RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANTONIO CLAUDIO GRIOLI

Su una derivata interessante la teoria relativistica dei materiali non semplici

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 45 (1971), p. 183-197

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1971__45__183_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SU UNA DERIVATA INTERESSANTE LA TEORIA RELATIVISTICA DEI MATERIALI NON SEMPLICI *)

ANTONIO CLAUDIO GRIOLI

1. Introduzione.

A. Bressan da un lato basa in [1], [2], [4] e [5] la Elasticità relativistica, eventualmente con coppie di contatto, sulla derivata lagrangiana spaziale $T^{\alpha_1 \ldots; A_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots; B_1 \ldots | A}$ di un arbitrario doppio tensore $T^{\alpha_1 \ldots; A_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots; B_1 \ldots}$, e in particolare sul gradiente spaziale n-mo di posizione $\overset{\rho}{\alpha}_{A_1 \ldots A_n}$ per $n = 1, 2, \ldots$. Dall'altra in [3] lo stesso autore considera i fondamenti della teoria dei materiali di ordine n, eventualmente con memoria, in relatività generale. Egli dimostra sulla base di una certa versione relativistica del principio di indifferenza materiale, che il generico sistema dei funzionali costitutivi è costituito da funzionali i cui valori dipendono dalla storia termo-magneto cinematica solo tramite la storia lagrangiana, a quella associata.

Per far ciò tra l'altro, Bressan introduce una certa relativizzazione del gradiente n-mo di posizione che è costruita mediante derivazione totale della posizione sulla ipersuperficie totalmente geodetica e localmente tempo-ortogonale e che indicherò con $\overset{\rho}{x}_{\| A_1 \ldots A_n}$.

Di $\overset{\rho}{\alpha}_{A_1 \ldots A_n}$ e $T^{\alpha_1 \ldots; A_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots; B_1 \ldots | A_1 \ldots A_n}$ si sanno costruire le espressioni esplicite in riferimenti generali (mediante operazioni razionali e di derivazione) a partire dalle equazioni del moto, dall'espressione del tensore metrico e da $T^{\alpha_1 \ldots; A_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots; B_1 \ldots}$.

Non sussiste invece l'analogo per $\overset{\rho}{x}_{\| A_1 \ldots A_n}$.

Riallacciandomi al lavoro [3] considero la suaccennata derivazione

---

*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

n-ma sulla ipersuperfice totalmente geodetica e tempo-ortogonale in relazione ad un arbitrario doppio tensore $T^{\alpha_1 \ldots, A_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots, B_1 \ldots}$. Ne indico con $T^{\alpha_1 \ldots, A_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots, B_1 \ldots \| A_1 \ldots A_n}$ il risultato e chiamo tale derivata totalmente geodetica e tempo ortogonale. Mostro che tale derivata può esprimersi con operazioni razionali e di derivazione a partire dal moto, dal tensore metrico e da $T^{\alpha_1 \ldots, A_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots, B_1 \ldots}$, indico per ogni valore di n il modo di calcolarla e mostro alcune sue proprietà.

In relatività generale esplicito la relazione esistente fra $T^{\alpha_1 \ldots, A_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots, B_1 \ldots \| AB}$ e $T^{\alpha_1 \ldots, A_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots, B_1 \ldots | AB}$ [1]) e mostro l'eguaglianza delle due relativizzazioni $\overset{\rho}{\alpha}_{AB}$ e $\overset{\rho}{x}_{|AB}$ del gradiente secondo classico di posizione. In relatività ristretta esplicito anche la relazione fra $\overset{\rho}{\alpha}_{ABC}$ e $\overset{\rho}{x}_{\| ABC}$ e mostro come la differenza fra tali grandezze dipenda dall'atto di moto.

Mentre per $n \leq 2$ la $\overset{\rho}{x}_{\| A_1 \ldots A_n}$ coincide con $\overset{\rho}{\alpha}_{A_1 \ldots A_n}$ [2]), per $n > 2$ la prima grandezza è puramente posizionale mentre la seconda dipende dall'atto di moto. Per questo la $\overset{\rho}{x}_{\| A_1 \ldots A_n}$ ha interesse nella dinamica dei corpi elastici generalizzati.

2. La derivata n-ma totalmente geodetica.

Indico con S_4 una determinazione dinamicamente possibile del cronotopo in relatività ristretta o generale e con (x^ρ) un ammissibile sistema di coordinate.

Sia $g_{\rho\sigma}$ il tensore metrico di S_4, con $g_{00} < 0$; introduco il proiettore spaziale

$$\overset{\perp}{g}_{\rho\sigma} = g_{\rho\sigma} + u_\rho u_\sigma \qquad \left(u^\rho = \frac{Dx^\rho}{Ds} \right). \tag{1}$$

Considero un continuo C in moto in S_4. Sia S_3^* l'intersezione di una sezione spaziale di S_4 col tubo di universo descritto da C in S_4 e pongo su di essa

$$y^L = \delta^L_\rho x^\rho \qquad a^*_{LM} = \overset{\perp}{g}_{LM} \qquad (\text{su } S_3^*), \tag{2}$$

---

[1]) vedi (65). Per la definizione di $T^{\alpha_1 \ldots, A_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots, B_1 \ldots}$ vedi (30).

[2]) Vedi (73).

intendendo come nel seguito che gli indici greci varino da 0 a 3 e quelli latini da 1 a 3.

La $(2)_1$ fornisce un sistema (y^L) di coordinate per S^*_3, mentre $(2)_2$ dà una metrica che lo rende uno spazio riemanniano di segnatura $+ + +$. Questo spazio costituisce l'analogo relativistico della configurazione di riferimento e lo ritengo fissato una volta per tutte. Per semplicità indico ancora con S_4 la determinazione attuale del cronotopo e intenderò riferire ad esso le $g_{\rho\sigma}$ e $\overset{J}{g}_{\rho\sigma}$.

Siano:

$$x^\rho = x^\rho(t,\ y^R) \tag{3}$$

le equazioni del moto di C. Inoltre suppongo che le (3) godano di tutte le proprietà di regolarità necessarie nel seguito.

Le equazioni (3) sono determinate a meno di una sostituzione:

$$t = t(\bar{t},\ y^R) \qquad \bar{t} = \bar{t}(t,\ y^R) \tag{4}$$

sul parametro temporale t, e per ogni fissato t rappresentano una biiezione dello spazio S^*_3 dei punti materiali y^R su una ipersuperficie S_3 del genere spazio in S_4.

Supposte invertibili le (3) si può esprimere t in funzione delle x^ρ:

$$t = t(x^\rho). \tag{5}$$

Sia $T^{\alpha_1 \ldots, A_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots, B_1 \ldots}$ un doppio tensore associato ai punti x^ρ di S_4 e y^R di S^*_3, eventualmente dipendente anche dal parametro temporale t.

Supposti allora S_4 e S^*_3 legati dalle (3) per un fissato valore di t, si chiama, come è noto, derivata totale covariante di $T^{\alpha_1 \ldots, A_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots, B_1 \ldots}$ rispetto ad y^R il doppio tensore definito da:

$$T^{\alpha_1 \ldots, A_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots, B_1 \ldots; R} = T^{\alpha_1 \ldots, A_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots, B_1 \ldots /\rho} x^\rho_{/R} + T^{\alpha_1 \ldots, A_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots, B_1 \ldots /R}\ . \tag{6}$$

Si chiama poi derivata totale covariante n-ma la derivata totale covariante prima della derivata totale covariante $(n-1)$-ma:

$$T^{\alpha_1 \ldots, A_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots, B_1 \ldots; A_1 \ldots A_n} = (T^{\alpha_1 \ldots, A_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots, B_1 \ldots; A_1 \ldots A_{n-1}})_{; A_n}\ . \tag{7}$$

Si consideri la derivata totale covariante n-ma di $T^{\alpha_1 \ldots, A_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots, B_1 \ldots}$ rispetto alle y^R in un punto evento E di coordinate $\overline{x}^\rho$ per una scelta $\tilde{t}=\tilde{t}(x^\rho)$ del parametro temporale, tale che l'equazione:

$$\tilde{t}(x^\rho)=0 \tag{8}$$

rappresenti l'ipersuperficie totalmente geodetica Γ passante per E e ivi normale alla quadrivelocità u^ρ.

Mi propongo di esprimere questa derivata, che indicherò con $T^{\alpha_1 \ldots, A_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots, B_1 \ldots \,||\, A_1 \ldots A_n}$ a partire da un'espressione del tutto generale di $T^{\alpha_1 \ldots, A_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots, B_1 \ldots}$, ossia per una scelta arbitraria del parametro temporale, e la chiamerò derivata covariante n-ma totalmente geodetica e tempo-ortogonale o più brevemente *derivata n-ma geodetica.*

Si può intanto osservare che in base alla sua definizione tale derivata gode delle usuali proprietà delle derivate in relazione alla somma, al prodotto e all'innalzamento ed abbassamento degli indici. Non è invece in generale vera la relazione:

$$(T^{\alpha_1 \ldots, A_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots, B_1 \ldots \,||\, A_1 \ldots A_r})_{||\, A_{r+1} \ldots A_{r+s}} = T^{\alpha_1 \ldots, A_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots, B_1 \ldots \,||\, A_1 \ldots A_{r+s}}. \tag{9}$$

In base alla definizione di $T^{\alpha_1 \ldots, A_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots, B_1 \ldots \,||\, A_1 \ldots A_n}$ si ha:

$$T^{\alpha_1 \ldots, A_1 \ldots}_{B_1 \ldots \beta_1 \ldots, \,||\, A_1} = [T^{\alpha_1 \ldots, A_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots, B_1 \ldots \, t=t(\tilde{t}, y^R)}]; \; A_1 \tag{10}$$

dove la sostituzione $t=t(\tilde{t}, y^R)$ che compare in (10) ha lo scopo di sostituire al generico parametro temporale t che compare in (3) il parametro $\tilde{t}$ soddisfacente alla proprietà anzidetta cf. (8).

Identificando t con y^0 si ha dunque:

$$T^{\alpha_1 \ldots, A_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots, B_1 \ldots \,||\, A_1} = T^{\alpha_1 \ldots, A_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots, B_1 \ldots /\rho}(x^\rho_{A_1} + x^\rho_0 y^0_{A_1}) + T^{\alpha_1 \ldots, A_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots, B_1 \ldots \,/A_1}. \tag{11}$$

Per la derivata seconda si ha:

$$T^{\alpha_1 \ldots, A_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots, B_1 \ldots \,||\, A_1 A_2} = [T^{\alpha_1 \ldots, A_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots, B_1 \ldots \, t=t(\tilde{t}, y^R)}]; \; A_1 A_2 = \tag{12}$$

$$= T^{\alpha_1 \ldots, A_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots, B_1 \ldots /\rho\sigma}(x^\rho_{A_1} + x^\rho_0 y^0_{A_1})(x^\sigma_{A_2} + x^\sigma_0 y^0_{A_2}) + T^{\alpha_1 \ldots, A_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots, B_1 \ldots /\rho}(x^\rho_{/A_1 A_2} + x^\rho_{/A_1 0} y^0_{A_2} +$$

$$+ x^\rho_{/0 A_2} y^0_{A_1} + x^\rho_{00} y^0_{A_1} y^0_{A_2} + x^\rho_0 y^0_{/A_1 A_2}) + T^{\alpha_1 \ldots, A_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots, B_1 \ldots /\rho A_2}(x^\rho_{A_1} + x^\rho_0 y^0_{A_1}) +$$

$$+ T^{\alpha_1 \ldots, A_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots, B_1 \ldots \,/A_1 \sigma} x^\sigma_{A_2} + x^\sigma_0 y^0_{A_2}) + T^{\alpha_1 \ldots, A_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots, B_1 \ldots \,/A_1 A_2}.$$

Analogamente si procede per le derivate successive, la derivata n-ma essendo data da:

$$T^{\alpha_1 \ldots, A_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots, B_1 \ldots \,||\, A_1 \ldots A_n} = [T^{\alpha_1 \ldots, A_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots, B_1 \ldots \; t=t(\tilde{t}, y^R)}]; \quad A_1 \ldots A_n . \tag{13}$$

Le quantità che compaiono nell'espressione di $T^{\alpha_1 \ldots, A_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots, B_1 \ldots \,||\, A_1 \ldots A_n}$ sono tutte note tranne le $y^0_{A_1}, \ldots y^0_{/A_1 \ldots A_n}$ dove è:

$$y^0 = t(\tilde{t}, y^R) \qquad \text{per } \tilde{t}=0. \tag{14}$$

3. Un procedimento per il calcolo esplicito di $T^{\alpha_1 \ldots, A_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots, B_1 \ldots \,||\, A_1 \ldots A_n}$ a partire da un'espressione qualunque di $T^{\alpha_1 \ldots, A_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots, B_1 \ldots}$.

Interpreto le equazioni (3) come equazioni di un cambiamento di coordinate in S_4.

Considero la generica geodetica in S_4 passante per E ed ivi normale ad u^ρ. Le sue equazioni nel nuovo sistema di coordinate, riferite ad un parametro privilegiato s, che ha il significato di arco cronotopico nel caso che la curva abbia lunghezza nulla, sono date da:

$$\ddot{y}^\rho + \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \sigma \; \tau \end{matrix} \right\} \dot{y}^\sigma \dot{y}^\tau = 0 \tag{15}$$

con:

$$\dot{y}^\rho(0) u_\rho = 0 \tag{16}$$

dove il punto indica derivazione rispetto ad s ed i simboli di Christoffel che compaiono nella (15) vanno calcolati rispetto al nuovo sistema di coordinate y^ρ in base alla nota formula:

$$\overline{g}_{\alpha\beta} = g_{\rho\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\sigma}{\partial y^\beta} . \tag{17}$$

Al variare dei valori iniziali $\dot{y}^\rho$, compatibilmente con la (16), la geodetica di equazioni (15) descrive Γ in base alla definizione di ipersuperficie totalmente geodetica.

L'equazione di Γ può porsi nella forma:

$$y^0 = \varphi(y^R) \tag{18}$$

dove la (18) è caratterizzata dalla condizione di valere per ogni soluzione di (15) e (16).

Derivando la (18) rispetto ad s si ottiene:

$$\dot{y}^0 = \varphi_{,A}\dot{y}^A \tag{19}$$

dove la virgola indica derivazione parziale. Imponendo che la (19) sia soddisfatta in E da ogni soluzione della (16) e osservando che ovviamente u^0 è diverso da zero, si trae con semplici operazioni razionali:

$$\varphi_{,A} = -\frac{u_A}{u_0}\,. \tag{20}$$

Derivando ancorala (19) rispetto ad s si ottiene:

$$\ddot{y}^0 = \varphi_{,AB}\dot{y}^A\dot{y}^B + \varphi_{,A}\ddot{y}^A. \tag{21}$$

Imponendo che la (21) sia soddisfatta in E da ogni soluzione di (15) e (16), si trova la condizione per $\varphi_{,AB}$:

$$(\varphi_{,AB} + \mathcal{A}_{AB})\dot{y}^A\dot{y}^B = 0 \tag{22}$$

con:

$$\mathcal{A}_{AB} = \left[\begin{Bmatrix} 0 \\ 0\ 0 \end{Bmatrix} - \varphi_R \begin{Bmatrix} R \\ 0\ 0 \end{Bmatrix}\right]\varphi_{,A}\varphi_{,B} + \left[\begin{Bmatrix} 0 \\ A\ 0 \end{Bmatrix} - \varphi_R \begin{Bmatrix} R \\ A\ 0 \end{Bmatrix}\right]\varphi_{,B} + \tag{23}$$

$$+ \left[\begin{Bmatrix} 0 \\ 0\ B \end{Bmatrix} - \varphi_{,R} \begin{Bmatrix} R \\ 0\ B \end{Bmatrix}\right]\varphi_{,A} + \left[\begin{Bmatrix} 0 \\ A\ B \end{Bmatrix} - \varphi_{,R} \begin{Bmatrix} R \\ A\ B \end{Bmatrix}\right].$$

La (22) deve valere per valori arbitrari di $\dot{y}^A$, $\dot{y}^B$; si trae dunque:

$$\varphi_{,AB} = -\mathcal{A}_{AB}\,. \tag{24}$$

Derivando ancora le (21) ed imponendo che l'equazione che così si ottiene sia soddisfatta per ogni soluzione di (15) (1,6) e delle equazioni che si ottengono derivando le (15), si arriverà ad un'equazione della forma:

$$(\varphi_{,ABC} + \mathcal{A}_{ABC})\dot{y}^A\dot{y}^B\dot{y}^C = 0 \tag{25}$$

che deve essere soddisfatta per valori arbitrari delle $\dot{y}^R$ e dove le $\mathcal{A}_{ABC}$ sono quantità facilmente calcolabili mediante operazioni razionali e derivazioni di quantità note.

Da (25) si ottiene quindi:

$$\varphi_{,ABC} = -\mathcal{A}_{ABC} . \tag{26}$$

In generale ripetendo il procedimento sin qui descritto, con derivazioni successive si arriva ad un'equazione della forma:

$$(\varphi_{,A_1 \dots A_n} + \mathcal{A}_{A_1 \dots A_n})\dot{y}^{A_1} \dots \dot{y}^{A_n} = 0 \tag{27}$$

che deve essere soddisfatta per valori arbitrari delle $\dot{y}^R$ e da cui dunque si trae:

$$\varphi_{,A_1 \dots A_n} = -\mathcal{A}_{A_1 \dots A_n} \tag{28}$$

dove le quantità $\mathcal{A}_{A_1 \dots A_n}$ sono facilmente calcolabili mediante operazioni razionali e di derivazione.

Note le $\varphi_{,A_1 \dots A_n}$ in base alle (28), si ottengono subito le $y^0{}_{/A_1 \dots A_n}$ mediante le note formule che legano le derivate tensoriali covarianti a quelle parziali e si ha così l'espressione cercata di $T^{\alpha_1 \dots, A_1 \dots}_{\beta_1 \dots, B_1 \dots \,||\, A_1 \dots A_n}$ a partire da un'espressione di $T^{\alpha_1 \dots, A_1 \dots}_{\beta_1 \dots, B_1 \dots}$ riferita a sistemi di coordinate arbitrari e ad un'arbitraria scelta del parametro temporale.

4. Relazione tra $T^{\alpha_1 \dots, A_1 \dots}_{\beta_1 \dots, B_1 \dots \,||\, AB}$ e la derivata lagrangiana normale $T^{\alpha_1 \dots, A_1 \dots}_{\beta_1 \dots, B_1 \dots \,|\, AB}$.

Riferiamoci al doppio tensore $T^{\alpha_1 \dots, A_1 \dots}_{\beta_1 \dots, B_1 \dots}$ definito in S_4 e S_3. In relazione al moto (3) si definisce derivata lagrangiana prima di $T^{\alpha_1 \dots, A_1 \dots}_{\beta_1 \dots, B_1 \dots}$ rispetto ad y^A la derivata totale di $T^{\alpha_1 \dots, A_1 \dots}_{\beta_1 \dots, B_1 \dots}$ rispetto ad y^A quando in $T^{\alpha_1 \dots, A_1 \dots}_{\beta_1 \dots, B_1 \dots}$ si sia operata la sostituzione $t = \hat{t}(\hat{t}, y^R)$ dove $\hat{t}$ è un parametro tempo-ortogonale in E, vedi [1, § 13]. Tale derivata è univocamente determinata da questa condizione e si indica con $T^{\alpha_1 \dots, A_1 \dots}_{\beta_1 \dots, B_1 \dots \,|\, A}$; si ha quindi:

$$T^{\alpha_1 \dots, A_1 \dots}_{\beta_1 \dots, B_1 \dots \,|\, A} = [T^{\alpha_1 \dots, A_1 \dots}_{\beta_1 \dots, B_1 \dots \; t=\hat{t}(\hat{t}, y^R)}]; \; A. \tag{29}$$

Si chiama poi derivata spaziale lagrangiana n-ma di $T^{\beta_1 \dots, B_1 \dots}_{\alpha_1 \dots, A_1 \dots}$ il dop-

pio tensore:

$$(30) \qquad T^{\alpha_1 \ldots, A_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots, B_1 \ldots \mid A_1 \ldots A_n} = (T^{\alpha_1 \ldots, A_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots, B_1 \ldots \mid A_1 \ldots A_{n-1}}) \mid A_n .$$

Mi propongo di trovare una relazione che leghi $T^{\alpha_1 \ldots, A_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots, B_1 \ldots \mid AB}$ e $T^{\alpha_1 \ldots, A_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots, B_1 \ldots \| AB}$

Per far ciò mi pongo in un riferimento χ naturale, proprio e localmente geodetico con origine in E, in cui valgono quindi le relazioni locali in E:

$$(31)_1 \qquad g_{\alpha\beta} = \delta'_{\alpha\beta} \qquad \text{con } \delta'_{\alpha 0} = \delta_{\alpha 0} , \ \delta'_{rs} = -\delta_{rs}$$

$$(31)_2 \qquad g_{\alpha\beta, \gamma} = 0$$

$$(31)_3 \qquad u^\rho = \delta^\rho_0$$

Sia:

$$(32) \qquad x^0 = f(x^r)$$

l'equazione di Γ in χ.

Considero ora il nuovo riferimento χ' ottenuto da χ mediante la trasformazione di coordinate:

$$(33) \qquad \begin{cases} \bar{x}^0 = x^0 - f(x^r) \\ \bar{x}^r = x^r , \end{cases} \qquad (34) \qquad \begin{cases} x^0 = \bar{x}^0 + f(\bar{x}^r) \\ x^r = \bar{x}^r . \end{cases}$$

Voglio far vedere che anche χ' è naturale, proprio e localmente geodetico in E, cioè che anche in χ' valgono in E le relazioni $(31)_1$, $(31)_2$, e $(31)_3$.

La trasformazione (33) è lineare in E a meno di quantità d'ordine maggiore di 2. Infatti in E si ha per (31) e (33):

$$(35) \qquad \frac{\partial \bar{x}^0}{\partial x^0} = 1 \quad \frac{\partial \bar{x}^0}{\partial x^r} = -f,r = \alpha u_r = 0 \quad \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^\rho} = \delta_\rho{}^r ,$$

dove α è un coefficiente di proporzionalità. Le (35) si possono compendiare nell'unica relazione:

$$(36) \qquad \frac{\partial \bar{x}^\rho}{\partial x^\sigma} = \delta^\rho_\sigma .$$

Per le derivate seconde da (33) si ha:

$$\frac{\partial^2 \overline{x}^r}{\partial x^\sigma \partial x^\tau} = 0, \quad \frac{\partial^2 \overline{x}^0}{\partial x^0 \partial x^\sigma} = 0, \quad \frac{\partial^2 \overline{x}^0}{\partial x^r \partial x^s} = f,rs. \tag{37}$$

Derivando due volte la (32) rispetto ad s si ottiene:

$$\dot{x}^0 = f,rs\ \dot{x}^r \dot{x}^s + f,r\ \ddot{x}^r. \tag{38}$$

Poichè la (32) è l'equazione di Γ la (38) deve essere soddisfatta in E da ogni soluzione di:

$$\ddot{x}^\rho + \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \sigma\ \tau \end{matrix} \right\} \dot{x}^\sigma \dot{x}^\tau = 0, \tag{39}$$

$$\dot{x}^\rho u_\rho = 0. \tag{40}$$

Essendo in χ nulli i simboli di Christoffel in E, la (39) diviene:

$$\ddot{x}^\rho = 0. \tag{41}$$

La (38), tenuto conto di (40), (41), $(35)_2$, $(35)_3$, diviene:

$$f,rs\ \dot{x}^r \dot{x}^s = 0. \tag{42}$$

La (42) deve essere soddisfatta per valori arbitrari di x^r e x^s e dunque porge:

$$f,rs = 0. \tag{43}$$

Da (43) e $(37)_3$ segue:

$$\frac{\partial^2 \overline{x}^0}{\partial x^r \partial x^s} = 0. \tag{44}$$

Le $(37)_1$, $(37)_2$ e (44) si possono compendiare nell'unica relazione:

$$\frac{\partial^2 \overline{x}^\rho}{\partial x^\sigma \partial x^\tau} = 0. \tag{45}$$

In base alle note formule di trasformazione dei coefficienti della metrica e dei simboli di Christoffel, tenuto conto di (36) e (45), si può concludere che anche nel nuovo riferimento χ' continuano a valere in E le relazioni $(31)_1$ e $(31)_2$.

Resta ancora da far vedere che anche in χ' vale in E la $(31)_3$.

Infatti da (33), $(35)_2$ e $(35)_3$ segue:

$$(46)_1 \qquad \overline{u}^0 = \frac{D\overline{x}^0}{Ds} = u^0 - f,r \;\; u^r = u^0,$$

$$(46)_2 \qquad \overline{u}^r = \frac{D\overline{x}^r}{Ds} = \frac{Dx^r}{Ds} = u^r \;.$$

Posso quindi concludere che anche χ' è naturale, proprio e localmente geodetico in E. In χ' l'equazione di Γ diviene:

$$(47) \qquad x^0 = 0.$$

Mi propongo adesso di trovare l'espressione di $T^{\alpha_1 \ldots, A_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots, B_1 \ldots \| AB}$ in χ'.

In base alla definizione di derivata totalmente geodetica, da (10), (12), segue, ricordando che si è identificato t con y^0:

$$(48) \qquad T^{\alpha_1 \ldots, A_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots, B_1 \ldots \| A} = T^{\alpha_1 \ldots, A_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots, B_1 \ldots / \rho}(x^\rho_A + x^\rho_0 y^0_A) + T^{\alpha_1 \ldots, A_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots, B_1 \ldots / A}$$

$$(49) \qquad T^{\alpha_1 \ldots, A_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots, B_1 \ldots \| AB} = T^{\alpha_1 \ldots, A_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots, B_1 \ldots / \rho\sigma}(x^\rho_A + x^\rho_0 y^0_A)(x^\sigma_B + x^\sigma_0 y^0_B) +$$

$$+ T^{\alpha_1 \ldots, A_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots, B_1 \ldots / \rho}(x^\rho_{AB} + x^\rho_{A0} y^0_B + x^\rho_{0B} y^0_A + x^\rho_{00} y^0_A y^0_B + x^\rho_0 y^0_{AB}) +$$

$$+ T^{\alpha_1 \ldots, A_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots, B_1 \ldots / \rho B}(x^\rho_A + x^\rho_0 y^0_A) + T^{\alpha_1 \ldots, A_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots, B_1 \ldots / A\rho}(x^\rho_B + x^\rho_0 y^0_B) + T^{\alpha_1 \ldots, A_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots, B_1 \ldots / AB}.$$

Derivando (8) rispetto alla y^A, tenuto conto di (3), (4) e di (47), si ha:

$$(50) \qquad \frac{d\tilde{t}}{dy^A} = x^0_A + x^0_0 y^0_A = 0$$

da cui segue tenuto conto di $(31)_3$:

$$(51) \qquad y^0_A = -\frac{x^0_A}{x^0_0} = -\frac{u_\rho x^\rho_A}{u_\rho x^\rho_0} = u^+_A \frac{Dt}{Ds} \qquad \text{ove } u^+_A = u_\rho x^\rho_A \,.$$

Derivando (50) rispetto ad y^B si ottiene:

$$\frac{d}{dy^B}\left(\frac{d\tilde{t}}{dy^A}\right)=x^0_{AB}+x^0_{A0}\,y^0_B+x^0_{0B}\,y^0_A+x^0_{00}y^0_Ay^0_B+x^0_{(}y^0_{AB}\,. \tag{52}$$

Da (52) $(31)_3$ et $(51)_3$ segue:

$$y^0_{AB}=u_\rho\left[x^\rho_{AB}+\frac{Dx^\rho_A}{Ds}u^+_B+\frac{Dx^\rho_B}{Ds}u^+_A+x^\rho_{00}u^+_Au^+_B\left(\frac{Dt}{Ds}\right)^2\right]. \tag{53}$$

Scegliendo il parametro t in modo tale che sia tempo-ortogonale in E, cioè che valga in E la relazione:

$$u^+_A=0 \tag{54}$$

le (51), (53) divengono rispettivamente:

$$y^0_A=0, \tag{55}$$

$$y_{AB}{}^0=u_\rho x^\rho_{AB}\frac{Dt}{Ds}. \tag{56}$$

Da (49), (55) e (56) segue:

$$T^{\alpha_1\ldots,A\ldots}_{\beta_1\ldots,B_1\ldots\,||\,AB}=T^{\alpha_1\ldots,A\ldots}_{\beta_1\ldots,B_1\ldots\,;\,AB}+\frac{DT^{\alpha_1\ldots,A\ldots}_{\beta_1\ldots,B_1\ldots}}{Ds}u_\rho x^\rho_{AB}\,. \tag{57}$$

Da (29), (30), (4), segue:

$$T^{\alpha_1\ldots,A_1\ldots}_{\beta_1\ldots,B_1\ldots\,|\,A}=T^{\alpha_1\ldots,A\ldots}_{\beta_1\ldots,B_1\ldots/\rho}(x^\rho_A+u^\rho u^+_A)+T^{\alpha_1\ldots,A\ldots}_{\beta_1\ldots,B_1\ldots/A}\,, \tag{58}$$

$$\begin{aligned}T^{\alpha_1\ldots,A\ldots}_{\beta_1\ldots,B_1\ldots\,|\,AB}&=T^{\alpha_1\ldots,A\ldots}_{\beta_1\ldots,B_1\ldots/\rho\sigma}(x^\rho_A+u^\rho u^+_A)(x^\sigma_B+u^\sigma u^+_B)+T^{\alpha_1\ldots,A\ldots}_{\beta_1\ldots,B_1\ldots/\rho}[x^\rho_{AB}+\\&+\frac{Dx^\rho_A}{Ds}u^+_B+x^\rho_{0B}u^+_A\frac{Dt}{Ds}+u^\rho u_{\alpha/B}x^\alpha_A+u^\rho u_\alpha(x^\alpha_{AB}+\frac{Dx^\rho_A}{Ds}u^+_B)]+\\&+T^{\alpha_1\ldots,A\ldots}_{\beta_1\ldots,B_1\ldots/\rho B}(x^\rho_A+u^\rho u^+_A)+T^{\alpha_1\ldots,A\ldots}_{\beta_1\ldots,B_1\ldots/A\rho}(x^\rho_B+u^\rho u^+_B)+T^{\alpha_1\ldots,A\ldots}_{\beta_1\ldots,B_1\ldots/AB}\,.\end{aligned} \tag{59}$$

Essendo t tempo-ortogonale, la (59) diviene:

$$T^{\alpha_1\ldots,A\ldots}_{\beta_1\ldots,B_1\ldots\,|\,AB}=T^{\alpha_1\ldots,A\ldots}_{\beta_1\ldots,B_1\ldots\,;\,AB}+\frac{DT^{\alpha_1\ldots,A\ldots}_{\beta_1\ldots,B_1\ldots}}{Ds}(u_{\rho/\tau}x^\rho_Ax^\tau_B+u_\rho x^\rho_{AB}). \tag{60}$$

Ricordo che, stante (1), si definisce gradiente primo spaziale di posizione il vettore α^{ρ}_{A} espresso dalla relazione:

$$\alpha^{\rho}_{A}=\overset{\perp}{g}{}^{\rho}_{\sigma}\, x^{\sigma}_{A} \qquad (\overset{\perp}{g}{}^{\rho}_{\sigma}=\delta^{\rho}_{\sigma}+u^{\rho}u_{\sigma}). \tag{61}$$

Da (61), (51) segue:

$$\alpha^{\rho}_{A}=x^{\rho}_{A}+u^{\rho}u^{+}_{A}\,. \tag{62}$$

Per $t=t(x)$ tempo-ortogonale, la (62) diviene:

$$\alpha^{\rho}_{A}=x^{\rho}_{A}\,. \tag{63}$$

Tenuto conto di (63) la (60) diviene:

$$T^{\alpha_1\ldots,A\ldots}_{\beta_1\ldots,B_1\ldots\,|\,AB}=T^{\alpha_1\ldots,A\ldots}_{\beta_1\ldots,B_1\ldots;\,AB}+\frac{DT^{\alpha_1\ldots,A\ldots}_{\beta_1\ldots,B_1\ldots}}{Ds}\,(u_{\rho/\tau}\alpha^{\rho}_{A}\alpha^{\tau}_{B}+u_{\rho}x^{\rho}_{AB}). \tag{64}$$

Il confronto tra (57) e (64) porge:

$$T^{\alpha_1\ldots,A\ldots}_{\beta_1\ldots,B_1\ldots\,||\,AB}=T^{\alpha_1\ldots,A\ldots}_{\beta_1\ldots,B_1\ldots\,|\,AB}-\frac{DT^{\alpha_1\ldots,A_1\ldots}_{\beta_1\ldots,B_1\ldots}}{Ds}\,u_{\rho/\tau}\alpha^{\rho}_{A}\alpha^{\tau}_{B}= \tag{65}$$

$$=T^{\alpha_1\ldots,A\ldots}_{\beta_1\ldots,B_1\ldots\,|\,AB}-\frac{DT^{\alpha_1\ldots,A\ldots}_{\beta_1\ldots,B_1\ldots}}{Ds}\,u^{*}_{AB}$$

dove u^{*}_{AB} indica il gradiente di velocità lagrangiano definito in base a:

$$u^{*}_{AB}=u_{\rho/\tau}\alpha^{\rho}_{A}\alpha^{\tau}_{B}=\alpha^{\rho}_{A}u_{\rho\,|\,B}=u_{\rho/\tau}\alpha^{\rho}_{A}\alpha^{\tau}_{B}\,. \tag{66}$$

La (65) dà la relazione cercata tra $T^{\alpha_1\ldots,A_1\ldots}_{\beta_1\ldots,B_1\ldots\,||\,AB}$ e $T^{\alpha_1\ldots,A_1\ldots}_{\beta_1\ldots,B_1\ldots\,|\,AB}$ e mostra come la loro differenza dipende dall'atto di moto.

5. Confronti tra $\alpha^{\rho}_{A_1\ldots A_n}$ e $X^{\rho}_{||\,A_1\ldots A_n}$ per $n=2,\ 3$.

Mi propongo dapprima di mettere $x^{\rho}_{||\,AB}$ in relazione col gradiente spaziale secondo della posizione α^{ρ}_{AB}.

Per definizione è:

$$\alpha^{\rho}_{AB}=\overset{\perp}{g}{}^{\rho}_{\sigma}\alpha^{\sigma}_{A\,|\,B}\,. \tag{67}$$

Da (67), (62) e (58) segue:

$$(68)\qquad \alpha^{\rho}_{AB}=\overset{\perp}{g}{}^{\rho}_{\sigma}\left(x^{\sigma}_{AB}+\frac{Dx^{\sigma}_{A}}{Ds}\,u^{+}_{B}+u^{\sigma}_{/B}\,u^{+}_{A}+A^{\sigma}u^{+}_{A}u^{+}_{B}+u^{\sigma}(u^{+}_{A})_{|B}\right)=$$

$$=\overset{\perp}{g}{}^{\rho}_{\sigma}\left(x^{\sigma}_{AB}+\frac{Dx^{\sigma}_{A}}{Ds}\,u^{+}_{B}+u^{\sigma}_{/B}\,u^{+}_{A}+A^{\sigma}u^{+}_{A}\,u^{+}_{B}\right),$$

poichè $\overset{\perp}{g}{}^{\rho}_{\sigma}u^{\sigma}=0$, dove A^{σ} è la 4-accelerazione definita da:

$$(69)\qquad A^{\sigma}=\frac{Du^{\sigma}}{Ds}.$$

Da (12), (51) e (53) segue:

$$(70)\qquad x^{\rho}_{\|\,AB}=\overset{\perp}{g}{}^{\rho}_{\sigma}\left(x^{\sigma}_{AB}+\frac{Dx^{\sigma}_{A}}{Ds}u^{+}_{B}+x^{\sigma}_{0B}u^{+}_{A}\frac{Dt}{Ds}+\frac{Dx^{\sigma}_{0}}{Ds}u^{+}_{A}u^{+}_{B}\frac{Dt}{Ds}\right).$$

Scegliendo t coincidente con s si ha:

$$(71)\qquad x^{\sigma}_{0B}\frac{Dt}{Ds}=u^{\sigma}_{/B}\,,\qquad \frac{Dx^{\tau}_{0}}{Ds}\frac{Dt}{Ds}=A^{\sigma}.$$

La (70) diviene, tenuto conto di (71):

$$(72)\qquad x^{\rho}_{\|\,AB}=\overset{\perp}{g}{}^{\rho}_{\sigma}(x^{\sigma}_{AB}+u^{\tau}_{/A}u^{+}_{B}+u^{\tau}_{/B}u^{+}_{A}+A^{\sigma}u^{+}_{A}u^{+}_{B}).$$

Il confronto di (68) e (72) porge:

$$(73)\qquad \alpha^{\rho}_{AB}=x^{\rho}_{\|\,AB}.$$

Si può osservare che scegliendo il parametro t tempo-ortogonale le (68), (72) divengono:

$$(74)\qquad \alpha^{\rho}_{AB}=x^{\rho}_{\|\,AB}=\overset{\perp}{g}{}^{\rho}_{\sigma}x^{\sigma}_{AB}.$$

Mi propongo ora di esplicitare la relazione esistente tra il gradiente terzo trasverso di posizione α^{ρ}_{ABC} e $x^{\rho}_{\|\,ABC}$, ponendomi però nell'ambito della relatività ristretta.

Per far ciò considero un riferimento pseudoeuclideo e localmente proprio in E, cioè tale da aversi in tutto lo spazio:

$$g_{\alpha\beta} = \delta'_{\alpha\beta}\,, \tag{75}$$

et in E:

$$u^{\rho} = \delta^{\rho}_{0}. \tag{76}$$

Si ha per definizione:

$$\alpha^{\rho}_{ABC} = \overset{\perp}{g}{}^{\rho}_{\sigma}(\alpha^{\sigma}_{AB})_{\,|\,C}\,. \tag{77}$$

Da (68), (71), (58) e (77) segue, tenuto conto delle ipotesi (75) e (76), e scegliendo t tempo-ortogonale:

$$\alpha^{\rho}_{ABC} = \overset{\perp}{g}{}^{\rho}_{\sigma}[x^{\sigma}_{ABC} + u^{\sigma}_{/A}(u_{\tau/C}x^{\tau}_{B} + u_{\tau}x^{\tau}_{BC}) + u^{\sigma}_{/B}(u_{\tau/C}x^{\tau}_{A} + u_{\tau}x^{\tau}_{AC}) + u^{\sigma}_{/C}u_{\tau}x^{\tau}_{AB}]. \tag{78}$$

Da (13), ricordando che si è scelto il parametro t tempo-ortogonale, segue con facili calcoli:

$$x^{\rho}_{||\,ABC} = \overset{\perp}{g}{}^{\rho}_{\sigma}(x^{\sigma}_{ABC} + u^{\sigma}_{/A}u_{\tau}x^{\tau}_{BC} + u^{\sigma}_{/B}u_{\tau}x^{\tau}_{AC} + u^{\sigma}_{/C}u_{\tau}x^{\tau}_{AB}). \tag{79}$$

Il confronto tra (78) e (79) porge:

$$\alpha^{\rho}_{ABC} = x^{\rho}_{||\,ABC} + \overset{\perp}{g}{}^{\rho}_{\sigma}(u^{\sigma}_{/A}u_{\tau/C}x^{\tau}_{B} + u^{\sigma}_{/B}u_{\tau/C}x^{\tau}_{A}). \tag{80}$$

La (80) dà la relazione cercata tra α^{ρ}_{ABC} e $x^{\rho}_{||\,ABC}$ e mostra come la loro differenza dipende dall'atto di moto.

Si osservi che se si sceglie il parametro temporale t in maniera tale che oltre ad essere tempo-ortogonale sia anche totalmente geodetico, cioè coincidente con $\tilde{t}$, in base alla (13) si ha:

$$x^{\rho}_{||\,A_1 \ldots A_n} = x^{\rho}_{/A_1 \ldots A_n} \tag{81}$$

per ogni n.

Inoltre, dovendo essere:

$$t(x^\rho) \equiv \tilde{t}(x^\rho) \equiv x^0 = 0, \tag{82}$$

segue che per ogni valore di n è:

$$x^0_{/A_1 \dots A_n} = 0. \tag{83}$$

La (83) ci dice dunque che $x^\rho_{/A_1 \dots A_n}$ è spaziale cioè che vale la relazione:

$$u^\rho x^\rho_{/A_1 \dots A_n} = 0. \tag{84}$$

La (78) diviene allora:

$$\alpha^\rho_{ABC} = \overset{\perp}{g}{}^\rho_\sigma (x^\sigma_{/ABC} + u^\sigma_{/A} u_{\tau/C} x^\tau_B + u^\tau_{/B} u_{\tau/C} x^\tau_A). \tag{85}$$

La (81) mostra come sia vantaggiosa l'introduzione di $x^\rho_{\| A_1 \dots A_n}$ poichè tale quantità è puramente posizionale e non dipende quindi dall'atto di moto come avviene invece per $\alpha^\rho_{A_1 \dots A_n}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] BRESSAN, A.: *Cinematica dei sistemi continui in relatività generale,* Ann. Mat. Pura Appl., *62* (1963) 99.

[2] BRESSAN, A.: *Termodinamica e magneto-visco-elasticità con deformazioni finite in relatività generale,* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova *34* (1964) 1.

[3] BRESSAN, A.: *Una teoria di relatività includente oltre all'elettromagnetismo e alla termodinamica, le equazioni costitutive dei materiali ereditari. Sistemazione assiomatica,* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova *34* (1964) 74.

[4] BRESSAN, A.: *Coppie di contatto in relatività,* Ann. Scuola Normale Sup. Pisa (1966) 93.

[5] BRESSAN, A.: *Elasticità relativistica con coppie di contatto,* Ricerche di Matematica *15* (1966) 169.

Manoscritto pervenuto in redazione il 6 novembre 1970.