

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ENRICO MARTINO

**Elementi distributivi nel reticolo dei sottogruppi
d'un gruppo localmente nilpotente**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 45 (1971), p. 81-93

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1971__45__81_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1971__45__81_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

ELEMENTI DISTRIBUTIVI NEL RETICOLO DEI SOTTOGRUPPI D'UN GRUPPO LOCALMENTE NILPOTENTE

ENRICO MARTINO *)

Introduzione.

Ricordiamo le seguenti definizioni:

Un elemento a di un reticolo L dicesi neutro se, per ogni $x, y \in L$, il sottoreticolo $\langle a, x, y \rangle$ di L è distributivo.

È noto che l'elemento $a \in L$ è neutro se e solo se soddisfa alle seguenti condizioni:

- (i) $a \cap (x \cup y) = (a \cap x) \cup (a \cap y)$
- (ii) $a \cup (x \cap y) = (a \cup x) \cap (a \cup y)$
- (iii) $\left. \begin{array}{l} a \cup x = a \cup y \\ a \cap x = a \cap y \end{array} \right\} \Rightarrow x = y$

per ogni coppia $x, y \in L$.

Un elemento $a \in L$ dicesi un elemento $\cap$ -distributivo (abbr. $\cap$ -d.) se soddisfa alla (i), un elemento $\cup$ -distributivo ($\cup$ -d.) se soddisfa alla (ii), un *u.c.r.-elemento* (elemento con unico complemento relativo) se soddisfa alla (iii). Quest'ultima denominazione è dovuta al fatto che la (iii) esprime che a , in ogni intervallo che lo contiene, ammette al più un unico complemento.

Infine, l'elemento $a \in L$ dicesi $\cap$ -quasi distributivo ($\cap$ -q.d.) se la (i) è soddisfatta per ogni copia $x, y \in L$ tale che sia $a \cap x = a \cap y$. Dualmente, si ha la nozione di elemento $\cup$ -quasi distributivo ($\cup$ -q.d.).

*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico dell'Università di Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca matematici del C.N.R.

Diversi autori si sono proposti di caratterizzare alcuni dei suddetti elementi nel reticolo $\mathfrak{L}(G)$ dei sottogruppi d'un gruppo G . Higman, Sato e Zappa hanno determinato in modo completo gli elementi $\cup$ -d. di $\mathfrak{L}(G)$ [6]. Curzio e Napolitani hanno provato che gli elementi $\cup$ -q.d. di $\mathfrak{L}(G)$ coincidono con quelli $\cup$ -d. [1] [3]. Zappa ha determinato gli elementi $\cap$ -d. e gli elementi neutri di $\mathfrak{L}(G)$ quando G è un gruppo finito [6]. Infine, Napolitani ha determinato gli u.c.r.-elementi e gli elementi $\cap$ -q.d. di $\mathfrak{L}(G)$ sempre nel caso che G sia finito [4].

Nella presente nota dimostreremo che, ove G sia un gruppo localmente nilpotente, i vari tipi di elementi di $\mathfrak{L}(G)$ di cui sopra coincidono tutti fra loro, di guisa che per essi vale la già nota caratterizzazione degli elementi $\cup$ -d.

Dedurremo infine che, qualora G sia in più privo di torsione, la presenza in $\mathfrak{L}(G)$ di uno dei suddetti elementi non banale implica che G è localmente ciclico.

I simboli usati saranno quelli usuali della teoria dei gruppi. Se G è un gruppo periodico, indicheremo con $\omega(G)$ l'insieme dei divisori primi (ivi compreso il numero 1) degli ordini degli elementi di G . Nel seguito, per comodità di linguaggio, parleremo di u.c.r.-sottogruppi, di sottogruppi neutri ecc. di G anzichè di u.c.r.-elementi, di elementi neutri ecc. di $\mathfrak{L}(G)$.

1. In questo numero stabiliremo il predetto risultato nel caso d'un gruppo localmente nilpotente periodico.

PROPOSIZIONE 1. *Se N è un u.c.r.-sottogruppo (un sottogruppo $\cap$ -q.d.) del gruppo periodico G , allora N è caratteristico in G .*

DIMOSTRAZIONE. Come nel caso dei gruppi finiti [4] si prova che, se N contiene un elemento d'ordine primo p , allora esso contiene il sottogruppo $M_1^{(p)}$ generato dagli elementi d'ordine p di G .

Consideriamo ora la catena ascendente di sottogruppi caratteristici

$$M_1^{(p)} \subseteq M_2^{(p)} \subseteq \dots \subseteq M_i^{(p)} \subseteq \dots$$

così definita $M_1^{(p)}$ ha il significato già dichiarato e, induttivamente, $M_i^{(p)}$ è il sottogruppo generato da $M_{i-1}^{(p)}$ e dagli elementi d'ordine p mod. $M_{i-1}^{(p)}$.

Sia $h \in N$ un p -elemento: indicato con τ il minimo indice tale che $h \in M_{\tau}^{(p)}$, mostriamo che è $M_{\tau}^{(p)} \subseteq N$.

Ciò è vero se $|h| = p$, possiamo dunque procedere per induzione rispetto ad n , essendo n definito dalla $|h| = p^n$.

Dall'ipotesi su τ segue l'esistenza di un elemento $h^{p^{n'}} \in N$ ($1 \leq n' \leq n$) tale che il primo $M_i^{(p)}$ cui esso appartiene sia $M_{\tau-1}^{(p)}$. Poichè $|h^{p^{n'}}| < p^n$, per l'ipotesi induttiva è $M_{\tau-1}^{(p)} \subseteq N$.

$N/M_{\tau-1}^{(p)}$ è un u.c.r.-sottogruppo (un sottogruppo $\cap$ -q.d.) di $G/M_{\tau-1}^{(p)}$ e contiene l'elemento $h \in M_{\tau-2}^{(p)}$ d'ordine p , dunque contiene il sottogruppo $M_{\tau}^{(p)}/M_{\tau-1}^{(p)}$ generato dagli elementi d'ordine p di $G/M_{\tau-1}^{(p)}$; di conseguenza $N \supseteq M_{\tau}^{(p)}$. Ora, poichè $M_{\tau}^{(p)}$ è caratteristico in G , ogni automorfismo di G lascia h in N e quindi, essendo ogni elemento di N esprimibile come prodotto di p -elementi, trasforma N in sè, onde N è caratteristico in G .

Ricordiamo le seguenti definizioni [5]:

Dicesi *gruppo dei quaternioni d'ordine 2^n* ($n \geq 3$) il gruppo

$$Q^{(n)} = \langle a, b/a^{2^{n-1}} = e, b^{-1}ab = a^{-1}, b^2 = a^{2^{n-2}} \rangle.$$

Dicesi *gruppo infinito dei quaternioni* il gruppo

$$Q^{(\infty)} = \langle b, a_n (n=1, 2 \dots) / b^2 = a_1, a_n^b = a_n^{-1}, a_{n+1}^2 = a_n, a_1^2 = e \rangle.$$

Nel seguito, parlando di gruppo dei quaternioni senza ulteriori specificazioni, intenderemo indifferentemente un gruppo finito o infinito dei quaternioni.

LEMMA 2. Se N è un u.c.r.-sottogruppo non banale del p -gruppo localmente finito H , allora H è localmente ciclico oppure è un gruppo dei quaternioni; in quest'ultimo caso è $|N| = 2$.

DIMOSTRAZIONE. Sia K un sottogruppo finito di H . Scelti in H due elementi a, b tali che sia $e \neq a \in N$, $b \notin N$, il sottogruppo $K' = K \cup \langle a, b \rangle$ è finito e $K' \cap N$ ne è un u.c.r.-sottogruppo non banale, perciò K' è ciclico o dei quaternioni [4] e tale è quindi anche K . Ne segue che H ha rango speciale finito, quindi è un p -gruppo di Cernikov ([2], pag. 231) e come tale soddisfa alla condizione del normalizzante. Inoltre, H ha un

solo sottogruppo d'ordine p , perciò esso è localmente ciclico o dei quaternioni ([5], pag. 193). In quest'ultimo caso è poi $|N|=2$, chè altrimenti esisterebbe un sottogruppo finito di H dei quaternioni dotato di un u.c.r.-sottogruppo non banale d'ordine diverso da 2, cosa assurda [4].

OSSERVAZIONE 3. *Ferme le ipotesi e le notazioni del Lemma precedente, N è confrontabile con ogni sottogruppo di H , sicchè N è neutro in H .*

TEOREMA 4. *Sia N un sottogruppo del gruppo periodico localmente nilpotente G .*

Le seguenti proposizioni sono equivalenti:

- a) N è un u.c.r.-sottogruppo di G .
- b) N è normale in G e, per ogni $p \in \omega(N) \cap \omega(G/N)$, il p -sottogruppo di Sylow S_p di G è localmente ciclico o dei quaternioni, in quest'ultimo caso essendo $|S_p \cap N|=2$.
- c) N è un sottogruppo neutro di G .
- d) N è un sottogruppo $\cap$ -q.d. di G .
- e) N è un sottogruppo $\cup$ -q.d. di G .

DIMOSTRAZIONE. $a) \Rightarrow b)$.

Già si è provato che $N \triangleleft G$ (Teorema 1). Quanto al resto, essendo G localmente finito, basta provare che $T_p = S_p \cap N$ è sottogruppo non banale di S_p per concludere in virtù del Lemma 2.

Invero, poichè $p \in \omega(N)$ e G è un S -gruppo, è $T_p \neq e$.

Essendo poi $p \in \omega(G/N)$, esiste un p -elemento a di G non contenuto in N , onde $a \in S_p$ e quindi $S_p \cap N \neq S_p$.

$b) \Rightarrow c)$.

Per ogni $p \in \omega(G)$, se S_p è il p -sottogruppo di Sylow di G , $S_p \cap N$ è neutro in S_p (Osservazione 3), onde, essendo $G = \prod_{p \in \omega(G)} S_p$, N è neutro in G ([6], pag. 79).

$c) \Rightarrow d)$, $c) \Rightarrow e)$.

Evidente.

$d) \Rightarrow a), e) \Rightarrow a).$

Ragionando come nel caso dei gruppi finiti [4], si riconosce che un sottogruppo normale $\cap$ -q.d. ($\cup$ -q.d.) d'un gruppo G è un u.c.r.-sottogruppo di G ; donde la conclusione.

2. In questo numero estenderemo il Teorema 4 al caso che G sia un gruppo localmente nilpotente qualsiasi.

PROPOSIZIONE 5. *Sia N un u.c.r.-sottogruppo (un sottogruppo $\cap$ -q.d.) del gruppo G . Se g ed a sono due elementi permutabili di G con $e \neq a \in N$, allora g ha ordine finito mod. N .*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che N sia un u.c.r.-sottogruppo, analogamente procedendosi se esso è $\cap$ -q.d.

Supposto, per assurdo, che g abbia ordine infinito mod. N , si verifica direttamente che

$$(1) \quad \langle g \rangle \neq \langle ga \rangle,$$

$$(2) \quad \langle g \rangle \cap N = \langle ga \rangle \cap N = e,$$

$$(3) \quad \langle g \rangle \cup N = \langle ga \rangle \cup N.$$

Le (1), (2), (3) contraddicono l'ipotesi su N ; donde l'asserto.

PROPOSIZIONE 6. *Sia N un u.c.r.-sottogruppo (un sottogruppo $\cap$ -q.d.) del gruppo G . Se g ed a sono due elementi permutabili di G con $e \neq a \in N$, $g \notin N$ e se $\langle g \rangle \cap \langle a \rangle = e$, allora a ha ordine finito e primo con l'ordine di g mod. N .*

DIMOSTRAZIONE. Sia N un u.c.r.-sottogruppo di G . Detto n l'ordine di g mod. N , poniamo

$$V_1 = \langle g, a^n \rangle, \quad V_2 = \langle ga, a^n \rangle.$$

Si verifica direttamente che

$$N \cap V_1 = N \cap V_2, \quad N \cup V_1 = N \cup V_2,$$

talchè dall'ipotesi su N si trae $V_1 = V_2$.

Ne segue che $ga \in V_1$, donde facilmente la conclusione.

Dalla proposizione precedente discende immediatamente il seguente corollario che nel seguito sfrutteremo sistematicamente:

COROLLARIO 7. *Sia N un u.c.r.-sottogruppo (un sottogruppo $\cap$ -q.d.) del gruppo G . Se g ed a sono due elementi permutabili di G con $e \neq a \in N$, $g \notin N$ e se a è aperiodico, allora è $\langle g \rangle \cap \langle a \rangle \neq e$.*

PROPOSIZIONE 8. *Sia H un sottogruppo normale del gruppo G . Se N è un u.c.r.-sottogruppo (un sottogruppo $\cap$ -q.d.) di G ed $H \cap N = e$, allora NH/H è un u.c.r.-sottogruppo (un sottogruppo $\cap$ -q.d.) di G/H .*

DIMOSTRAZIONE. Ci limitiamo, come al solito a considerare il caso che N sia un u.c.r.-sottogruppo di G .

Siano V_1/H , V_2/H due sottogruppi di G/H tali che

$$(1) \quad \frac{NH}{N} \cap \frac{V_1}{H} = \frac{NH}{H} \cap \frac{V_2}{H}$$

$$(2) \quad \frac{NH}{H} \cup \frac{V_1}{H} = \frac{NH}{H} \cup \frac{V_2}{H}.$$

Dalla (1) si trae

$$V_1 \cap NH = V_2 \cap NH$$

e quindi

$$(V_1 \cap N)H = (V_2 \cap N)H.$$

Da questa segue poi facilmente

$$V_1 \cap N = V_2 \cap N$$

mentre dalla (2) segue direttamente

$$V_1 \cup N = V_2 \cup N$$

di guisa che l'ipotesi su N implica $V_1 = V_2$ e quindi $V_1/H = V_2/H$; donde l'asserto.

LEMMA 9. *Sia N un u.c.r.-sottogruppo (un sottogruppo $\cap$ -q.d.) del gruppo nilpotente G (di cui indicheremo con Z_k il k -esimo centro). Se Z_1 è periodico e inoltre $Z_1 \not\subseteq N$, $Z_1 \cap N \neq e$, allora G è periodico.*

DIMOSTRAZIONE. Supposto che sia periodico Z_{k-1} , proviamo che è periodico Z_k . Dal Corollario 7 segue intanto che è periodico N , di guisa che basta provare che ogni elemento di Z_k ha ordine finito mod. $N \cup Z_{k-1}$. Invero, supposto, per assurdo, che $z_k \in Z_k$ abbia ordine infinito mod. NZ_{k-1} , se $a \in N \cap Z_k$, $a \neq e$, si verifica facilmente che

$$(1) \quad \langle z_k \rangle \neq \langle z_k a \rangle$$

$$(2) \quad \langle z_k \rangle \cup N = \langle z_k a \rangle \cup N.$$

Si ha inoltre

$$(3) \quad \langle z_k \rangle \cap N = \langle z_k a \rangle \cap N = e.$$

Infatti, se $x \in \langle z_k a \rangle \cap N$, si ha

$$x = (z_k a)^m = z_k^m a^m z_{k-1}$$

con m intero opportuno e $z_{k-1} \in Z_{k-1}$.

Ne segue che $z_k^m \in NZ_{k-1}$ onde è $m=0$ e quindi $x=e$.

Le (1), (2), (3) contraddicono l'ipotesi su N ; donde la conclusione.

LEMMA 10. *Se N è un u.c.r.-sottogruppo (un sottogruppo $\cap$ -q.d.) del gruppo localmente nilpotente G , allora N è normale in G .*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo dapprima che G sia addirittura nilpotente di classe n . Visto che il teorema è ovvio per i gruppi abeliani, possiamo supporre, induttivamente, che esso sia vero per i gruppi nilpotenti di classe $n-1$.

Distinguiamo i seguenti casi:

$$1) Z_1 \subseteq N.$$

N/Z_1 è un u.c.r.-sottogruppo di G/Z_1 che è nilpotente di classe $n-1$, sicchè, per l'ipotesi induttiva, è $N/Z_1 \triangleleft G/Z_1$, onde $N \triangleleft G$.

$$2) Z_1 \not\subseteq N, Z_1 \cap N \neq e.$$

Se Z_1 è periodico anche G è periodico (Lemma 9), onde $N \triangleleft G$ (Proposizione 1).

Se Z_1 non è periodico, dal Corollario 7 segue l'esistenza d'uno $z_1 \in Z_1$ aperiodico tale che $z_1 \notin N$ e dalla Proposizione 5 segue che

$\langle z_1 \rangle \cap N \neq e$. Pertanto, sempre dal Corollario 7 si deduce facilmente che ogni elemento di G ha ordine finito mod. $\langle z_1 \rangle \cap N$, talchè $G/\langle z_1 \rangle \cap N$ è periodico, onde $N/\langle z_1 \rangle \cap N \triangleleft G/\langle z_1 \rangle \cap N$ e quindi $N \triangleleft G$.

3) $Z_1 \cap N = e$.

Dalla Proposizione 8 segue che NZ_1/Z_1 è un u.c.r.-sottogruppo di G/Z_1 sicchè, per l'ipotesi induttiva, è $NZ_1/Z_1 \triangleleft G/Z_1$ onde $NZ_1 \triangleleft G$ e quindi, essendo $\omega(N) \cap \omega(Z_1) = 1$ (Proposizione 6), risulta $N \triangleleft G$.

Il lemma si estende poi in modo ovvio al caso che G sia localmente nilpotente.

PROPOSIZIONE 11. *Se N è un u.c.r.-sottogruppo normale non identico del gruppo G , allora G/N è periodico.*

DIMOSTRAZIONE. Supposto, per assurdo, che $g \in G$ abbia ordine infinito mod. N , se $a \in N$, $a \neq e$, si verifica facilmente che

$$(1) \quad \langle g \rangle \neq \langle ga \rangle$$

$$(2) \quad \langle g \rangle \cap N = \langle ga \rangle \cap N = e$$

$$(3) \quad \langle g \rangle \cup N = \langle ga \rangle \cup N$$

contro l'ipotesi su N ; donde l'asserto.

COROLLARIO 12. *Sia N un u.c.r.-sottogruppo non identico del gruppo nilpotente G . Se $N \cap Z_1 = e$, allora G è periodico.*

DIMOSTRAZIONE. Dal Corollario 7 segue che N è periodico, dal Lemma 10 e dalla Proposizione 11 che G/N è periodico; donde la conclusione.

Dal corollario precedente e dal Lemma 9 segue poi immediatamente il

COROLLARIO 13. *Sia N un u.c.r.-sottogruppo non identico del gruppo nilpotente G . Se Z_1 è periodico e $Z_1 \not\subseteq N$, allora G è periodico.*

LEMMA 14. *Sia N un u.c.r.-sottogruppo non banale del gruppo localmente nilpotente non periodico G . Se g, h sono elementi aperiodici di G , allora è $\langle g \rangle \cap \langle h \rangle \neq e$; inoltre, la parte periodica di G è contenuta in N .*

DIMOSTRAZIONE. Se G è abeliano esiste, in virtù della Proposizione 11, un elemento $a \in N$ aperiodico e, se $g \notin N$, risulta $\langle g \rangle \cap \langle a \rangle \neq e$ (Corollario 7), donde facilmente la conclusione.

Se G è nilpotente di classe n , possiamo supporre, induttivamente, che il lemma valga per i gruppi nilpotenti di classe $n-1$. Distinguiamo i seguenti casi:

1) Z_1 è periodico.

È $Z_1 \subsetneq N$, chè altrimenti G sarebbe periodico (Corollario 13 e Proposizione 11), perciò N/Z_1 è un u.c.r.-sottogruppo non banale del gruppo non periodico G/Z_1 nilpotente di classe $n-1$. Se ora g ed h sono due elementi aperiodici di G , per l'ipotesi induttiva risulta $\langle gZ_1 \rangle \cap \langle hZ_1 \rangle \neq Z_1$, da cui $g^r = h^s z_1$ (con r ed s interi opportuni, $z_1 \in Z_1$) talchè, detto t l'ordine di z_1 , si ha $g^{rt} = h^{st}$.

Inoltre, se g è un elemento di G tale che $g \notin N$, per l'ipotesi induttiva gZ_1 è un elemento aperiodico di G/Z_1 , onde g è un elemento aperiodico di G .

2) Z_1 non è periodico.

Se $Z_1 \not\subset N$ (potendo essere eventualmente $Z_1 = N$), si conclude facilmente applicando il Corollario 7.

Se $Z_1 \subsetneq N$, dal Corollario 7 discende che ogni elemento $g \notin N$ ha ordine finito mod. Z_1 , cioè che gZ_1 è un elemento periodico di G/Z_1 , talchè dalla ipotesi induttiva si trae che G/Z_1 è periodico, dopo di che l'asserto discende ancora facilmente dal Corollario 7.

È poi immediato estendere il lemma al caso che G sia un qualunque gruppo localmente nilpotente.

LEMMA 15. *Se G è un gruppo nilpotente finitamente generato non periodico tale che, per ogni coppia g, h di elementi aperiodici, sia $\langle g \rangle \cap \langle h \rangle \neq e$, allora ogni sottogruppo non periodico di G contiene un sottogruppo non periodico normale in G .*

DIMOSTRAZIONE. Sia $G = \langle y_1, y_2, \dots, y_k \rangle$ con gli $y_1, \dots, y_k$ d'ordine infinito e sia H un sottogruppo non periodico di G . Allora $\langle y_1 \rangle \cap \langle y_2 \rangle \cap \dots \cap \langle y_k \rangle \cap H$ è il sottogruppo richiesto.

TEOREMA 16. *Sia N un sottogruppo non banale del gruppo localmente nilpotente G .*

Le seguenti proposizioni sono equivalenti:

- a) N è un u.c.r.-sottogruppo di G .
- b) 1) N è normale in G .
2) G/N è periodico.
3) Per ogni eventuale coppia di elementi aperiodici $g, h \in G$ $\langle g \rangle \cap \langle h \rangle \neq e$.
4) Se G non è aperiodico la parte periodica di G è contenuta in N .
5) Se H è un sottogruppo di G , fissato comunque un sottogruppo $K \subseteq H \cap N$ normale in H tale che H/K sia periodico, per ogni $p \in \omega\left(\frac{H}{H \cap N}\right) \cap \omega\left(\frac{H \cap N}{K}\right)$ il p -sottogruppo di Sylow S_p di H/K è localmente ciclico o dei quaternioni, in quest'ultimo caso essendo $\left|S_p \cap \frac{H \cap N}{K}\right| = 2$.
- c) N è un sottogruppo neutro di G .
- d) N è un sottogruppo $\cap$ -q.d. di G .
- e) N è un sottogruppo $\cup$ -q.d. di G .

DIMOSTRAZIONE.

$a) \Rightarrow b)$.

Le 1), 2), 3), 4), sono state dimostrate rispettivamente nel Lemma 10, nella Proposizione 11 e nel Lemma 14.

Quanto alla 5), basta osservare che $H \cap N/K$ è un u.c.r.-sottogruppo del gruppo periodico H/K ed applicare a questo il Teorema 4.

$b) \Rightarrow c)$.

Detti V_1, V_2 due sottogruppi qualsiasi di G , dimostriamo che

$$(i) \quad N \cap (V_1 \cup V_2) = (N \cap V_1) \cup (N \cap V_2).$$

Allo scopo, basta provare che

$$N \cap (V_1 \cup V_2) \subseteq (N \cap V_1) \cup (N \cap V_2)$$

l'inclusione inversa essendo evidente.

Se $x \in N \cap (V_1 \cup V_2)$, siano $V'_1 \subseteq V_1$ e $V'_2 \subseteq V_2$ due sottogruppi finitamente generati tali che $x \in N \cap (V'_1 \cup V'_2)$. Per concludere che $x \in (N \cap V_1) \cup (N \cap V_2)$ basta allora provare che

$$(ii) \quad N \cap (V'_1 \cup V'_2) = (N \cap V'_1) \cup (N \cap V'_2).$$

All'uopo distinguiamo i seguenti casi:

j) V'_1 e V'_2 sono entrambi periodici.

Essendo G un S -gruppo, è periodico anche $H = V'_1 \cup V'_2$, perciò, essendo $H \cap N$ un u.c.r.-sottogruppo di H , dal Teorema 1 segue che esso è un sottogruppo $\cap$ -d. di H , donde la (ii).

jj) V'_1 e V'_2 sono entrambi non periodici.

In tal caso, per la 2) N è non periodico, sicchè per la 3) tale è anche $N \cap V'_1 \cap V'_2$ onde questo, in virtù del Lemma 16, ammette un sottogruppo K non periodico normale in $H = V'_1 \cup V'_2$. Per la 2) H/K è periodico, perciò la 4), in virtù del Teorema 4, porge che $N \cap H/K$ è un sottogruppo $\cap$ -d. di H/K , di guisa che risulta

$$\frac{N \cap H}{K} \cap \left(\frac{V'_1}{K} \cap \frac{V'_2}{K} \right) = \left(\frac{N \cap H}{K} \cup \frac{V'_1}{K} \right) \cap \left(\frac{N \cap H}{K} \cup \frac{V'_2}{K} \right),$$

donde la (ii).

jjj) V'_1 è periodico e V'_2 è non periodico.

In tal caso è $V'_1 \subseteq N$ mentre $V'_2 \cap N$ è non periodico, talchè, tenendo conto di jj), si ha

$$\begin{aligned} N \cap (V'_1 \cup V'_2) &= N \cap (V'_1 \cup (N \cap V'_2) \cup V'_2) = \\ &= \{N \cap [V'_1 \cup (N \cap V'_2)]\} \cup (N \cap V'_2) = \\ &= V'_1 \cup (N \cap V'_2) = (N \cap V'_1) \cup (N \cap V'_2). \end{aligned}$$

Analogamente si dimostra che

$$N \cup (V_1 \cap V_2) = (N \cup V_1) \cap (N \cup V_2)$$

onde N è neutro.

$c) \Rightarrow d), c) \Rightarrow e).$

Evidente.

$d) \Rightarrow a), e) \Rightarrow a).$

Seguono dalla normalità di N (Lemma 10).

OSSERVAZIONE. *Se, in particolare, G è abeliano, la b) del teorema precedente si può così esprimere:*

1) *G ed N hanno lo stesso rango che vale 0 oppure 1, nel quale ultimo caso la parte periodica di G è contenuta in N .*

2) *Fissato comunque un sottogruppo $H \subseteq N$ tale che G/H sia periodico, per ogni $p \in \omega(N/H) \cap \omega(G/N)$, il p -sottogruppo di Sylow di G/H è localmente ciclico.*

COROLLARIO 18. *Sia G un gruppo localmente nilpotente privo di torsione ed N un suo sottogruppo non banale. N è neutro se e solo se G è localmente ciclico.*

DIMOSTRAZIONE. Sia N neutro. Per concludere basta provare che G è abeliano perchè allora, in virtù dell'Osservazione 17, esso ha rango 1 e quindi è localmente ciclico.

Orbene, se $g, h \in G$, è $\langle g \rangle \cap \langle h \rangle \neq e$ (Lemma 14), talchè risulta $g^m h = h^m g$ con m intero opportuno, ma allora, poichè G nelle ipotesi attuali è un R -gruppo (cioè ogni suo elemento ha al più una radice n -esima), è anche $gh = hg$ [2].

Viceversa, se G è localmente ciclico $\mathfrak{L}(G)$ è, come noto, distributivo e quindi ogni suo elemento è neutro.

BIBLIOGRAFIA

- [1] CURZIO, M.: *Elementi $\cup$ -quasi distributivi in alcuni reticoli di gruppi*, Ric. di matematica, vol. XIII, 1964.
- [2] KUROSH, A. G.: *The theory of groups*, New York, 1955.
- [3] NAPOLITANI, F.: *Elementi $\cup$ -quasi distributivi nel reticolo dei sottogruppi d'un gruppo*, Ric. di matematica, vol. XIV, 1965.

- [4] NAPOLITANI, F.: *Elementi $\cap$ -quasi distributivi ed u.c.r.-elementi nel reticolo dei sottogruppi d'un gruppo finito*, Ric. di matematica, vol. XVIII, 1968.
- [5] SCHENKMAN, E.: *Group theory*, New York, 1965.
- [6] SUZUKI, M.: *Structure of a group and the structure of its lattice of subgroup*, Springer Verlag, Berlin, 1956.

Manoscritto pervenuto in redazione il 30 aprile 1970.