RENDICONTI
*del*
SEMINARIO MATEMATICO
*della*
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIULIANO BRATTI

# Un altro modo di costruire la serie di Fourier delle distribuzioni di una variabile quasi periodiche

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 45 (1971), p. 305-313

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1971__45__305_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

# UN ALTRO MODO DI COSTRUIRE LA SERIE DI FOURIER DELLE DISTRIBUZIONI DI UNA VARIABILE QUASI PERIODICHE

GIULIANO BRATTI *)

§ 1. Laurent Schwartz ha costruito la serie di Fourier di una distribuzione scalare quasi periodica utilizzando i seguenti risultati:

*a*) lo spazio vettoriale, $\mathcal{B}_{q.p.}$, delle funzioni quasi periodiche di classe $\mathcal{C}^\infty$ è denso nello spazio vettoriale $\mathcal{B}'_{q.p.}$ delle distribuzioni quasi periodiche con la topologia indotta dal duale forte di $\mathcal{D}_{L^1}$;

*b*) la mappa $M$ di valor medio delle funzioni quasi periodiche è continua su $\mathcal{B}_{q.p.}$ quando quest'ultimo ha la topologia indotta da $\mathcal{B}'_{q.p.}$, [2], pag. 206.

Nella nota presente si dimostra come sia possibile costruire la serie di Fourier di una distribuzione quasi periodica a partire da una funzione, quasi periodica, « naturalmente » associata alla distribuzione; si ottiene il seguente risultato: *se* $T \in \mathcal{D}'_{L^\infty}$ *è quasi periodica, i coefficienti* (*distribuzioni*) *di Fourier della funzione* $\theta_T(h) : R \to \mathcal{D}'_{L^\infty} \subset \mathcal{D}'$, $\theta_T(h) = \tau_h T$, $\theta_T(h)$ *quasi periodica, coincidono con i termini della serie di Fourier della distribuzione* $T$.

Nel § 3 si esende il procedimento usato per le distribuzioni scalari alle distribuzioni vettoriali in uno spazio di Banach.

§ 2. Seguendo L. Schwartz, [1], pag. 199, si indica con $\mathcal{D}'_{L^\infty}$ il duale forte di $\mathcal{D}_{L^1}$.

---

*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico Università, 35100 Padova.

Vale la seguente caratterizzazione: $T \in \mathcal{D}'^{\infty}_{L}$ *è quasi periodica se e solo se la mappa* $\theta_T(h) : R \to \mathcal{D}'^{\infty}_{L}$ , $\theta_T(h) = \tau_h T$, *soddisfa la proprietà di Bochner generalizzata* (*da ogni rete di funzioni del tipo* $\theta_T(h+k_j)$, $k_j \in R$, *è possibile estrarre una sottorete,* $\theta_T(h+k_{j'})$, *con, in* $\mathcal{D}'^{\infty}_{L}$, $\lim_{j'} \theta_T(h+k_{j'}) = g(h)$, *uniformemente rispetto ad* $h \in R$).

DIMOSTRAZIONE. È sufficiente tener presente che: se si ha, in $\mathcal{D}'^{\infty}_{L}$ , $\lim_j T_j = Q$, si ha pure, $\lim_j \tau_h T_j = \tau_h Q$, uniformemente rispetto a $h \in R$.

Ciò a causa del fatto che se l'insieme $A \subset \mathcal{D}_{L^1}$ è limitato, anche l'insieme $\{\tau_h A\} = \{\varphi(x+h\}$, $\forall \varphi \in A$, $\forall h \in R\}$ è limitato in $\mathcal{D}_{L^1}$.

TEOREMA. Sia $T \in \mathcal{D}'^{\infty}_{L}$ quasi periodica.

*a) in* $\mathcal{D}'$, *il* $\lim_{k \to +\infty} 1/k \int_0^k (\tau_h T) dh$ *esiste ed è una distribuzione costante* $T_c$ ;

*b)* $c$ *di* $T_c$ *è il valore medio, secondo Schwartz, di* $T$ : $c = M(T)$.

DIMOSTRAZIONE. $\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}$, sia

$$\langle Q \cdot \varphi \rangle = \lim_{k \to +\infty} 1/k \int_0^k \langle T \cdot \varphi(x+h) \rangle dh.$$

$Q$ è lineare e continua su $\mathcal{D}$. Nel fatto:

$$\langle Q \cdot A \rangle = \{ \lim_{k \to +\infty} 1/k \int_0^k \langle T \cdot \varphi(x+h) \rangle dh, \ \forall \varphi(x) \in A \}$$

è limitato in $C$ se $A$ è limitato in $\mathcal{D}$. La rete

$$\{1/k \int_0^k (\tau_h T) dh, \ k \geq 1, \ k \in R\}$$

converge, in $\mathcal{D}'$, debolmente a $Q$; poichè:

$$\{\{1/k \int_0^k (\tau_h T) dh, \ k \geq 1, \ k \in R\} \cup Q\}$$

è relativamente compatto in $\mathfrak{D}'$, ne segue:

$$\lim_{k\to+\infty} 1/k \int_0^k (\tau_h T)dh = Q,$$

limite forte in $\mathfrak{D}'$, [4], pag. 358.

La prima parte di *a*) è dimostrata.

Per la seconda parte di *a*) si ha: se $S\in\mathfrak{D}'$ e $S'=T$,

$$1/k \int_0^k (\tau_h T)dh = 1/k(S-\tau_k S);$$

$$\lim_{k\to+\infty} 1/k(S-\tau_k S)' = Q';$$

poichè

$$1/k(S-\tau_k S)' = 1/k(T-\tau_k T) \text{ e } T\in\mathfrak{D}'_{L^\infty}$$

ne segue: $Q'=0$. $Q$ è costante.

Per la dimostrazione di *b*) si ha: sia $T=T_f$, $f(x)$ quasi periodica; $M(T)=\lim_{k\to+\infty} 1/k \int_0^k f(x)dx$. Se si pone $a_k=1/k\int_0^k f(x)dx$ si ha, in $\mathfrak{D}'$, $\lim_{k\to+\infty} T_{a_k}=T_{M(T)}$.

Se

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt, \qquad 1/k\int_0^k (\tau_h f(x))dh = 1/k(F(x)-\tau_k F(x));$$

risulta:

$$\lim_{k\to+\infty} \{\langle 1/k[F(x)-\tau_k F(x)]\cdot\varphi(x)\rangle - \langle T_{a_k}\cdot\varphi(x)\rangle\}=0, \quad \forall\varphi(x)\in\mathfrak{D}.$$

Nel fatto se $[a, b]$ è il supporto di $\varphi(x)$:

$$\lim_{k\to+\infty} \langle 1/k[F(x)-\tau_k F(x)]\cdot\varphi(x)\rangle =$$

$$= \lim_{k\to+\infty} 1/k \int_a^b F(x)\varphi(x)dx - \lim_{k\to+\infty} 1/k \int_a^b F(x-k)\varphi(x)dx.$$

Il primo limite è nullo;

$$1/k \int_a^b F(x-k)\varphi(x)dx = 1/k[F(x-k) \int_a^x \varphi(t)dt]_a^b - 1/k \int_a^b f(x-k) \int_a^x \varphi(t)dtdx.$$

Il secondo termine del secondo membro ha limite nullo, poichè la funzione integranda è limitata, rimane da calcolare

$$- \lim_{k \to +\infty} 1/k \left[ F(b-k) \int_a^b \varphi(t)dt \right].$$

Si ha:

$$- \lim_{k \to +\infty} 1/k \int_0^{b-k} f(t)dt \cdot \int_a^b \varphi(t)dt;$$

con il cambiamento di variabile $u=t-b$ il limite diventa:

$$\left[ - \lim_{k \to +\infty} 1/k \int_{-b}^0 f(u+b)du - \lim_{k \to +\infty} 1/k \int_0^{-k} f(u+b)du \right] \int_a^b \varphi(t)dt.$$

Il primo limite è nullo; il secondo è $m(f) \int_a^b \varphi(t)dt$.

Sia $T=T_g$, $g=f^k$, $k$ intero $>0$, $f(x)$ quasi periodica, derivazione $k$-esima nel senso delle distribuzioni.

$M(T)= \lim_j (M[f_j^k])$, se in $\mathfrak{D}'_{L^\infty}$, $f_j(x) \to f(x)$, $f(x) \in \mathcal{C}^\infty$ quasi periodiche. Poichè $M[f_j^k]=0$, $M(T)=0$.

In $\mathfrak{D}'$,

$$\lim_{k \to +\infty} 1/k \int_0^k \theta_T(h)dh = \lim_{k \to +\infty} 1/k(f^{k-1} - \tau_k f^{k-1}) = 0,$$

poichè $f^{k-1} \in \mathfrak{D}'_{L^\infty}$.

Sia $T=\sum_1^n f_i^{k_i}$; poichè $M$ è lineare è sufficiente ragionare per induzione su $n$.

Il teorema è completamente dimostrato.

In $\mathfrak{D}'$ sia, $\forall\lambda\in R$,

$$Q(\lambda)=\lim_{k\to+\infty} 1/k\int_0^k \theta_T(h)e^{-i\lambda h}dh;$$

che il limite esista si ha con ragionamento analogo a quello in *a*) del teorema precedente.

Si ha:

*a*) $T_1\equiv T_2$ *se e solo se* $Q_1(\lambda)=Q_2(\lambda)$, $\forall\lambda\in R$;

*b*) $E\subset R$, $E=\{\lambda\in R : Q(\lambda)\neq 0\}$ *è un insieme numerabile.*

DIMOSTRAZIONE. *a*) sia $Q_1(\lambda)=Q_2(\lambda)$, $\forall\lambda\in R$.

Se $\varphi(x)\in\mathfrak{D}$ si ha:

$$\langle Q_1(\lambda)\cdot\varphi(x)\rangle=\langle Q_2(\lambda)\cdot\varphi(x)\rangle=$$

$$=\lim_{k\to+\infty} 1/k\int_0^k \langle T_1\cdot\varphi(x+h)\rangle e^{-i\lambda h}dh=\lim_{k\to+\infty} 1/k\int_0^k \langle T_2\cdot\varphi(x+h)\rangle e^{-i\lambda h}dh.$$

Le funzioni quasi periodiche $\langle T_1\cdot\varphi(x+h)\rangle$ e $\langle T_2\cdot\varphi(x+h)\rangle$ hanno gli stessi coefficienti di Fourier: esse coincidono. Ne segue: $T_1\equiv T_2$.

*b*) semplici calcoli danno:

$$\forall\lambda\in R,\ \tau_h(Te^{i\lambda x})=e^{i\lambda x}\theta_T(h)e^{-i\lambda h}$$

Se

$$Q(\lambda)=\lim_{k\to+\infty} 1/k\int_0^k \theta_T(h)e^{-i\lambda h}dh$$

si ha, pure,

$$Q(\lambda)e^{i\lambda x}=\lim_{k\to+\infty} 1/k\int_0^k e^{i\lambda x}\theta_T(h)e^{-i\lambda h}dh.$$

Ma l'ultimo limite coincide con:

$$\lim_{k\to+\infty} 1/k \int_0^k \tau_h(e^{i\lambda x}T)dh$$

che, in virtù del teorema dimostrato, coincide con $Q_{[M(e^{i\lambda x}T)]}$.

Con la simbologia di Schwartz:

$$Q(\lambda)=Q_{a_{-\lambda}(T)}e^{-i\lambda x}, \qquad a_{-\lambda}(T)=M[e^{-i(-\lambda)x}T].$$

Se $\varphi(x)\in\mathfrak{D}$:

$$\langle Q(\lambda)\cdot\varphi(x)\rangle=a_{-\lambda}(T)\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\lambda x}\varphi(x)dx=\lim_{k\to+\infty}1/k\int_0^k\langle T\cdot\varphi(x+h)\rangle e^{-i\lambda h}dh.$$

La funzione di variabile reale $\lambda$, $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\lambda x}\varphi(x)dx$ è la subordinata, su $R$, di una funzione di variabile complessa, olomorfa intera [3], pag. 210.

Sia

$$E_1=\left\{\lambda\in R : a_{-\lambda}(T)\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\lambda x}\varphi(x)dx\neq 0\right\}:$$

$E_1$ è numerabile poichè è l'insieme degli esponenti di Fourier della funzione quasi periodica $\langle T\cdot\varphi(x+h)\rangle$.

Sia

$$E_2=\left\{\lambda\in R : \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\lambda x}\varphi(x)dx=0\right\}:$$

$E_2$ è numerabile. Se $\lambda\notin E_1\cup E_2$

$$a_{-\lambda}(T)\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\lambda x}\varphi(x)dx=0$$

e, poichè $\lambda\notin E_2$, $a_{-\lambda}(T)=0$.

Allora $E'=\{\lambda : a_{-\lambda}(T)\neq 0\}\subset E_1\cup E_2$ : ne segue la tesi di $b$).

OSSERVAZIONE. Nel corso della dimostrazione di $b$) si è provato: $Q(\lambda)=Q_{a_{-\lambda}(T)}e^{i(-\lambda)x}$; ciò significa: *I coefficienti (distribuzioni) di Fourier della funzione quasi periodica* $\theta_T(h) : R\to\mathfrak{D}'_{L^\infty}\subset\mathfrak{D}'$, *calcolati in* $\mathfrak{D}'$, *coincidono con i termini della serie di Fourier della distribuzione* $T$.

§ 3. Il procedimento fin qui usato si può estendere al caso delle distribuzioni vettoriali in uno spazio di Banach quasi periodiche.

Da [1], § 5, si ha: $L_{\text{q.p.}}\simeq\mathcal{B}'_{\text{q.p.}}\,\widehat{\otimes}_\varepsilon B$, $L_{\text{q.p.}}\subseteq L_b(\mathfrak{D}_{L^1}; B)$, $B$ spazio di Banach.

Se $T\in\mathcal{B}'_{\text{q.p.}}$ e $u\in B$, $T\otimes u : \mathfrak{D}_{L^1}\to B$ è q.p., poichè

$$\lim_{k\to+\infty} 1/k\int_0^k \theta_T(h)dh=T_c$$

in $\mathfrak{D}'$,

$$\lim_{k\to+\infty} 1/k\int_0^k \theta_{T\otimes u}(h)dh=T_c\otimes u$$

in $L_b(\mathfrak{D}; B)$. Se $\varphi(T)=T_c$, la mappa lineare $\varphi : \mathcal{B}'_{\text{q.p.}}\to\mathfrak{D}'$ è continua; ne segue:

$$\varphi\otimes_\varepsilon i=\varphi_\varepsilon : \mathcal{B}'_{\text{q.p.}}\otimes_\varepsilon B\to\mathfrak{D}'\otimes_\varepsilon B\subset L_b(\mathfrak{D}; B)$$

è continua [4], pag. 439. È unica, allora, l'estensione, $\widehat{\varphi}_\varepsilon$, di $\varphi_\varepsilon$ per continuità: $\widehat{\varphi}_\varepsilon : \mathcal{B}'_{\text{q.p.}}\,\widehat{\otimes}_\varepsilon B\to L_b(\mathfrak{D}; B)$.

Se $T$ è q.p. $T=\lim_j \Sigma^{(j)}T_k\otimes u_k$, limite in $L_{\text{q.p}}$, e

$$\tau_hT=\lim_j \Sigma^{(j)}(\tau_hT_k)\otimes u_k$$

uniformemente rispetto a $h\in R$.

$$\varphi_\varepsilon(\Sigma^{(j)}T_k\otimes u_k)=1\otimes v_j\,(^*)\,,\ \langle 1\otimes v_j\cdot\varphi\rangle=v_j\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx\in B.$$

---

*) $\varphi_\varepsilon[\Sigma_k^{(j)}T_k\otimes u_k]=(T_{b_1}\otimes u_1+\ldots+T_{b_n}\otimes u_u)^{(j)}=1\otimes v_j$ con $v_j=b_1u_1+\ldots+b_uu_u$, $b_i=M(T_i)\in C$, $l\leq i\leq h$.

$\widehat{\varphi}_\varepsilon(T)=\lim_j 1\otimes v_j$, $[\widehat{\varphi}_\varepsilon(T)]'=\lim_j [1\otimes v_j]'=0$; ne segue $\widehat{\varphi}_\varepsilon(T)=T_u$ per qualche $u\in B$,

$$\langle T_u\cdot\varphi\rangle=u\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx\in B.$$

Si ha:

$$\widehat{\varphi}_\varepsilon(T)=\lim_{k\to+\infty} 1/k\int_0^k(\tau_h T)dh,$$

*limite ed integrazione in* $L_b(\mathfrak{D};\ B)$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $A\subset\mathfrak{D}$, limitato

$$\langle T\cdot\varphi(x+h)\rangle=\lim_j \Sigma^{(j)}\langle T_k\cdot\varphi(x+h)\rangle u_k\,,$$

uniformemente rispetto a $h\in R$, a $\varphi(x)\in A$. Allora:

$$1/k_1\int_0^{k_1}\|\langle T\cdot\varphi(x+h)\rangle-\Sigma^{(j)}\langle T_k\cdot\varphi(x+h)\rangle u_k\|\,dh<\eta$$

se $j\geq j(\eta,\ A)$, $k_1\in R_+$ ; dunque

$$\|\langle 1/k_1\int_0^{k_1}(\tau_h T)dh-1/k_1\int_0^{k_1}\Sigma^{(j)}(\tau_h T_k)\otimes u_k dh\cdot A\rangle\|<\eta$$

se $j\geq j(\eta,\ A)$, $k_1\in R_+$ . Posto

$$Q=\lim_{k_1\to+\infty} 1/k_1\int_0^{k_1}(\tau_h T)dh$$

ne deriva $\|(Q-1\otimes v_j\cdot A\rangle\|<\eta$, come sopra; allora $Q=\lim_j 1\otimes v_j=\widehat{\varphi}_\varepsilon(T)$.

La dimostrazione è compiuta.

Sia

$$Q(\lambda)=\lim_{k\to+\infty} 1/k \int_0^k (\tau_h T)e^{-i\lambda h}dh,$$

limite ed integrazione in $L_b(\mathfrak{D}; B)$. Si ha, come in *b*) dell'ultimo teorema del § 2,

$$Q(\lambda)=T_{u(-\lambda)}e^{-i\lambda x}, \qquad u(-\lambda)=\widehat{\varphi}_\varepsilon[e^{-i(-\lambda)x}T]\in B.$$

Ragionamenti analoghi a quelli dell'ultimo teorema di § 2 danno: $u(\lambda)\neq 0$ per, al più, un'infinità numerabile di $\lambda\in R$.

OSSERVAZIONE. Si vede facilmente come il valor medio calcolato, $\widehat{\varphi}_\varepsilon(T)$, coincida con quello di S. Zaidman, [5].

## BIBLIOGRAFIA

[1] BRATTI, G.: *Sulle distribuzioni vettoriali di una variabile debolmente quasi periodiche*, Rend. Sem. Mat. di Padova, 1970.

[2] SCHWARTZ, L.: *Théorie des distributions*, Hermann, 1966.

[3] SCHWARTZ, L.: *Méthodes mathematiques pour les sciences physiques*, Hermann, 1965.

[4] TREVES, F.: *Topological vector spaces, distributions and kernels*, Ac. Press, 1967.

[5] ZAIDMAN, S.: *Corso C.I.M.E.*, 1961.

Manoscritto pervenuto in redazione il 16 dicembre 1970.