipo uno e $q(n-1)$ punti di tipo $n-1$. Esso appartiene dunque alla classe \mathfrak{A} . Se invece è $i_M = n-2$, dalla disuguaglianza:

$$(n-1)h_{n-1}^P + (n-2)(q+1-h_{n-1}^P) \geq q(n-1) + 1$$

segue:

$$h_{n-1}^P \geq q - n + 3.$$

Ma esiste certamente una $(n-2)$ -secante per P e, poichè l'arco è regolare, ne esistono almeno $n-2$. Si ha allora:

$$h_{n-1}^P \leq q + 1 - h_{n-2}^P \leq q + 1 - (n-2) = q - n + 3$$

cioè:

$$h_{n-1}^P = q - n + 3; \quad h_{n-2}^P = n - 2; \quad h_i^P = 0 \quad (0 \leq i \leq n-3).$$

Lo LS -arco \mathbf{C} possiede solo punti di tipo $n-2$ e di tipo $n-1$. Precisamente: $\rho_{n-2}=(n-2)^2$; $\rho_{n-1}=(n-1)(q-n+3)$ e \mathbf{C} è un LS -arco della classe \mathbf{B} . Il teorema è così dimostrato.

Si osservi che il teorema precedente equivale ad affermare che ogni LS -arco regolare incompleto appartiene alla classe \mathbf{A} o alla classe \mathbf{B} . Viceversa non si può dire che ogni LS -arco delle classi \mathbf{A} e \mathbf{B} sia incompleto. In effetti per $q \equiv -1 \pmod{n}$, esistono esempi di archi della classe \mathbf{A} che sono completi (cfr. A. Barlotti [1], p. III-6, esempio 1), mentre l'insieme dei punti di un piano $\pi(q)$, ad eccezione di q punti di una retta arbitraria del piano, è un esempio di $\{q^2+1; q+1\}$ -arco regolare della classe \mathbf{A} incompleto. I due teoremi che seguono mostrano, sotto l'ipotesi $(q, n)=1$ oppure n , come si ripartiscano gli LS -archi completi e gli LS -archi incompleti nelle classi \mathbf{A} e \mathbf{B} . A tale scopo chiamiamo \mathbf{A}_0 e \mathbf{A}_{-1} rispettivamente le sottoclassi di \mathbf{A} tali che, per ogni LS -arco regolare appartenente ad \mathbf{A}_0 si ha $q \equiv 0 \pmod{n}$ e per ogni LS -arco regolare appartenente ad \mathbf{A}_{-1} si ha $q \equiv -1 \pmod{n}$. Analogamente definiamo le sottoclassi \mathbf{B}_0 e \mathbf{B}_{-1} di \mathbf{B} .

TEOREMA 5. *Se $(n, q)=1$ oppure n , allora ogni LS -arco regolare di \mathbf{A} o appartiene ad \mathbf{A}_0 o appartiene ad \mathbf{A}_{-1} .*

Gli archi di \mathbf{A}_0 sono incompleti e si completano univocamente in $\{q(n-1)+n; n\}$ -archi.

Gli archi di \mathbf{A}_{-1} sono completi se $n \leq q$; sono incompleti se $n = q+1$ e si completano univocamente nell'intero piano $\pi(q)$.

DIM. Sia $\mathbf{C} \in \mathbf{A}$. Ponendo nella (3.6) o (3.7) $\rho_1=1$, $\rho_i=\rho_{n-1}=q(n-1)$, si ottiene:

$$q(q+1) \equiv 0 \pmod{n}$$

che per $(q, n)=1$ oppure n implica rispettivamente $q \equiv -1 \pmod{n}$ oppure $q \equiv 0 \pmod{n}$. Questo prova la prima affermazione del teorema.

Sia ora $\mathbf{C} \in \mathbf{A}_0$ e t la 1-secante di \mathbf{C} . Denotiamo con \mathbf{P}_0 l'insieme dei punti di t per cui passano 0-secanti di \mathbf{C} e con \mathbf{P}_1 l'insieme dei restanti punti di t non appartenenti a \mathbf{C} . Se Q è un punto non sull'arco nè su t , per esso si ha $h_0^Q \geq 1$. In caso contrario infatti si potrebbe scrivere:

$$(q+1)(n-1) \leq q(n-1)+1$$

e ciò è assurdo essendo $n \geq 3$.

D'altra parte si ha:

$$(n-1)h_{n-1}^Q + nh_n^Q = q(n-1) + 1$$

cioè:

$$h_{n-1}^Q \equiv -1 \pmod{n}$$

ovvero:

$$(4.1) \quad h_{n-1}^Q \geq n-1.$$

Sia ora R un punto qualsiasi di \mathbb{P}_0 , r una 0-secante per R . Contando le $(n-1)$ -secanti incidenti r , si ottiene dalla (4.1):

$$q(n-1) + h_{n-1}^R \leq H_{n-1} = q(n-1)$$

da cui:

$$(4.2) \quad h_{n-1}^R = 0.$$

Dal fatto che per R non passano $(n-1)$ -secanti segue:

$$(q - h_0^R)n = q(n-1)$$

e quindi:

$$(4.3) \quad h_0^R = \frac{q}{n}.$$

Determiniamo il numero totale delle 0-secanti di \mathbb{C} .

$$H_0 = q^2 + q + 1 - H_1 - H_{n-1} - H_n = \frac{q}{n}(q - n + 1).$$

Dalla (4.3) segue subito:

$$(4.4) \quad |\mathbb{P}_0| = q - n + 1; \quad |\mathbb{P}_1| = n - 1.$$

Le $(n-1)$ -secanti, dalla (4.2), incidono t solo nei punti di \mathbb{P}_1 e, dalla seconda delle (4.4), si deduce che i punti dell'insieme \mathbb{P}_1 sono privi di

n -secanti. Vi sono allora nel piano esattamente $n-1$ punti per cui non passano n -secanti di \mathbb{C} , ed essi appartengono alla 1-secante t . Aggiungendo a \mathbb{C} i punti di \mathbb{P}_1 si ottiene una successione di archi regolari incompleti, contenuti in un $\{q(n-1)+n; n\}$ -arco completo ¹⁾.

Sia infine $\mathbb{C} \in \mathfrak{A}_{-1}$ e consideriamo dapprima il caso in cui sia $n \leq q$. Se l'arco \mathbb{C} è incompleto esiste almeno un punto $P \notin \mathbb{C}$ per cui non passa alcuna n -secante. Detta t la 1-secante di \mathbb{C} , si ha che P deve appartenere a t (cfr. M. Tallini Scafati [6], p. 813). Ne segue facilmente $h_{n-1}^p = q$. D'altra parte per ogni altro punto $Q \in t$ ($Q \notin \mathbb{C}$) vale la relazione:

$$nh_n^q + (n-1)h_{n-1}^q = q(n-1)$$

da cui si ha:

$$h_{n-1}^q \equiv -1 \pmod{n}$$

cioè:

$$(4.5) \quad h_{n-1}^q \geq n-1.$$

Dalla (4.5) si può scrivere allora:

$$H_{n-1} = q(n-1) \geq (q-1)(n-1) + q$$

e da qui: $q \leq n-1$, che è assurdo per $n \leq q$, e dunque l'arco \mathbb{C} è completo.

Nel caso in cui sia $n = q+1$, lo LS -arco \mathbb{C} è un $\{q^2+1; q+1\}$ -arco. I punti del piano che non appartengono a \mathbb{C} sono in numero di q e cioè tutti e soli i punti che non appartengono a \mathbb{C} e che giacciono sulla 1-secante di \mathbb{C} . Questi punti ovviamente non possiedono delle $(q+1)$ -secanti; ne segue che l'arco è incompleto e si completa nell'intero piano mediante l'aggiunta dei q punti della 1-secante.

¹⁾ Si osservi che la definizione di regolarità data nel paragrafo 2 per gli LS -archi si estende a (k, n) -archi qualsiasi.

Si osservi inoltre che LS -archi regolari della classe \mathfrak{A}_0 si possono costruire a partire da $\{q(n-1)+n; n\}$ -archi, l'esistenza dei quali, almeno per $q = 2^r$, è stata provata da R. H. F. Denniston in [3].

Per ciò che riguarda la completezza degli archi della classe \mathfrak{B} , si è ottenuto un risultato meno preciso di quello relativo agli archi della classe \mathfrak{A} . Rimane infatti da stabilire quando gli archi della classe \mathfrak{B}_{-1} siano completi o incompleti.

TEOREMA 6. *Condizione necessaria per l'esistenza di LS-archi regolari della classe \mathfrak{B} è che sia n dispari, $n \geq 5$.*

Se $(n, q) = 1$ oppure n , allora ogni LS-arco regolare di \mathfrak{B} o appartiene a \mathfrak{B}_0 o appartiene a \mathfrak{B}_{-1} .

Gli archi di \mathfrak{B}_{-1} eventualmente incompleti si completano univocamente in $\{q(n-1)+2; n\}$ -archi.

Gli archi di \mathfrak{B}_0 sono completi.

DIM. Sia P un punto di tipo $n-2$ di un LS-arco \mathfrak{C} della classe \mathfrak{B} . Dalla (3.5) segue $r_{n-2}^P = \frac{n-1}{2}$. Deve allora essere n dispari ed $n \geq 5$, perchè per $n=3$ le $(n-2)$ -secanti per P divengono 1-secanti e ci si riconduce ad un arco della classe \mathfrak{A} .

Per provare la seconda proposizione, si osservi che la (3.4), applicata ad un arco della classe \mathfrak{B} , cioè ponendo in essa: $i=n-2, n-1$, diviene:

$$q(q+1) \equiv 0 \pmod{n}$$

che nell'ipotesi $(n, q) = 1$ oppure n implica rispettivamente $q \equiv -1 \pmod{n}$ oppure $q \equiv 0 \pmod{n}$.

Premettiamo ora alcune osservazioni necessarie per dimostrare sia la terza che la quarta proposizione del teorema.

Se P e Q sono due punti non appartenenti a \mathfrak{C} e tali che per essi non passi alcuna n -secante all'arco, la retta per P e Q è una $(n-1)$ -secante. In effetti la retta per P e Q non può essere altro che una $(n-2)$ -secante o una $(n-1)$ -secante, visto che $h_n^P = 0$ implica $h_0^P = 0$, per ogni $P \notin \mathfrak{C}$. Supponiamo allora che tale retta sia una $(n-2)$ -secante. Se r è un'altra $(n-2)$ -secante per Q , che esiste perchè $n \geq 5$, congiungendo gli $n-2$ punti di r che appartengono a \mathfrak{C} con P , si ottengono $n-2$ $(n-2)$ -secanti per P , che, aggiunte alla retta per P e Q danno luogo ad $n-1$ $(n-2)$ -secanti per P e ciò è assurdo.

Un'altra osservazione valida per un qualsiasi arco della classe \mathfrak{B} è che per esso si possono scrivere le seguenti relazioni:

$$(4.6) \quad \begin{aligned} H_0 &= \frac{q}{n}(q-n+1) \\ H_{n-2} &= \frac{(n-1)(n-2)}{2} \\ H_{n-1} &= (n-1)(q-n+3) \\ H_n &= \frac{q+1}{n} [q(n-1)+1] - \frac{(n-2)^2(n-1)}{2n} - \frac{(n-1)^2(q-n+3)}{n} \end{aligned}$$

Ultima premessa alla dimostrazione della terza e quarta parte del teorema 6 è che, qualunque sia $Q \notin \mathfrak{C}$, se $\mathfrak{C} \in \mathfrak{B}_0$, si ha $h_0^Q \leq \frac{q}{n}$, se $\mathfrak{C} \in \mathfrak{B}_{-1}$ segue $h_0^Q \leq \frac{q+1}{n}$. Sia infatti Q un punto non sull'arco. Si può allora scrivere:

$$n(q+1-h_0^Q) \geq q(n-1)+1$$

cioè:

$$(4.7) \quad h_0^Q \leq \frac{q-1}{n} + 1.$$

La (4.7), se $q \equiv 0 \pmod{n}$ diviene:

$$(4.8) \quad h_0^Q \leq \frac{q}{n},$$

mentre, se $q \equiv -1 \pmod{n}$ porta a:

$$(4.9) \quad h_0^Q \leq \frac{q+1}{n}.$$

Con queste premesse, mostriamo ora che ogni arco della classe \mathfrak{B}_0 è completo. Innanzi tutto per ogni punto non appartenente a \mathfrak{C} di una

n -secante passano esattamente $\frac{q}{n}$ rette 0-secanti. Ciò segue dalla prima delle (4.6) e dalla (4.8) quando si ricordi che su una n -secante vi sono esattamente $q-n+1$ punti non appartenenti a \mathbb{C} . Supponiamo che $\mathbb{C} \in \mathfrak{B}_0$ sia incompleto. Esiste allora un solo punto $P \notin \mathbb{C}$, per cui non passano n -secanti. Se infatti ve ne fossero almeno due, P e Q , si è già dimostrato che la retta per P e Q è una $(n-1)$ -secante. Su di essa vi sono al più $q-n$ punti non di \mathbb{C} e per i quali passa qualche n -secante. Poichè per ciascuno di tali punti passano $\frac{q}{n}$ 0-secanti si ottiene:

$$(q-n)\frac{q}{n} \geq H_0 = (q-n+1)\frac{q}{n}$$

e ciò è assurdo.

Sia ora r una $(n-2)$ -secante per P . Per ciascuno dei $q-n+2$ punti di r non appartenenti a \mathbb{C} e diversi da P passano delle n -secanti, per quanto appena dimostrato. Si ha allora:

$$(q-n+2)\frac{q}{n} = H_0 = (q-n+1)\frac{q}{n}.$$

L'assurdo prova che \mathbb{C} non può essere incompleto.

Sia infine \mathbb{C} incompleto e appartenente a \mathfrak{B}_{-1} . Se vi fossero due punti, P e Q , per cui non passano n -secanti a \mathbb{C} , dalla (4.9) e dalla prima delle (4.6), scritta nella forma:

$$H_0 = \frac{(q-n)(q+1)}{n} + 1,$$

ricordando che la retta per P e Q è una $(n-1)$ -secante, si ottiene:

$$\frac{(q-n)(q+1)}{n} \geq \frac{(q-n)(q+1)}{n} + 1$$

e dunque anche in questo caso esiste un solo punto $P \notin \mathbb{C}$ per cui non passano n -secanti.

Aggregando a \mathbb{C} l'unico punto P si ottiene un $\{q(n-1)+2; n\}$ -arco completo.

5. I risultati ottenuti nel paragrafo precedente danno una classificazione degli LS -archi regolari in relazione alla loro completezza.

Come si è visto, ogni LS -arco regolare \mathbb{C} è completo a meno che esso non appartenga alla classe \mathbb{A} o alla classe \mathbb{B} . Ciascuna di tali classi è costituita da tre sottoclassi disgiunte:

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_0 \cup \mathbb{A}_{-1} \cup \mathbb{A}^*$$

$$\mathbb{B} = \mathbb{B}_0 \cup \mathbb{B}_{-1} \cup \mathbb{B}^*$$

dove \mathbb{A}^* e \mathbb{B}^* sono rispettivamente quei sottoinsiemi di \mathbb{A} e \mathbb{B} , vuoti se si fa l'ipotesi $(n, q) = 1$ oppure n , i cui elementi sono gli LS -archi regolari di \mathbb{A} e \mathbb{B} per i quali è:

$$q(q+1) \equiv 0 \pmod{n}$$

senza che sia:

$$q \equiv 0 \pmod{n} \text{ nè } q \equiv -1 \pmod{n}.$$

Lo schema seguente illustra la classificazione suddetta. I punti interrogativi indicano che non si sono ottenuti risultati precisi sulla completezza delle classi di archi a cui si riferiscono.

LS -archi regolari	}	Classe \mathfrak{A} $\rho_1 = 1$ $\rho_{n-1} = q(n-1)$	Classe \mathfrak{A}_0 $q \equiv 0 \pmod{n}$		(incompleti)
			Classe \mathfrak{A}_{-1} $q \equiv -1 \pmod{n}$	$\left. \begin{array}{l} n = q + 1 \\ n \leq q \end{array} \right\}$	(incompleti)
			Classe \mathfrak{A}^* $q(q+1) \equiv 0 \pmod{n}$ $\left(\begin{array}{l} \mathfrak{A}^* = \emptyset \text{ se} \\ (n, q) = 1 \text{ o } n \end{array} \right)$		(?)
			Classe \mathfrak{B}_0 $q \equiv 0 \pmod{n}$		(completi)
			Classe \mathfrak{B}_{-1} $q \equiv -1 \pmod{n}$	$\left[\begin{array}{l} \text{Gli archi incompleti} \\ \text{si completano} \\ \text{univocamente in} \\ \{q(n-1)+2; n\}\text{-archi} \end{array} \right]$	(?)
			Classe \mathfrak{B}^* $q(q+1) \equiv 0 \pmod{n}$ $\left(\begin{array}{l} \mathfrak{B}^* = \emptyset \text{ se} \\ (n, q) = 1 \text{ o } n \end{array} \right)$		(?)
LS -archi regolari non appartenenti alle classi \mathfrak{A} e \mathfrak{B} .			(completi)		

BIBLIOGRAFIA

- [1] BARLOTTI, A: *Some topics in finite geometrical structures*, University of North Carolina, Ist. of Statist. Mimeo Series, N° 439.
- [2] BOSE, R. C.: *On the application of finite projective geometry for deriving a certain series of balanced Kirkman arrangements*, The golden jubilee commemoration volume (1958-59). Calcutta Mathematical Society.
- [3] DENNISTON, R. H. F.: *Some maximal arcs in finite projective planes*, Journal of Combinatorial Theory, 6 (1969), pp. 317-319.
- [4] LUNELLI, L. e SCE, M.: *Considerazioni aritmetiche e risultati sperimentali sui $(k, n)_q$ -archi*, Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A. 98 (1964), pp. 3-52.

- [5] PIPER, F.: *Polarities of finite projective planes* (Da pubblicare).
- [6] TALLINI SCAFATI, M.: *(k, n)-archi di un piano grafico finito, con particolare riguardo a quelli con due caratteri*, Roma Accademia Nazionale dei Lincei (1966). Rendiconti della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Manoscritto pervenuto in redazione l'1 aprile 1971.