

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIULIO CESARE BAROZZI

**Un problema al contorno non omogeneo in un
dominio angoloso per equazioni fortemente
quasi-ellittiche in due variabili (II)**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 44 (1970), p. 319-337

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1970__44__319_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UN PROBLEMA AL CONTORNO NON OMOGENEO IN UN DOMINIO ANGOLOSO PER EQUAZIONI FORTEMENTE QUASI-ELLITTICHE IN DUE VARIABILI (II)

GIULIO CESARE BAROZZI *)

Introduzione.

Questo lavoro è una continuazione della nota precedente [1], recante lo stesso titolo; in esso estendiamo alcune valutazioni (relative al teorema di esistenza della soluzione ed alla dipendenza di quest'ultima dai dati al contorno) a spazi di Sobolev di ordine superiore rispetto a quelli considerati in [1].

Le notazioni e i procedimenti utilizzati in [1] verranno costantemente impiegati; riportiamo tuttavia la posizione del problema ed introduciamo alcune notazioni ulteriori, rimandando per maggiori dettagli ai numeri 1 e 2 della nota citata.

Noi consideriamo operatori fortemente quasi-ellittici in due variabili del tipo

$$P(D) = \sum_{\alpha_1/m_1 + \alpha_2/m_2 = 2} a_\alpha D_{x_1}^{\alpha_1} D_{x_2}^{\alpha_2};$$

i coefficienti sono supposti costanti. Per ogni $\xi \in R - \{0\}$, indichiamo con $\mu_1, \dots, \mu_{m_2}$ le radici dell'equazione

$$\sum_{\alpha} a_{\alpha} (i\xi)^{\alpha_1} \mu^{\alpha_2} = 0$$

aventi parte reale negativa: abbiamo $\mu_k(\xi) = \omega_k \cdot (|\xi|^{m_1})^{1/m_2}$, con $\text{Re } \omega_k < 0$, $k = 1, 2, \dots, m_2$.

*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università, Bologna.

Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca del Comitato per la Matematica del C.N.R. per l'anno 1970.

Consideriamo il problema Dirichlet non omogeneo: determinare una soluzione u di $P(D)u=0$ per $x_1>0$, $x_2>0$, con le condizioni al contorno

$$(1) \quad D_{x_1}^h u(0, x_2)=0, \quad x_2>0, \quad h=0, 1, \dots, m_1-1;$$

$$(2) \quad D_{x_2}^j u(x_1, 0)=f_j(x_1), \quad x_1>0, \quad j=0, 1, \dots, m_2-1.$$

Sia $V(\xi)=W(\mu_1(\xi), \dots, \mu_{m_2}(\xi))$ il determinante di Vandermonde delle radici $\mu_1, \dots, \mu_{m_2}$, $V_{jk}(\xi)$ il completamento algebrico di μ_k^j in esso.

Si ha

$$V_{jk}(\xi)/V(\xi)=c_{jk} |\xi|^{-im_1/m_2},$$

con

$$(3) \quad \sum_{k=1}^{m_2} \omega_k^r c_{jk} = \delta_{jk}, \quad j, r=0, 1, \dots, m_2-1,$$

dove $\delta_{j,r}$ è il simbolo di Kronecker. La soluzione u è ricercata sotto la forma

$$(4) \quad u(x_1, x_2) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \sum_{j=0}^{m_2-1} \sum_{k=1}^{m_2} \int_0^{+\infty} [\exp(ix_1\xi) - \sum_{h=0}^{m_1-1} b_{hk}^+ \exp(i\delta_{hk}^+ x_1\xi)] \cdot \\ \cdot \exp(\mu_k(\xi)x_2) [V_{jk}(\xi)/V(\xi)] \psi_j(\xi) d\xi + \\ + (2\xi)^{-\frac{1}{2}} \sum_{j=0}^{m_2-1} \sum_{k=1}^{m_2} \int_{-\infty}^0 [\exp(ix_1\xi) - \sum_{h=0}^{m_1-1} b_{hk}^- \exp(i\delta_{hk}^- x_1\xi)] \cdot \\ \cdot \exp(\mu_k(\xi)x_2) [V_{jk}(\xi)/V(\xi)] \psi_j(\xi) d\xi,$$

dove

$$\psi_j(\xi) = (\mathcal{F}\psi_j)(\xi) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{+\infty} \exp(-ix_1\xi) \psi_j(x_1) dx_1,$$

e le ψ_j sono densità da determinare, nulle per $x_1<0$, di classe $L^2(R)$. Le costanti $\delta_{hk}^\pm$ sono scelte in modo che sia $\sum_{\alpha} a_{\alpha} (i\delta_{hk}^\pm)^{\alpha} \omega_k^{\alpha} = 0 \quad \forall h, k$, onde garantire che la funzione fornita dalla (4) sia soluzione dell'equazione considerata.

Per soddisfare le condizioni al contorno (2) si scelgono poi le $b_{hk}^{\pm}$ in modo che

$$(5) \quad \sum_{h=0}^{m_1-1} b_{hk}^{\pm} (\delta_{hk}^{\pm})^r = 1, \quad r=0, 1, \dots, m_1-1.$$

Per tradurre in condizioni sulle densità le condizioni al contorno (2), operiamo una scelta speciale delle ψ_j : supponiamo che sia $\psi_j = D^{m_1} \varphi_j$ con $\varphi_j = 0$ per $x_1 < 0$, ciascuna φ_j essendo di quadrato sommabile su R con le derivate fino all'ordine m_1 . La (4) diventa

$$(4_1) \quad u(x_1, x_2) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \sum_j \sum_k \int_0^{+\infty} (i\xi)^{m_1} [\exp(ix_1\xi) - \sum_h b_{hk}^+ \exp(i\delta_{hk}^+ x_1\xi)] \cdot \\ \cdot \exp(\mu_k(\xi)x_2) [V_{jk}(\xi)/V(\xi)] \varphi_j(\xi) + \\ + (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \sum_j \sum_k \int_{-\infty}^0 (i\xi)^{m_1} [\exp(ix_1\xi) - \sum_h b_{hk}^- \exp(i\delta_{hk}^- x_1\xi)] \cdot \\ \cdot \exp(\mu_k(\xi)x_2) [V_{jk}(\xi)/V(\xi)] \varphi_j(\xi) d\xi.$$

Se si pone $\vec{\varphi} = (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{m_2-1})$, $\vec{f} = (f_0, f_1, \dots, f_{m_2-1})$, abbiamo dimostrato in [1] che le condizioni (2) si traducono nel sistema

$$(6) \quad D^{m_1}(x_1) + \int_0^{+\infty} (K\vec{\varphi})(x_1, t) dt = \vec{f}(x_1), \quad x_1 > 0,$$

dove $K = [K_{rj}]$ è la matrice avente come termini i nuclei

$$K_{rj}(x_1, t) = \sum_{k=1}^{m_2} \omega_k^r c_{jk} \sum_{h=0}^{m_1-1} \left[\frac{C_{rj}^+ b_{hk}^+}{(\delta_{hk}^+ x_1 - t)^{m_1 + (m_1/m_2)(r-j) + 1}} + \right. \\ \left. + \frac{C_{rj}^- b_{hk}^-}{(\delta_{hk}^- x_1 - t)^{m_1 + (m_1/m_2)(r-j) + 1}} \right],$$

con $C_{rj}^{\pm}$ costanti opportune.

In [1], n. 2, abbiamo introdotto gli spazi $\dot{W}^m(R_+^2)$, $W^m(R_+^2)$, $W_\alpha^\lambda(R_+)$, $\bar{W}_\alpha^\lambda(R_+)$, $W_\alpha^\lambda(R)$, $V_\alpha^\lambda(R_+)$, $\lambda \geq 0$, $-1 < \alpha \leq 1$ ¹⁾.

Definiamo ancora uno spazio funzionale: se $\bar{R}_+ = [0, +\infty[$, sia $C_0^\infty(\bar{R}_+ \times \bar{R}_+)$ l'insieme delle restrizioni a $\bar{R}_+ \times \bar{R}_+$ delle funzioni di classe $C_0^\infty(R \times R)$; per tali funzioni introduciamo la norma

$$\begin{aligned} \|u; W^{lm}(R_+^2)\| = & \|u; L^2(R_+^2)\| + \left\| \sum_{lm_i \in N}^2 \|D_{x_i}^{lm_i} u; L^2(\bar{R}_+^2)\| \right\| + \\ & + \sum_{lm_i \notin N}^2 \left[\int_{\bar{R}_+} t^{-1-2(lm_i - [lm_i])} \|\Delta_i(t) D_{x_i}^{[lm_i]} u; L^2(R_+^2)\|^2 dt \right]^{1/2}, \end{aligned}$$

dove per ogni reale $l \geq 1$, $lm = (lm_1, lm_2)$, $[\lambda]$ è la parte intera di λ ,

$$\Delta_1(t)f(x_1, x_2) = f(x_1 + t, x_2) - f(x_1, x_2),$$

$$\Delta_2(t)f(x_1, x_2) = f(x_1, x_2 + t) - f(x_1, x_2).$$

Se $u \in W^{lm}(R_+^2)$, la traccia $D_{x_2}^{r_2} u(x_1, 0)$ appartiene allo spazio $W^{\lambda_j(l)}(R_+)$ con

$$\lambda_j(l) = \lambda_j(l, m) = lm_1 - (m_1/m_2)(j + 1/2) = \lambda_j(1) + m_1(l - 1).$$

Dunque, per ogni $l \geq 1$,

$$\lambda_j(l) - \lambda_r(l) = \lambda_j(1) - \lambda_r(1) = (m_1/m_2)(r - j) = \gamma_{rj}.$$

Nella nota [1], $\lambda_j(1)$ è indicato semplicemente λ_j .

Introduciamo infine gli spazi di Banach (dipendenti da l e m)

$$V_l(R_+) = \bigotimes_{j=0}^{m_2-1} V^{\lambda_j(l)}(R_+),$$

$$V'_l(R_+) = \bigotimes_{j=0}^{m_2-1} V^{\lambda_j(l) + m_1}(R_+),$$

normati nel modo naturale.

¹⁾ Per $\alpha = 0$ lo spazio $V_0^\lambda(R_+)$, o più semplicemente $V^\lambda(R_+)$, viene spesso indicato nelle letterature esistente col simbolo $\tilde{W}^\lambda(R_+)$ (v. P. Grisvard [2]).

1. Nella precedente nota [1] abbiamo dimostrato che l'applicazione

$$\vec{\varphi} \rightarrow D^{m_1} \vec{\varphi} + \int_{R_+} (K\vec{\varphi})(x, t) dt, \quad x \in R_+$$

(v. (6)) è continua è iniettiva da

$$\times_i V^{\lambda_j(1)+m_1}(R_+)$$

a

$$\times_i V^{\lambda_j(1)}(R_+)$$

(v. teoremi 1 e 2 della nota citata). La restrizione di tale applicazione a

$$V'_l(R_+) = \times_j V^{\lambda_j(l)+m_1}(R_+),$$

è pertanto ancora iniettiva.

In questo numero vogliamo dimostrare che, per ogni $\vec{f} \in V_l(R_+)$ soddisfacente certe condizioni supplementari che specificheremo tra breve, il sistema (6₁) ammette una e una sola soluzione $\varphi \in V'_l(R)$.

Riportiamo brevemente alcune considerazioni già svolte in [1], n. 4, rimandando alla nota ora citata per i dettagli delle dimostrazioni. Dato che siamo interessati al comportamento della soluzione u rappresentata dalla (4₁) soltanto in un intorno dell'origine, possiamo modificare i dati f_j per $x > x_0$ positivo ad arbitrio. È allora lecito supporre verificate le condizioni supplementari

$$(7) \quad x > a \Rightarrow f_j(x) = 0,$$

$$(8) \quad \int_{R_+} x^k f_j(x) dx = 0, \quad \begin{array}{l} \forall k = 0, 1, \dots, m-1, \\ \forall j = 0, 1, \dots, m-1, \end{array}$$

dove $a > 0$ è prefissato ad arbitrio.

Per ogni funzione $f \in V^{\lambda_j(l)}(R_+)$ verificante (7) e (8), posto

$$h(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{m_1-1}}{(m_1-1)!} f(t) dt,$$

si trova

$$(9) \quad \| h; V^{\lambda_j(l)+m_1}(R_+) \| \leq c(a) \| f; V^{\lambda_j(l)}(R_+) \|$$

dove $c(a)$ è una costante dipendente da a ma non da f .

Introduciamo ora una convenzione relativa ai simboli, che verrà sistematicamente utilizzata in questo numero. Se $f, \varphi, h, \dots$, sono funzioni definite su R_+ , porremo

$$\Phi(x) = \varphi(e^x), \quad F(x) = f(e^x), \quad H(x) = h(e^x), \quad \dots;$$

poichè l'isomorfismo tra R_+ e R stabilito dal logaritmo naturale muta la misura di Haar dx/x su R_+ nella misura dx su R , alla misura dx su R_+ corrisponde la misura $\exp(x)dx$ su R . Avremo dunque in generale

$$(10) \quad \| x^\alpha \varphi(x); L^2(R_+) \| = \| \exp[(\alpha + 1/2)x] \Phi(x); L^2(R) \|.$$

Se φ è una funzione m_1 volte derivabile si trova

$$(D^{m_1} \varphi)(e^x) = \exp(-m_1 x) [\Phi^{(m_1)}(x) + a_1 \Phi^{(m_1-1)}(x) + \dots + a_{m_1-1} \Phi'(x)],$$

dove i coefficienti a_j sono numeri interi. Indichiamo con P_{m_1} il polinomio

$$P_{m_1}(X) = (iX)^{m_1} + a_1(iX)^{m_1-1} + \dots + a_{m_1-1}(iX);$$

se si pone, come già nel numero 1, $D^{m_1} \varphi = \psi$, all'uguaglianza $\hat{\varphi}(\xi) = \hat{\psi}(\xi)/(i\xi)^{m_1}$ corrisponde l'altra

$$\hat{\Phi}(\xi - im_1) = \hat{\Psi}(\xi)/P_{m_1}(\xi - im_1)$$

o, più in generale,

$$\hat{\Phi}(\xi + i\eta) = \hat{\Psi}(\xi + i(\eta + m_1))/P_{m_1}(\xi + i\eta).$$

Utilizzando le notazioni ora introdotte e facendo uso della trasformazione di Laplace-Fourier, il sistema integrale (6) può essere riscritto

$$\begin{aligned} (6_1) \quad & P_{m_1}(\xi + i(\alpha/2 + \eta - m_1 + \lambda_r)) \hat{\Phi}_r(\xi + i(\alpha/2 + \eta - m_1 - \lambda_r)) + \\ & + \sum_j G_{rj}(\xi + i(\alpha/2 + \eta - \lambda_r)) \hat{\Phi}_j(\xi + i(\alpha/2 + \eta + m_1 - \lambda_j)) = \\ & = P_{m_1}(\xi + i(\alpha/2 + \eta - m_1 - \lambda_r)) \hat{H}_r(\xi + i(\alpha/2 + \eta - m_1 - \lambda_r)), \end{aligned}$$

o, in forma equivalente,

$$(6_2) \quad \begin{aligned} & \hat{\Psi}_r(\xi + i(\alpha/2 + \eta - \lambda_r)) + \\ & + \sum_j G_{rj}^*(\xi + i(\alpha/2 + \eta - \lambda_r)) \hat{\Psi}_j(\xi + i(\alpha/2 + \eta - \lambda_j)) = \\ & = \hat{F}_r(\xi + i(\alpha/2 + \eta - \lambda_r)), \quad r=0, 1, \dots, m_2-1, \end{aligned}$$

a seconda che si voglia assumere come funzioni incognite le densità φ_j oppure le loro derivate di ordine m_1 ψ_j . Nelle formule precedenti si è posto

$$\begin{aligned} G_{rj}(s) &= \int_R e^{-isx} K_{rj}(e^x, 1) dx, \quad s = \xi + i\eta, \\ G_{rj}^*(\xi + i\eta) &= G_{rj}(\xi + i\eta) / P_{m_1}(\xi + i(\eta - m_1 - \gamma_{rj})). \end{aligned}$$

G_{rj} è stata calcolata esplicitamente in [1]: si è osservato che G_{rj} presenta come sole singolarità dei poli semplici nei punti

$$\xi=0, \quad \eta = \begin{cases} 1 + m_1 + \gamma_{rj} + k, & k=0, 1, 2, \dots, \\ -m_1 - k, \end{cases}$$

e, per ogni fissato $\eta \in R$, si ha la stima

$$G_{rj}(\xi + i\eta) = O(\exp(-\alpha_0 |\xi|)),$$

dove $\alpha_0 < 0$ è un numero tale che $-\pi + \alpha_0 \leq \arg(-\delta_{hk}^\pm) \leq \pi - \alpha_0$.

Dunque, per tutti gli η reali tranne al più un'infinità numerabile, $G_{rj}((\cdot) + i\eta)$ è a decrescenza rapida. G_{rj}^* ha le stesse proprietà di G_{rj} salvo un numero finito di poli in più.

Occupiamoci dapprima del sistema (6₂); detta G^* la matrice

$$G^*(\xi + i\eta) = [G_{rj}^*(\xi + i(\eta - \lambda_r))], \quad r, j=0, 1, \dots, m_2-1,$$

si ha

$$\det[I + G^*(\xi + i\eta)] = 1 + O(\exp(-\alpha_0 |\xi|)), \quad \text{per } |\xi| \uparrow +\infty,$$

I essendo la matrice unità d'ordine m_2 . Il determinante in questione è dunque diverso da zero per $|\xi|$ abbastanza grande; esso presenta un'in-

finità numerabile di poli ed un'infinità numerabile di zeri al più. Per ogni fissato $\eta \in R$ si può affermare che, per tutti gli α appartenenti ad un insieme (dipendente da η) che è il complementare di un insieme numerabile rispetto a $] -1, 1[$,

$$\det [I + G^*(\xi + i(\alpha/2 + \eta))] \neq 0, \quad V\xi \in R, \\ G((\cdot) + i(\alpha/2 + \eta)) \in \mathcal{S}.$$

Osserviamo che, in ciò che segue, opereremo soltanto un numero finito di scelte differenti di η , e questo ci consente di affermare che i risultati parziali via via ottenuti sono tutti validi contemporaneamente per gli α appartenenti ad un medesimo insieme del tipo già specificato. Da (6₂) otteniamo la formula risolutiva

$$(11) \quad \hat{\Psi}_r(\xi + i(\alpha/2 + \eta - \lambda_r)) = \hat{F}_r(\xi + i(\alpha/2 + \eta - \lambda_r)) + \\ + \sum_j \hat{M}_{rj}(\xi + i(\alpha/2 + \eta)) \hat{F}_j(\xi + i(\alpha/2 + \eta - \lambda_j)),$$

avendo indicato con $\hat{M}_{rj}$ i termini della matrice

$$\hat{M}(\xi + i\eta) = [\hat{M}_{rj}(\xi + i\eta)] = \\ = -[I + G^*(\xi + i\eta)]^{-1} G^*(\xi + i\eta), \quad r, j = 0, 1, \dots, m_2 - 1.$$

Ciascuna funzione $\xi \rightarrow \hat{M}_{rj}(\xi + i(\alpha/2 + \eta))$ è a decrescenza rapida. Vogliamo dimostrare che per l'applicazione $\vec{f} \rightarrow \vec{\Psi}$ individuata da (9) si ha la maggiorazione

$$\|\vec{\Psi}; V_l(R_+)\| \leq c(a) \|\vec{f}; V_l(R_+)\|$$

limitatamente alle $\vec{f}$ per cui sono verificate le condizioni supplementari (7) e (8). Tenendo presente la (9) e la struttura del secondo membro della formula risolutiva (11), è chiaro che basta considerare l'applicazione $h \rightarrow \psi$ individuata dalla formula

$$(12) \quad \hat{\Psi}(\xi + i(\alpha/2 + \eta - \lambda_r)) = \hat{M}(\xi + i(\alpha/2 + \eta)) \hat{F}(\xi + i(\alpha/2 + \eta - \lambda_j)) = \\ = \hat{M}^*(\xi + i(\alpha/2 + \eta)) \hat{H}(\xi + i(\alpha/2 + \eta - m_1 - \lambda_j)),$$

$[\hat{M}^*(\xi + i(\alpha/2 + \eta)) = \hat{M}(\xi + i(\alpha/2 + \eta))P_{m_1}(\xi + i(\alpha/2 + \eta - m_1 - \lambda_r))$ ha le stesse proprietà di $\hat{M}$], e dimostrare relativamente a tale applicazione la maggiorazione

$$(13) \quad \|\psi; V^{\lambda(l)}(R_+)\| \leq c \|h; V^{\lambda_j(l) + m_1}(R_+)\|,$$

con c costante positiva opportuna. La dimostrazione della (13) è simile a quella fornita per $l=1$ nella nota [1]. Richiamiamo le tappe principali di tale dimostrazione. Anzitutto la (12), ove si ponga $\eta = \lambda_r$ e $\hat{M}_\alpha^*(\xi) = \hat{M}^*(\xi + i(\alpha/2 + \lambda_r))$, fornisce

$$(12_1) \quad \psi(x) = \int_{R_+} M_\alpha^*(\ln t)(x/t)^{-m_1 - \gamma_{rj}} h(x/t) \frac{dt}{t^{1+\alpha/2}}.$$

Se si pone $q(x) = x^{-m_1 - \gamma_{rj}} h(x)$, dalla disuguaglianza

$$\|x^{-\gamma} f(x); V^\lambda(R_+)\| \leq c \|f; V^{\lambda+\gamma}(R_+)\|, \quad \lambda \geq 0, \gamma > 0,$$

dimostrata in [1], formula (27), segue che

$$(14) \quad \|q; V^{\lambda_k(l)}(R_+)\| \leq c \|h; V^{\lambda_j(l) + m_1}(R_+)\|,$$

tenendo presente che $\lambda_r(l) + m_1 - m_1 - \gamma_{rj} = \lambda_r(l)$.

Dobbiamo dunque provare che l'applicazione $q \rightarrow \psi$ individuata da

$$(15) \quad \psi(x) = \int_{R_+} M_\alpha^*(\ln t) q(x/t) \frac{dt}{t^{1+\alpha/2}}$$

o, in forma equivalente,

$$\hat{\Psi}(\xi + i(\alpha/2 + \eta)) = \hat{M}^*(\xi + i(\alpha/2 + \eta + \lambda_r)) \hat{Q}(\xi + i(\alpha/2 + \eta)),$$

è continua da $V^{\lambda_k(l)}(R_+)$ in $s\hat{e}$. La dimostrazione si consegue innanzitutto in $V_\alpha^{\lambda_k(l)}(R_+)$ per tutti gli $\alpha \in]-1, 1[$ tranne al più un'infinità numerabile. La disuguaglianza

$$(16) \quad \|\psi; W_\alpha^{\lambda_k(l)}(R_+)\| \leq c \|q; W_x^{\lambda_k(l)}(R_+)\|$$

relativa alla (15) è stata dimostrata da B. Pini [3], n. 5. Dalla (15)

stessa segue, scegliendo $\alpha < 0$ e $q \in C_0^\infty(R_+)$, che ψ tende a zero per $x \downarrow 0$. Poichè una formula analoga alla (15) può scriversi per ogni derivata D^s , $s \leq \lambda_r(l) - 1/2$,

$$D^s \psi(x) = \int_{R_+} M_{\alpha, s}^*(\ln t) D^s q(x/t) \frac{dt}{t^{1+\alpha/2}},$$

lo stesso ragionamento può ripetersi su ognuna di tali derivate. Dunque ψ presenta nell'origine lo stesso comportamento di q . Infine la maggiorazione

$$\begin{aligned} & \| x^{\alpha/2 - (\lambda_r(l) - [\lambda_r(l)])} D^{[\lambda_r(l)]} \psi(x); L^2(R_+) \| \leq \\ & \leq c \| x^{\alpha/2 - (\lambda_r(l) - [\lambda_r(l)])} D^{[\lambda_r(l)]} q(x); L^2(R_+) \|, \end{aligned}$$

relativa all'ultimo termine che compare nella norma di $V^{\lambda_r(l)}$, segue dall'uguaglianza

$$\begin{aligned} & P_{[\lambda_r(l)]}(\xi + i((\alpha + 1)/2 - \lambda_r(l))) \hat{\Psi}(\xi + i((\alpha + 1)/2 - \lambda_r(l))) = \\ & = \hat{M}^*(\xi + i(\alpha + 1)/2) P_{[\lambda_r(l)]}(\xi + i((\alpha + 1)/2 - \lambda_r(l))) \hat{Q}(\xi + i((\alpha + 1)/2 - \lambda_r(l))) \end{aligned}$$

Dunque la (16) è dimostrata. Potendosi scrivere la (16) stessa per due valori α_1 e α_2 opposti, con un ragionamento di tipo interpolatorio dovuto a E. Stein [4] (v. [1], Appendice), si ottiene la (16) per $\alpha = 0$. Combinando la (16) con la (14) e la (9) si ottiene la maggiorazione richiesta

$$\| \vec{\psi}; V_l(R_+) \| \leq c(a) \| \vec{f}; V_l(R_+) \|^{\frac{1}{2}}$$

per ogni $\vec{f}$ verificante le condizioni supplementari (7) e (8).

Per completare il nostro risultato resta da provare che la $\vec{\psi}$ ottenuta è la derivata d'ordine m_1 di una $\vec{\varphi} \in V'_l$. Per far questo basta risolvere il sistema (6₁) che fornisce appunto $\vec{\varphi}$, e verificare che $\vec{\varphi} \in V'_l(R_+)$. Tenuto conto di quanto già sappiamo su $\vec{\psi} = D^{m_1} \vec{\varphi}$, basta studiare le derivate $D^s \vec{\varphi}$, $s = 0, 1, \dots, m_1 - 1$; questo è già stato fatto al termine del n. 4 di [1]. Possiamo riassumere i risultati ottenuti sotto forma di

TEOREMA 1. *Per ogni $\vec{f} \in V_l(R_+)$, le cui funzioni componenti verifichino le condizioni supplementari (7) e (8), esiste un vettore di densità*

$\vec{\Psi}$ con $\vec{\Psi} = D^{m_1} \vec{\varphi}$ e

$$\|\vec{\varphi}; V'_l(R_+)\| \leq c(a) \|\vec{f}; V_l(R_+)\|;$$

$\vec{\varphi}$ è soluzione del sistema (6₁).

2. In questo numero vogliamo dimostrare che la funzione rappresentata dal secondo membro delle formula (4₁) appartiene allo spazio $W^{lm}(R_+^2)$ se $\vec{\varphi} \in V'_l(R_+)$, cioè $\varphi_j \in V^{\lambda_j(l)+m_1}(R_+)$. Rammentiamo che

$$\lambda_j(l) + m_1 = \lambda_j(1) + lm_1 = lm_1 + m_1 - (m_1/m_2)(j + 1/2),$$

$$\forall j = 0, 1, \dots, m_2 = 1.$$

Tenendo presente la struttura della formula (4₁), cominciamo col valutare la norma in $W^{lm}(R_+^2)$ della funzione

$$\begin{aligned} 17) \quad v(x_1, x_2) &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_R (i\xi)^{m_1} \exp(ix_1\xi) \exp(\mu_k(\xi)x_2) [V_{jk}(\xi)/V(\xi)] \widehat{\varphi}_j(\xi) d\xi = \\ &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_R (i\xi)^{m_1} \exp(ix_1\xi) \exp(\mu_k(\xi)x_2) c_{jk} |\xi|^{-im_1/m_2} \widehat{\varphi}_j(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

per j e k fissati, essendo $x_1 > 0$, $x_2 > 0$. Per ogni α_1 intero non negativo si ha

$$\begin{aligned} D_{x_1}^{\alpha_1} v(x_1, x_2) &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_R \exp(ix_1\xi) i^{\alpha_1+m_1} \exp(\mu_k(\xi)x_2) c_{jk} \xi^{\alpha_1+m_1} |\xi|^{-im_1/m_2} \widehat{\varphi}_j(\xi) d\xi = \\ &= \mathfrak{F}_\xi^{-1} [i^{\alpha_1+m_1} c_{jk} \exp(\mu_k(\xi)x_2) \xi^{\alpha_1+m_1} |\xi|^{-im_1/m_2} \widehat{\varphi}_j(\xi)](x_1). \end{aligned}$$

Convenendo che $D_{x_1}^{\alpha_1} v$ indichi il prolungamento con lo zero per $x_2 < 0$ della derivata stessa, otteniamo, in virtù della relazione di Parseval,

$$\begin{aligned} \|D_{x_1}^{\alpha_1} v; L^2(R^2)\|^2 &\leq c \int_{R^2} |\mathfrak{F}_{x_2} \mathfrak{F}_{x_1} [D_{x_1}^{\alpha_1} v](\xi_1, \xi_2)|^2 d\xi_1 d\xi_2 = \\ &= c \int_R |\xi_1|^{2(\alpha_1+m_1-im_1/m_2)} |\widehat{\varphi}_j(\xi_1)|^2 \left(\int_{R^2} |\mathfrak{F}_{x_2} [\vartheta(x_2) \exp(\mu_k(\xi_1)x_2)](\xi_2)|^2 d\xi_2 \right) d\xi_1, \end{aligned}$$

dove abbiamo indicato con ξ_1 la variabile duale di x_1 (precedentemente indicata ξ), con ξ_2 la variabile duale di x_2 e con c una costante positiva opportuna, non necessariamente la stessa in ogni formula. La funzione ϑ è la caratteristica di R_+ (funzione di Heaviside). E

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}_{x_2}[\vartheta(x_2) \exp(\mu_k(\xi_1)x_2)](\xi_2) = \\ & = \frac{(2\pi)^{-\frac{1}{2}}}{i\xi_2 - \omega_k} |\xi_1|^{m_1/m_2}, \quad \mu_k(\xi_1) = \omega_k |\xi_1|^{m_1/m_2}, \end{aligned}$$

e quindi

$$\int_R |\mathcal{F}_{x_2}[\vartheta(x_2) \exp(\mu_k(\xi_1)x_2)](\xi_2)|^2 d\xi_2 = \left(\frac{-1}{2Re\omega_k} \right) |\xi_1|^{-m_1/m_2},$$

ed infine

$$\begin{aligned} \|D_{x_1}^{\alpha_1} v; L^2(R_+^2)\|^2 & \leq c \int_R |\xi_1|^{2(\alpha_1 + m_1) - 2(j+1/2)m_1/m_2} |\widehat{\varphi}_j(\xi_1)|^2 d\xi_1 \leq \\ & c \int_R (1 + \xi_1^2)^{\alpha_1 + m_1 - (j+1/2)m_1/m_2} |\widehat{\varphi}_j(\xi_1)|^2 d\xi_1. \end{aligned}$$

Se dunque $0 \leq \alpha_1 \leq lm_1$, si trova

$$\|D_{x_1}^{\alpha_1} v; L^2(R_+^2)\| \leq c \|\varphi_j; V^{\lambda_j(l) + m_1}(R_+)\|.$$

Le derivate $D_{x_2}^{\alpha_2} v$ si trattano esattamente allo stesso modo: in particolare se lm_2 è intero si trova

$$\|D_{x_2}^{\alpha_2} v; L^2(R_+^2)\| \leq c \|\varphi_j; V^{\lambda_j(l) + m_1}(R_+)\|.$$

Sempre tenendo presente la formula (4₁), prendiamo ora in considerazione funzioni del tipo

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \exp(i\delta_{hk}^+ x_1 \xi) \exp(\mu_k(\xi)x_2) \xi^{m_1} |\xi|^{-jm_1/m_2} \widehat{\varphi}_j(\xi) d\xi, \\ & \int_{-\infty}^0 \exp(i\delta_{hk}^- x_1 \xi) \exp(\mu_k(\xi)x_2) \xi^{m_1} |\xi|^{-jm_1/m_2} \widehat{\varphi}_j(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

per h, k, j fissati. Studiamo, ad esempio, la funzione

$$(18) \quad w(x_1, x_2) = \int_0^{+\infty} \exp(i\delta_{hk}^+ x_1 \xi) \exp(\mu_k(\xi)x_2) \xi^{m_1 - im_1/m_2} \widehat{\varphi}_j(\xi) d\xi.$$

Se $\delta_{hk}^+ = -1$, tale funzione, a meno di una costante, coincide con

$$\mathcal{F}_{\xi}^{-1}[\partial(\xi) \exp(\mu_k(\xi)x_2) \xi^{m_1 - im_1/m_2} \varphi_j(\xi)](-x_1);$$

formule analoghe valgono per le derivate. Si può dunque ripetere inalterato il procedimento già visto. Supponiamo dunque $\text{Im } \delta_{hk}^+ > 0$. Abbiamo

$$D_{x_1}^{a_1} w(x_1, x_2) = (i\delta_{hk}^+)^{a_1} \int_0^{+\infty} \exp(i\delta_{hk}^+ x_1 \xi) \exp(\mu_k(\xi)x_2) \xi^{a_1 + m_1 - im_1/m_2} \widehat{\varphi}_j(\xi) d\xi;$$

Indichiamo ancora con $D_{x_1}^{a_1} w$ il prolugamento con lo zero della funzione scritta per $(x_1, x_2) \in R^2 - R_+^2$; abbiamo

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}_{x_1 x_2}[D_{x_1}^{a_1} w](\xi_1, \xi_2) = [D_{x_1}^{a_1} w]^\wedge(\xi_1, \xi_2) = \\ & = \text{cost.} \int_{R_+} \exp(-i(x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2)) \left(\int_{R_+^2} \exp(i\delta_{hk}^+ x_1 s + \mu_k(s)x_2) s^{a_1 + m_1 - im_1/m_2} \widehat{\varphi}_j(s) ds \right) dx_1 dx_2 = \\ & = \text{cost.} \int_{R_+} s^{a_1 + m_1 - im_1/m_2} \widehat{\varphi}_j(s) \left(\int_{R_+} \exp(ix_1(\delta_{hk}^+ s - \xi_1)) dx_1 \right) \left(\int_{R_+} \exp(x_2(\mu_k(s) - i\xi_2)) dx_2 \right) ds = \\ & = \text{cost.} \int_{R_+} \frac{s^{a_1 + m_1 - im_1/m_2} \widehat{\varphi}_j(s)}{(\delta_{hk}^+ s - \xi_1)(i\xi_2 - \mu_k(s))} ds. \end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio si è conglobata nella costante un'unità immaginaria. Abbiamo quindi

$$\| D_{x_1}^{a_1} w; L^2(R_+^2) \|^2 \leq c \int_{R^2} \left| \int_{R_+} \frac{s^{a_1 + m_1 - im_1/m_2} \widehat{\varphi}_j(s)}{(\delta_{hk}^+ s - \xi_1)(i\xi_2 - \mu_k(s))} ds \right|^2 d\xi_1 d\xi_2.$$

Poniamo momentaneamente

$$f(s) = s^{a_1 + m_1 - im_1/m_2} \widehat{\varphi}_j(s) / (i\xi_2 - \mu_k(s)).$$

Facendo uso della disuguaglianza di Hilbert abbiamo

$$\int_R \left| \int_{R_+} \frac{f(s)}{\delta_{ik}^+ s - \xi_1} ds \right|^2 d\xi_1 \leq c \|f; L^2(R_+)\|^2.$$

Dunque

$$\begin{aligned} \|D_{x_1}^{\alpha_1} w; L^2(R_+^2)\|^2 &\leq c \int_R \left(\int_{R_+} \frac{s^{2(\alpha_1+m_1)-2jm_1/m_2} |\widehat{\varphi}_j(s)|^2}{|\widehat{\varphi}_j(s)|^2} ds \right) d\xi_2 = \\ &= c \int_R s^{2(\alpha_1+m_1)-2jm_1/m_2} |\widehat{\varphi}_j(s)|^2 \left(\int_{R_+} \frac{d\xi_2}{|i\xi_2 - \mu_k(s)|^2} \right) ds = \\ &= c' \int_{R_+} s^{2(\alpha_1+m_1)-2(j+1/2)m_1/m_2} |\widehat{\varphi}_j(s)|^2 ds. \end{aligned}$$

Si è dunque ottenuta la stessa stima vista in precedenza per $D_{x_1}^{\alpha_1} v$. Le derivate $D_{x_2}^{\alpha_2} w$ si trattano allo stesso modo.

A questo punto possiamo intanto concludere che, nel caso particolare in cui lm_1 e lm_2 sono entrambi interi, si ha

$$\|u; W^{lm}(R_+^2)\| \leq c \|\bar{\varphi}; V_l'(R_+)\|.$$

Per completare il risultato restano da esaminare le norme corrispondenti al caso in cui lm_1 e lm_2 non sono interi. Riprendiamo in considerazione la funzione v definita dalla (17) e poniamo $\alpha_1 = [lm_1]$ (parte intera di lm_1), $lm_1 = \alpha_1 + \beta_1$, con $0 < \beta_1 < 1$. La funzione $D_{x_1}^{\alpha_1} v$ è definita per $x_2 > 0$; se conveniamo, come già in precedenza, che il simbolo $D_{x_1}^{\alpha_1} v$ indichi anche la funzione stessa prolungata con lo zero per $x_2 < 0$, abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{R_+} t^{-1-2\beta_1} \|\Delta_1(t) D_{x_1}^{\alpha_1} v; L^2(R_+^2)\|^2 dt &\leq \int_{R_+} t^{-1-2\beta_1} \|\Delta_1(t) D_{x_1}^{\alpha_1} v; L^2(R^2)\|^2 dt = \\ &= \int_{R_+} t^{-1-2\beta_1} \left(\int_{R^2} |e^{-it\xi_1} - 1|^2 | [D_{x_1}^{\alpha_1} v]^\wedge(\xi_1, \xi_2)|^2 d\xi_1 d\xi_2 \right) dt = \\ &= c \int_{R^2} |\xi_1|^{2\beta_1} | [D_{x_1}^{\alpha_1} v]^\wedge(\xi_1, \xi_2)|^2 d\xi_1 d\xi_2. \end{aligned}$$

Ma la trasformata di Fourier di $D_{x_1}^{\alpha_1} v$ è già stata calcolata:

$$[D_{x_1}^{\alpha_1} v]^{\wedge}(\xi_1, \xi_2) = (2\pi)^{-1/2} i^{\alpha_1 + m_1} c_{jk} \frac{\xi_1^{\alpha_1 + m_1} |\xi_1|^{-j m_1 / m_2} \widehat{\varphi}_j(\xi_1)}{i \xi_2 - \omega_k |\xi_1|^{m_1 / m_2}},$$

quindi l'ultimo integrale si maggiora con

$$\begin{aligned} & c \int_R |\xi_1|^{2(\alpha_1 + \beta_1 + m_1 - j m_1 / m_2)} |\widehat{\varphi}_1(\xi_1)|^2 \left(\int_R \frac{d\xi_2}{|i \xi_2 - \omega_k |\xi_1|^{m_1 / m_2}|^2} \right)^2 d\xi_1 = \\ & = c' \int_R |\xi_1|^{2(\alpha_1 + \beta_1 + m_1 - (j + 1/2) m_1 / m_2)} |\widehat{\varphi}_j(\xi_1)|^2 d\xi_1 \leq c' \|\varphi_j; V^{\lambda_j(l) + m_1}(R_+)\|, \end{aligned}$$

dove si è tenuto conto del fatto che

$$\alpha_1 + \beta_1 = l m_1 \Rightarrow \alpha_1 + \beta_1 + m_1 - (j + 1/2) m_1 / m_2 = \lambda_j(l) + m_1.$$

Poniamo ora

$$\alpha_2 = [l m_2], \quad l m_2 = \alpha_2 + \beta_2, \quad 0 < \beta_2 < 1.$$

Consideriamo la derivata $D_{x_2}^{\alpha_2} v$ ed il suo prolungamento con lo zero per $x_2 < 0$, che indichiamo con lo stesso simbolo.

È

$$[D_{x_2}^{\alpha_2} v]^{\wedge}(\xi_1, \xi_2) = (2\pi)^{-1/2} i^{m_1} c_{jk} \omega_k^{\alpha_2} \frac{\xi_1^{m_1} |\xi_1|^{(\alpha_2 - j) m_1 / m_2} \widehat{\varphi}_j(\xi_1)}{i \xi_2 - \omega_k |\xi_1|^{m_1 / m_2}}.$$

Consideriamo la funzione

$$v_{\alpha_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} D_{x_2}^{\alpha_2} v(x_1, x_2), & \text{per } x_2 > 0, \\ D_{x_2}^{\alpha_2} v(x_1, -x_2), & \text{per } x_2 < 0; \end{cases}$$

si avrà

$$\begin{aligned} \widehat{v_{\alpha_2}}(\xi_1, \xi_2) &= [D_{x_2}^{\alpha_2} v]^{\wedge}(\xi_1, \xi_2) + [D_{x_2}^{\alpha_2} v]^{\wedge}(\xi_1, -\xi_2) = \\ &= (2\pi)^{-1/2} i^{m_1} c_{jk} \omega_k^{\alpha_2} \xi_1^{m_1} |\xi_1|^{(\alpha_2 - j) m_1 / m_2} \widehat{\varphi}_j(\xi_1) \left[\frac{1}{i \xi_2 - \omega_k |\xi_1|^{m_1 / m_2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{-i \xi_2 - \omega_k |\xi_1|^{m_1 / m_2}} \right] = \end{aligned}$$

$$= -2(2\pi)^{-\frac{1}{2}} i^{m_1} c_{jk} \omega_k^{\alpha_2+1} \frac{\xi_1^{m_1} |\xi_1|^{(\alpha_2-j)m_1/m_2} \widehat{\varphi}_j(\xi_1)}{\omega_k^2 |\xi_1|^{2m_1/m_2} + \xi_2^2}.$$

Abbiamo allora

$$\begin{aligned} & \int_{R_+} t^{-1-2\beta_2} \|\Delta_2(t) D_{x_2}^{\alpha_2} v; L^2(R_+^2)\|^2 dt = \int_{R_+} t^{-1-\beta_2} \|\Delta_2(t) v_{\alpha_2}; L^2(R^2)\|^2 dt = \\ & = \int_{R_+} t^{-1-2\beta_2} \left(\int_{R^2} |e^{-it\xi_2} - 1|^2 |\widehat{v}_{\alpha_2}(\xi_1, \xi_2)|^2 d\xi_1 d\xi_2 \right) dt = \\ & = c \int_{R^2} |\xi_2|^{2\beta_2} |\widehat{v}_{\alpha_2}(\xi_1, \xi_2)|^2 d\xi_1 d\xi_2 = \\ & = c' \int_{R^2} |\xi_1|^{2(m_1 + (\alpha_2+1-j)m_1/m_2)} |\widehat{\varphi}_j(\xi_1)|^2 \left(\int_{R^2} \frac{|\xi_2|^{2\beta_2}}{|\omega_k^2 |\xi_1|^{2m_1/m_2} + \xi_2^2} d\xi_2 \right) d\xi_1. \end{aligned}$$

Valutiamo l'integrale in $d\xi_2$. Posto $\omega_k = \omega'_k + i\omega''_k$ ($\omega'_k < 0$), il denominatore dell'integrando si scrive

$$\begin{aligned} |\omega_k^2 |\xi_1|^{2m_1/m_2} + \xi_2^2|^2 &= 4(\omega'_k \omega''_k)^2 |\xi_1|^{4m_1/m_2} + [\xi_2^2 + (\omega_k'^2 - \omega_k''^2) |\xi_1|^{2m_1/m_2}]^2 = \\ &= a |\xi_1|^{4m_1/m_2} + [\xi_2^2 + b |\xi_1|^{2m_1/m_2}]^2, \end{aligned}$$

attualmente $a^2 + b^2 > 0$. L'integrale in questione si scrive successivamente

$$\begin{aligned} (19) \quad & 2 \int_{R_+} \frac{\xi_2^{2\beta_2}}{a |\xi_1|^{4m_1/m_2} + (\xi_2^2 + b |\xi_1|^{2m_1/m_2})^2} d\xi_2 = \\ & = 2 |\xi_1|^{2\beta_2+1-4m_1/m_2} \int_{R_+} \frac{t^{2\beta_2}}{a + (|\xi_1|^{2(1-m_1/m_2)} t^2 + b)^2} dt = \\ & = 2 |\xi_1|^{(2\beta_2-3)m_1/m_2} \int_{R_+} \frac{\tau^{2\beta_2}}{a + (\tau^2 + b)^2} d\tau = c |\xi_1|^{(2\beta_2-3)m_1/m_2}. \end{aligned}$$

In definitiva

$$\int_{R_+} t^{-1-2\beta_2} \|\Delta_2(t) D_{x_2}^{\alpha_2} v; L^2(R_+^2)\|^2 dt \leq$$

$$\leq c \int_{\mathbb{R}} |\xi_1|^{2(m_1 + (\alpha_2 + \beta_2)m_1/m_2 - (j+1/2)m_1/m_2)} |\widehat{\varphi}_j(\xi_1)|^2 d\xi_1 \leq \\ \leq c \|\varphi_j; V^{\lambda_j(l) + m_1}(R_+)\|,$$

dove si è tenuto conto del fatto che

$$m_1 + (\alpha_2 + \beta_2)m_1/m_2 - (j+1/2)m_1/m_2 = \\ = m_1 + lm_1m_2/m_2 - (j+1/2)m_1/m_2 = \lambda_j(l) + m_1.$$

Passiamo ora alle norme delle derivate frazionarie della funzione w definita dalla (18). Se $\delta_{hk}^+ = -1$, si applica inalterato il procedimento visto poco sopra per la funzione v : supponiamo dunque $\text{Im } \delta_{hk}^+ > 0$. Poniamo ancora $\alpha_1 = [lm_1]$, $lm_1 = \alpha_1 + \beta_1$, $0 < \beta_1 < 1$. Consideriamo $D_{x_1}^{\alpha_1} w$ ed indichiamo con lo stesso simbolo il prolungamento con lo zero di tale derivata per $(x_1, x_2) \in R^2 - R_+^2$. È

$$[D_{x_1}^{\alpha_1} w]^\wedge(\xi_1, \xi_2) = \text{cost.} \int_{R_+} \frac{s^{\alpha_1 + m_1 - m_1/m_2} \widehat{\varphi}_j(s)}{(\delta_{hk}^+ s - \xi_1)(i\xi_2 - \mu_k(s))} ds.$$

Introduciamo la funzione

$$w_{\alpha_1}(x_1, x_2) = \begin{cases} D_{x_1}^{\alpha_1} w(x_1, x_2), & \text{per } x_1 > 0, x_2 > 0, \\ D_{x_1}^{\alpha_1} w(-x_1, x_2), & \text{per } x_1 < 0, x_2 > 0, \\ 0 & , \text{ per } x_2 < 0. \end{cases}$$

Si avrà:

$$\widehat{w}_{\alpha_1}(\xi_1, \xi_2) = [D_{x_1}^{\alpha_1} w]^\wedge(\xi_1, \xi_2) + [D_{x_1}^{\alpha_1} w]^\wedge(-\xi_1, \xi_2) = \\ = \text{cost.} \int_{R_+} \frac{s^{\alpha_1 + m_1 - im_1/m_2} \widehat{\varphi}_j(s)}{(i\xi_2 - \mu_k(s))} \left[\frac{1}{\delta_{hk}^+ s - \xi_1} + \frac{1}{\delta_{hk}^+ s + \xi_1} \right] ds = \\ = \text{cost.} \int_{R_+} \frac{s^{\alpha_1 + m_1 + 1 - im_1/m_2} \widehat{\varphi}_j(s)}{(i\xi_2 - \mu_k(s))[(\delta_{hk}^+)^2 s^2 - \xi_1^2]} ds.$$

Abbiamo allora, ripetendo un calcolo già visto sopra,

$$\int_0^{+\infty} t^{-1-2\beta_1} \|\Delta_1(t) D_{x_1}^{\alpha_1} w; L^2(R_+^2)\|^2 dt \leq \int_0^{+\infty} t^{-1-2\beta_1} \|\Delta_1(t) w_{\alpha_1}; L^2(R^2)\|^2 dt =$$

$$\begin{aligned}
&= c \int_{R^2} | \xi_1 |^{2\beta_1} \left| \int_{R_+} \frac{s^{\alpha_1+m_1+1-jm_1/m_2} \widehat{\varphi}_j(s)}{(i\xi_2 - \mu_k(s))(\delta_{hk}^+)^2 s^2 - \xi_1^2} ds \right|^2 d\xi_1 d\xi_2 = \\
&= 2c \int_R \left\{ \int_{R_+} \xi_1^{2\beta_1} \left| \int_{R_+} \frac{f(s, \xi_2)}{(\delta_{hk}^+)^2 s^2 - \xi_1^2} ds \right|^2 d\xi_1 \right\} d\xi_2
\end{aligned}$$

dove si è posto

$$f(s, \xi_2) = s^{\alpha_1+m_1+1-jm_1/m_2} \widehat{\varphi}_j(s) / (i\xi_2 - \mu_k(s)).$$

Scrivendo momentaneamente $f(s)$ in luogo di $f(s, \xi_2)$, valutiamo l'integrale in $d\xi_1$ facendo uso della disuguaglianza integrale di Minkowski:

$$\begin{aligned}
&\int_{R_+} \left| \int_{R_+} \frac{f(s) \xi_1^{\beta_1}}{(\delta_{hk}^+)^2 s^2 - \xi_1^2} ds \right|^2 d\xi_1 = \\
&\leq \left[\int_{R_+} \frac{1}{|(\delta_{hk}^+)^2 t^2 - 1|} \left(\int_{R_+} |f(t\xi_1)|^2 \xi_1^{2(\beta_1-1)} d\xi_1 \right)^{1/2} dt \right]^2 = \\
&= \left[\int_{R_+} \frac{1}{t^{\beta_1-1/2} |(\delta_{hk}^+)^2 t^2 - 1|} \left(\int_{R_+} |f(s)|^2 s^{2(\beta_1-1)} ds \right)^{1/2} dt \right]^2 = \\
&= c \| s^{\beta_1-1} f(s); L^2(R_+) \|^2.
\end{aligned}$$

Sostituendo si ottiene

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} t^{-1-2\beta_1} \| \Delta_1(t) D_{x_1}^{\alpha_1} w; L^2(R_+^2) \|^2 dt \leq c \int_R \left(\int_{R_+} \frac{s^{2(\alpha_1+\beta_1+m_1-jm_1/m_2)} |\varphi_j(s)|^2}{|i\xi_2 - \mu_k(s)|^2} ds \right) d\xi_2 = \\
&= c' \int_{R_+} s^{2(\alpha_1+\beta_1+m_1-(j+1/2)m_1/m_2)} |\widehat{\varphi}_j(s)|^2 ds \leq c' \| \varphi_j; V^{\lambda_j(l)+m_1}(R_+) \|.
\end{aligned}$$

La stima relativa all'integrale

$$\int_0^{+\infty} t^{-1-2\beta_2} \| \Delta_2(t) D_{x_2}^{\alpha_2} w; L^2(R_+^2) \|^2 dt$$

si esegue in modo perfettamente analogo: basta considerare il prolun-

gamento

$$w_{\alpha_2} = \begin{cases} D_{x_2}^{\alpha_2} w(x_1, x_2), & \text{per } x_1 > 0, x_2 > 0, \\ D_{x_1}^{\alpha_2} w(x_1, -x_2), & \text{per } x_1 > 0, x_2 < 0, \\ 0 & , \text{ per } x_1 < 0. \end{cases}$$

Si possono dunque omettere i dettagli relativi.

Possiamo riassumere i risultati di questo numero sotto forma di

TEOREMA 2. *Per ogni $\varphi \in V'_1(R_+)$, la formula (4₁) fornisce una funzione u per cui*

$$\|u; W^{lm}(R_+^2)\| \leq c \|\varphi; V'_1(R)\|.$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] BAROZZI, G. C.: *Un problema al contorno non omogeneo in un dominio angoloso per equazioni fortemente quasi-ellittiche in due variabili* (I), in corso di stampa su Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova.
- [2] GRISVARD, G.: *Equations différentielles abstraites*, Ann. Scient. École Norm. Sup., t. 2 (1969), 311-395.
- [3] PINI, B.: *Sulla rappresentazione delle soluzioni delle equazioni quasi-ellittiche in una regione angolosa*, Annali di Mat. Pura Appl. (IV), Vol. LXXX, 359-372.
- [4] STEIN, E.: *Interpolation of linear operators*, Transactions A.M.S., Vol. 83 (1956), 482-492.

Manoscritto pervenuto in redazione il 15 giugno 1970.