

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARGHERITA BARTOLOZZI

Sulla decomposizione dei tensori

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 43 (1970), p. 99-124

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1970__43__99_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1970__43__99_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SULLA DECOMPOSIZIONE DEI TENSORI

MARGHERITA BARTOLOZZI *)

§ 1. Introduzione.

Considero in uno spazio euclideo S_n ad n dimensioni la nota decomposizione

$$(1) \quad T_{ik} = T'_{ik} + \frac{1}{n} T_i^i \delta_{ik}$$

del generico tensore doppio T_{ik} in una parte isotropa e una parte T'_{ik} ad invariante lineare nullo, ($T_i^i = 0$).

Mi propongo, in questa nota, di generalizzare tale decomposizione al caso di tensori di rango $\omega > 2$, considerando oltre alla parte isotropa, una parte emisotropa (e quindi una parte emitropica), cfr. § 2.

Dapprima tratto la questione in generale riferendomi ad ω ed n qualsiasi [§§ 2 e 3]. Poi rendo esplicita la suddetta decomposizione (generalizzata) nei casi $\omega < 6$ per n qualunque [§ 9] e $\omega = 6$ per $n = 2$ [§ 10] in relazione alle parti isotrope, e, nei casi $\omega \leq 6$ per $n \leq 6$ in relazione alle parti emisotrope (o a quelle emitropiche [§§ 11, 12, 13]. Per effettuare più agevolmente tale esplicitazione, dimostro preliminarmente una certa relazione di carattere generale tra tensori emisotropi di rango $\omega = 2m > n$ ($n = 1, 2, \dots$) [§ 8].

*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca del C.N.R. per gli anni accademici 1965-66 e 1966-67.

Sono grata al dott. A. J. M. Spencer per l'indicazione del lavoro [4] di Smith e Rivlin e i consigli sul modo di applicarlo.

Indirizzo dell'A.: Margherita Bartolozzi, Palermo, Via Libertà, 197.

Inoltre, basandomi su un teorema di Smith e Rivlin, cfr. [4], dimostro pure che il generico tensore emisotropo (o emitropico) ha una certa forma, e per amor di completezza e uniformità, accenno l'analogo per tensori isotropi ¹⁾).

Le relazioni trovate nello spazio euclideo S_n sono tutte puntuali e in termini finiti, cosicchè, esse valgono ovviamente anche in una generica varietà riemanniana, potendosi pensare S_n come spazio tangente a tale varietà.

Per amor di brevità non si sono esposti vari sviluppi di calcolo e qualche dimostrazione ²⁾).

§ 2. Una trasformazione lineare L riguardante tensori isotropi o emisotropi o emitropici.

Un tensore $T_{i_1 \dots i_\omega}$ nello spazio euclideo S_n si dice isotropo se le sue componenti restano invariate nel passaggio da un riferimento cartesiano ortogonale ad un altro congruente o no al precedente; $T_{i_1 \dots i_\omega}$ si dice *emitropico* se le sue componenti cartesiane ortogonali non mutano nel passaggio da un riferimento ad un altro congruente al primo. Ne segue che ogni tensore isotropo è emitropico, ma il viceversa non sussiste. Vi sono tensori emitropici e non isotropi. Le loro componenti cambiano solo di segno per trasformazioni ortogonali improprie. Essi si dicono *emisotropi*.

I tensori di rango ω in S_n costituiscono uno spazio lineare S_n^ω (ad n^ω dimensioni).

I tensori emitropici, isotropi ed emisotropi in S_n costituiscono tre sottospazi $S_{n,\omega}$, $S'_{n,\omega}$, $S''_{n,\omega}$. Le loro dimensioni $N_n(\omega)$, $N'_n(\omega)$, $N''_n(\omega)$ sono state calcolate da G. Racah. Egli dà una espressione di tipo integrale per $N'_n(\omega)$ e scrive le seguenti relazioni riguardanti le dimensioni $N_n(\omega)$, $N'_n(\omega)$, $N''_n(\omega)$ degli spazi dei tensori emitropici, isotropi ed emisotropi.

$$(2) \quad N'_n(\omega) + N''_n(\omega) = N_n(\omega) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{\omega+1}{2}\right]} \left[\binom{\omega}{2k} - \frac{1}{2} \binom{\omega}{2k-1} \right] \binom{2k}{k}$$

¹⁾ Tale analogo, come è noto, è stato dimostrato con procedimento completamente differente da M. Pastori in [1] e [2].

²⁾ Ciò che si è omissso è però reperibile presso l'autore.

dove $\left[\frac{\omega+1}{2} \right]$ è il massimo intero contenuto in $\frac{\omega+1}{2}$.

Per il numero $N'_n(\omega)$ dei tensori isotropi e per quello $N''_n(\omega)$ dei tensori emisotropi in S_n , il Racah trova i valori espressi rispettivamente nelle seguenti tabelle:

n/ω	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
2	1	0	1	0	3	0	10	0	35	0	126
3	1	0	1	0	3	0	15	0	91	0	603
4	1	0	1	0	3	0	15	0	105	0	903
5	1	0	1	0	3	0	15	0	105	0	945
6	1	0	1	0	3	0	15	0	105	0	945

n/ω	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
2	0	0	1	0	3	0	10	0	35	0	126
3	0	0	0	1	0	6	0	36	0	232	0
4	0	0	0	0	1	0	10	0	91	0	861
5	0	0	0	0	0	1	0	15	0	190	0
6	0	0	0	0	0	0	1	0	21	0	351

Sia $\bar{S}_{n,\omega}$ o lo spazio tensoriale $S'_{n,\omega}$ o $S''_{n,\omega}$, nei quali casi indico con μ $N'_n(\omega)$ o $N''_n(\omega)$ rispettivamente.

Comincio col considerare una trasformazione L che verifichi le seguenti condizioni:

a) L è una trasformazione lineare di S_n^ω in $\bar{S}_{n,\omega}$, cosicchè L muta i tensori di rango ω in S_n in tensori isotropi oppure in tensori emisotropi dello stesso tipo.

b) L lascia invariato $\bar{S}_{n,\omega}$.

Ovviamente esistono infinite trasformazioni soddisfacenti le condizioni *a*) e *b*).

Fissiamo comunque in $\bar{S}_{n,\omega}$ la base

$$(3) \quad \mathbf{b}_{(1)}, \mathbf{b}_{(2)}, \dots, \mathbf{b}_{(\mu)}.$$

Siano

$$(4) \quad \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_\nu \quad \text{con } \nu = n^\omega - \mu$$

ν vettori tali che il sistema $\mathbf{b}_{(1)}, \dots, \mathbf{b}_{(\mu)}, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_\nu$ sia una base in S_{n^ω} .

Per le condizioni *a*) e *b*) si ha:

$$(5) \quad LL\mathbf{v} = L\mathbf{v}$$

per ogni $\mathbf{v}$ in S_{n^ω} .

Poniamo:

$$(6) \quad \mathbf{u}_k = \mathbf{w}_k - L\mathbf{w}_k \text{ onde per la (5) } L\mathbf{u}_k = 0. \quad (k=1, 2, \dots, \nu).$$

Ogni vettore di S_{n^ω} può porsi, e in un sol modo, nella forma:

$$(7) \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}^* + \sum_{k=1}^{\nu} \eta^k \mathbf{u}_k \quad \text{con } \mathbf{v}^* = \sum_{h=1}^{\mu} \xi^h \mathbf{b}_{(h)}.$$

La (6)₂ e (7) implicano

$$(8) \quad \mathbf{v}^* = L\mathbf{v}.$$

Viceversa, ogni trasformazione L definita dalle (7) e (8) soddisfa alle considerate condizioni *a*) e *b*). È chiaro che L dipende dai vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_\nu$, tali che $\mathbf{b}_{(1)}, \dots, \mathbf{b}_{(\mu)}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_\nu$ costituiscano una base in S_{n^ω} , tramite il ν -spazio da essi determinato.

§ 3. Una particolarizzazione della trasformazione lineare L .

È spontaneo assumere il ν -spazio $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_\nu$ ortogonale a $\mathbf{b}_{(1)}, \dots, \mathbf{b}_{(\mu)}$ secondo un'opportuna determinazione della metrica, ossia del prodotto

scalare, in S_n^ω . Ne segue, per (7), che ogni vettore di S_n^ω può decomporci, e in un sol modo, in un vettore parallelo alla varietà generata dalle $\mathbf{b}_{(h)}$ ed in uno ortogonale ad essa.

È spontanea la seguente definizione di prodotto scalare in $\bar{S}_{n,\omega}$:

$$(9) \quad \mathbf{v} \times \mathbf{v} = v^{l_1} \dots v^{l_\omega} v_{l_1} \dots v_{l_\omega}$$

ove $v^{l_1} \dots v^{l_\omega}$, $v_{l_1} \dots v_{l_\omega}$ sono le componenti controvarianti e covarianti di $\mathbf{v}$ calcolate, per esempio, in coordinate cartesiane.

Si ponga:

$$(10) \quad \gamma_{hk} = \mathbf{b}_{(h)} \times \mathbf{b}_{(k)}, \quad \gamma^{hi} \gamma_{ik} = \delta_k^h \quad (h, k = 1, \dots, \mu)$$

cosicchè γ^{hi} è il reciproco di γ_{hi} nella matrice $\|\gamma_{ik}\|$ d'ordine μ e a determinante certo non nullo.

Per quanto riguarda $\mathbf{v}^*$ scegliere lo spazio $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_\nu$ ortogonale a $\mathbf{b}_{(1)} \dots, \mathbf{b}_{(\mu)}$ ($\mathbf{b}_{(l)} \times \mathbf{u}_r = 0$ per $l = 1, \dots, \mu$ ed $r = 1, 2, \dots, \nu$) implica

$$(11) \quad \mathbf{v}^* = \sum_{h,k=1}^{\mu} \mathbf{v} \times \mathbf{b}_{(h)} \gamma^{hk} \mathbf{b}_{(k)}.$$

La (11) fornisce la più spontanea tra le trasformazioni verificanti le proprietà a) e b).

Per l'ortogonalità dei vettori $\mathbf{u}_r$ ai $\mathbf{b}_{(l)}$ e per (7) si ha:

$$(12) \quad \mathbf{v}^* \times \mathbf{b}_{(l)} = \mathbf{v} \times \mathbf{b}_{(l)}.$$

§ 4. Sugli invarianti ortogonali. Tensori isotropi elementari e caratterizzazione dei tensori isotropi.

Consideriamo una ω -pla di vettori

$$\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \dots, \mathbf{v}^{(\omega)}$$

e una funzione scalare $f(v_p^{(1)}, v_p^{(2)}, \dots, v_p^{(\omega)})$ delle componenti degli stessi vettori. Sussiste ovviamente il seguente teorema:

TEOREMA I. *Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una funzione φ dei prodotti scalari di quei vettori, per cui sia identicamente*

$$(13) \quad f(v_p^{(1)}, \dots, v_p^{(\omega)}) = \varphi(v^{(1)} \times v^{(1)}, v^{(1)} \times v^{(2)}, \dots, v^{(\omega)} \times v^{(\omega)}),$$

è che, considerate comunque due ω -ple di vettori

$$(14) \quad v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(\omega)}; \quad w^{(1)}, w^{(2)}, \dots, w^{(\omega)}$$

verificanti le relazioni

$$(15) \quad \sigma_{rs} = v^{(r)} \times v^{(s)} = w^{(r)} \times w^{(s)} \quad (r, s = 1, \dots, \omega),$$

risulti:

$$(16) \quad f(v_p^{(1)}, v_p^{(2)}, \dots, v_p^{(\omega)}) = f(w_p^{(1)}, w_p^{(2)}, \dots, w_p^{(\omega)}).$$

Consideriamo una trasformazione ortogonale; essa muti le componenti $v_p^{(r)}$ di $v^{(r)}$ nelle $\bar{v}_p^{(r)}$ ($r = 1, \dots, \omega$). Tale trasformazione muti f in $\bar{f}$ cosicchè

$$(17) \quad f(v_p^{(1)}, \dots, v_p^{(\omega)}) \equiv \bar{f}(\bar{v}_p^{(1)}, \bar{v}_p^{(2)}, \dots, \bar{v}_p^{(\omega)}).$$

La funzione f si dice un *invariante ortogonale* se $f = \bar{f}$ per ogni trasformazione ortogonale.

Sussiste pure il seguente teorema:

TEOREMA II. *La funzione scalare f delle componenti dei vettori $v^{(1)}, \dots, v^{(\omega)}$ è un invariante ortogonale se, e solo se, esiste una funzione φ dei prodotti scalari σ_{rs} verificante (13).*

Per considerazioni preliminari riguardanti un qualsiasi tensore $V_{i_1 \dots i_{2m}}$ di rango $2m$, fissiamo una qualsiasi m -pla di interi $r_1, r_2, \dots, r_m$ con

$$(18) \quad 1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_m \leq 2m.$$

Sia $s_1, s_2, \dots, s_m$ una qualunque disposizione dei numeri $\geq 1, \leq 2m$ e diversi da $r_1, \dots, r_m$. Allora, detto a_{hi} il tensore fondamentale in S_n , il tensore

$$(19) \quad I_{i_1 \dots i_{2m}} = a_{r_1 s_1} a_{r_2 s_2} \dots a_{r_m s_m}$$

è isotropo e lo diremo *tensore isotropo elementare*.

L' m -pla $r_1, \dots, r_m$ soddisfacente (18) può essere scelta in $\binom{2m}{m}$ modi. In corrispondenza di ognuno di questi la considerata disposizione $s_1, \dots, s_m$ può essere scelta in $m!$ modi. Inoltre il tensore isotropo (19) non muta scambiando r_h con s_h e il numero di questi possibili scambi è 2^m . Esso invece muta per scambi d'altro tipo. Allora, il numero i_m dei tensori isotropi elementari di rango $2m$ è

$$(20) \quad i_m = \binom{2m}{m} m! 2^{-m} = (2m-1)!!$$

In [4] Smith e Rivlin hanno dimostrato quanto segue.

Considerati un qualunque gruppo G di trasformazioni di coordinate, e ω vettori di componenti $v_i^{(p)}$ ($p=1, \dots, \omega$), sia $\mathfrak{I}$ il generico invariante di questi vettori per le trasformazioni di G ; inoltre $\mathfrak{I}$ sia lineare nelle componenti di ciascuno di quei vettori, cioè $\mathfrak{I}$ sia un *invariante multilineare* di quei vettori.

Il generico tensore di ordine ω , invariante per le trasformazioni di G è

$$(21) \quad H_{i_1 i_2 \dots i_\omega} = \frac{\partial^\omega \mathfrak{I}}{\partial v_{i_1}^{(1)} \partial v_{i_2}^{(2)} \dots \partial v_{i_\omega}^{(\omega)}}.$$

Identifichiamo G col gruppo delle trasformazioni ortogonali e conseguentemente $\mathfrak{I}$ con la precedente funzione f che supponiamo multilineare nelle componenti di $\mathbf{v}^{(1)}, \dots, \mathbf{v}^{(\omega)}$. Allora, per il Teorema II, la precedente funzione φ dovrà essere un polinomio nelle σ_{rs} non contenente termini in cui figurino fattori del tipo $\sigma_{ir} \sigma_{is}$; quindi esso è una somma di termini del tipo

$$(22) \quad c a_{r_1 s_1} v_{p_1}^{(r_1)} v^{(s_1) p_1} \dots a_{r_m s_m} v_{p_m}^{(r_m)} v^{(s_m) p_m}$$

ove c è una costante, m è $\leq \omega$, l' m -pla $r_1, \dots, r_m$ verifica

$$1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_m \leq \omega$$

e $s_1, \dots, s_m$ sono numeri ≥ 1 , $\leq \omega$, e distinti fra loro e dai numeri $r_1, \dots, r_m$.

Ora, avendo $\mathcal{J}$ la forma (22), il tensore $H_{i_1 \dots i_\omega}$ espresso mediante (21) si identifica col generico tensore isotropo $I_{i_1 \dots i_\omega}$, cfr. (19).

Evidentemente danno contributo al secondo membro di (21) solo i termini (22) con $2m = \omega$, cosicchè il generico tensore isotropo $I_{i_1 \dots i_\omega}$ è una combinazione lineare dei tensori isotropi elementari (19) di rango ω , e inoltre ω deve essere pari affinchè esistano tensori isotropi non nulli di ordine ω .

TEOREMA III. *I tensori isotropi elementari di ordine $\omega = 2s$ costituiscono una base per tensori isotropi in S_n con $n \geq s$.*

DIMOSTRAZIONE. In base all'osservazione fatta prima del teorema basta dimostrare che i tensori isotropi elementari sono indipendenti. A tale scopo ordiniamo i tensori isotropi elementari e supponiamo che il t -mo sia:

$$I_{(t)i_1 \dots i_{2s}} = a_{i_{l_1} i_{h_1}} a_{i_{l_2} i_{h_2}} \dots a_{i_{l_s} i_{h_s}} \quad (\omega = 2s)$$

ove $0 < l_1 < \dots < l_s \leq \omega$, $l_u \neq h_u \neq l_v$, $h_u \neq h_v$ e $0 < h_u \leq \omega$ ($u = v$; $u, v = 1, \dots, s$).

Indichiamo ora con $T_{i_1 \dots i_\omega}$ quel tensore di $S_n (n \geq s)$ per cui

$$T_{i_1 \dots i_\omega} = \begin{cases} 1 & \text{per } i_{l_\alpha} = i_{h_\alpha} = \alpha \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s)$$

Si ha evidentemente

$$\mathbf{T} \times \mathbf{I}_{(r)} = \delta_{rt} \quad (r = 1, \dots, N'_n(\omega))$$

da cui risulta che $\mathbf{I}_t$ non può essere combinazione lineare degli altri tensori isotropi elementari.

c.d.d.

§ 5. Sugli invarianti per trasformazioni ortogonali proprie.

Sia

$$(23) \quad \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \dots, \mathbf{v}^{(\omega)}$$

una ω -pla di vettori.

Preliminarmente consideriamo le quantità:

$$(24) \quad \sigma^{rs} = \mathbf{v}^{(r)} \times \mathbf{v}^{(s)} \quad (r, s = 1, \dots, \omega)$$

$$(25) \quad D^{s_1 \dots s_m} = \varepsilon^{p_1 \dots p_n} v_{p_1}^{(s_1)} \dots v_{p_n}^{(s_m)}$$

ove $\varepsilon^{p_1 \dots p_n}$ è un tensore di Ricci e non il tensore orientato di Ricci (cosicchè, per es. la componente $\varepsilon_{s_1 \dots s_n}$ cambia segno per trasformazioni ortogonali improprie), e $s_1, \dots, s_m$ è una m -pla di interi crescenti $\geq 1, \leq \omega$.

TEOREMA IV. *La funzione scalare $f(v_p^{(1)}, v_p^{(2)}, \dots, v_p^{(\omega)})$ delle componenti dei vettori $\mathbf{v}^{(1)}, \dots, \mathbf{v}^{(\omega)}$ è invariante in forma per le trasformazioni ortogonali proprie, se e solo se esiste una funzione Ψ dei prodotti scalari σ^{rs} e delle quantità $D^{s_1 \dots s_m}$ per cui*

$$(26) \quad f(v_p^{(1)}, \dots, v_p^{(\omega)}) = \Psi(\sigma^{rs}, D^{s_1 \dots s_m}).$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che f sia invariante in forma per ogni trasformazione ortogonale propria; vogliamo dimostrare che allora vale la (26). A tale scopo consideriamo due arbitrarie ω -ple di vettori $\mathbf{v}^{(1)}, \dots, \mathbf{v}^{(\omega)}$ e $\mathbf{w}^{(1)}, \dots, \mathbf{w}^{(\omega)}$ tali che, posto (24) e (25), risulti

$$(24') \quad \sigma^{rs} = \mathbf{w}^{(r)} \times \mathbf{w}^{(s)}$$

$$(25') \quad D^{s_1 \dots s_m} = \varepsilon^{p_1 \dots p_n} w_{p_1}^{(s_1)} \dots w_{p_n}^{(s_m)}.$$

Con ragionamento analogo a quello fatto a proposito dei tensori isotropi, in base a (24) e (24') esistono due sistemi di coordinate (x) , $(\bar{x})$ legati da una trasformazione ortogonale per cui

$$(27) \quad v_p^{(r)} = \overline{w_p^{(r)}} \quad (r = 1, \dots, \omega).$$

Anzi, in base a (25) e (25'), di tali trasformazioni ne esiste una propria (anche per $m \geq n$).

Detta $\bar{f}$ la trasformata della f mediante la trasformazione ortogonale $(x) \rightarrow (\bar{x})$ supposta propria, per l'ammessa invarianza in forma di f , si ha $f = \bar{f}$. Allora, stante (27) (ed essendo f uno scalare invariante nel senso del calcolo tensoriale), si ha:

$$f(v_p^{(1)}, \dots, v_p^{(\omega)}) = f(\bar{w}_p^{(1)}, \dots, \bar{w}_p^{(\omega)}) = \bar{f}(\bar{w}_p^{(1)}, \dots, \bar{w}_p^{(\omega)}) = f(w_p^{(1)}, \dots, w_p^{(\omega)}).$$

Quindi, per l'estensione del Teorema I nella quale in luogo delle relazioni (15) figurano le (24), (25), (24'), (25'), f è una funzione delle σ^{rs} e di $D^{s_1 \dots s_m}$, cioè vale (26).

Viceversa, supponiamo che la funzione f abbia la forma (26); dimostriamo che allora f è invariante in forma per trasformazioni ortogonali proprie.

Per tali trasformazioni le quantità σ^{rs} e $D^{s_1 \dots s_m}$ — cfr. (24) e (25) — rimangono invariate, valgono cioè le uguaglianze

$$\bar{\sigma}^{rs} = \sigma^{rs}, \quad \bar{D}^{s_1 \dots s_m} = D^{s_1 \dots s_m}$$

ove, per es., è $\bar{D}^{s_1 \dots s_m} = \varepsilon^{p_1 \dots p_n} \bar{v}_{p_1}^{(s_1)} \dots \bar{v}_{p_n}^{(s_m)}$.

Si può allora scrivere:

$$\bar{f}(\bar{v}_p^{(1)}, \dots, \bar{v}_p^{(\omega)}) = f(v_p^{(1)}, \dots, v_p^{(\omega)}) = \Psi(\sigma^{rs}, D^{s_1 \dots s_m}) = \Psi(\bar{\sigma}^{rs}, \bar{D}^{s_1 \dots s_m}),$$

da cui, confrontando con la (26), si ha: $f = \bar{f}$ in corrispondenza ad ogni trasformazione ortogonale propria. c.d.d.

§ 6. Tensori emisotropi ed emitropici.

Chiameremo *tensore emisotropo elementare* di rango $\omega = n + 2m$ un tensore E del tipo

$$(28) \quad E_{i_1 \dots i_{n+2m}} = \varepsilon_{i_{s_1} \dots i_{s_n}} a_{i_{s_n+1} i_{s_n+2}} \dots a_{i_{s_n+2m-1} i_{s_n+2m}}$$

ove $s_1, \dots, s_{n+2m}$ è una qualunque permutazione dei numeri $1, \dots, n+2m$. E è evidentemente emisotropo.

Scambiando fra loro due indici appartenenti alla ϵ oppure ad una stessa a il tensore (28) cambia al più di segno. Conviene quindi identificare i tensori emisotropi elementari ottenuti da (28) con tali scambi. Scambi d'altro tipo mutano il tensore emisotropo elementare in considerazione.

Tenuto conto di ciò, si riconosce facilmente che il numero $e_{n,m}$ dei tensori emisotropi elementari di rango $n+2m$ in S_n è

$$(29) \quad e_{n,m} = \binom{n+2m}{n} i_m = \binom{n+2m}{n} \binom{2m}{m} m! 2^{-m}.$$

Chiameremo *tensori emitropici elementari* i tensori isotropi elementari e i tensori emisotropi elementari.

Facciamo per i tensori emitropici l'analogo delle considerazioni riguardanti i tensori isotropi svolte al § 4.

Identifichiamo G col gruppo delle trasformazioni ortogonali proprie e conseguentemente l'invariante $\mathfrak{I}$ per trasformazioni del gruppo G con la precedente funzione f che, inoltre, supponiamo multilineare nelle componenti di $\mathbf{v}^{(1)}, \dots, \mathbf{v}^{(\omega)}$. Per il Teorema IV vale la (26) ove la funzione Ψ è un polinomio nelle $\sigma^{rs}, D^{s_1 \dots s_m}$, in cui non figurano fattori del tipo $\sigma_{is_1} \sigma_{is_2}$, nè del tipo $D_{s_1 \dots s_m} D_{t_1 \dots t_m}$ ove qualche s_h è uguale a qualche t_k , nè del tipo $\sigma_{ij} D_{s_1 \dots s_m}$ con qualche s_h eguale ad i o a j . Quindi, tale polinomio, è una somma di termini o del tipo (22) o del tipo

$$(30) \quad c \epsilon_{i_{s_1} \dots i_{s_n}} a_{i_{s_{n+1}}} i_{s_{n+2}} v^{i_{s_{n+1}}} v^{i_{s_{n+2}}} \dots a_{i_{s_{n+2m-1}}} a_{i_{s_{n+2m}}} v^{i_{s_{n+2m-1}}} v^{i_{s_{n+2m}}}$$

ove c è una costante, $n+2m \leq \omega$ e $s_1 \dots s_{n+2m}$ è una permutazione dei numeri $1, 2, \dots, n+2m$.

Ora il tensore $H_{i_1 \dots i_\omega}$ espresso mediante (21) si identifica col generico tensore emitropico $E'_{i_1 \dots i_\omega}$. Evidentemente danno contributo al secondo membro di (21) solo i termini (30) con $n+2m = \omega$ e i termini del tipo (22) con $2m = \omega$; cosicchè il generico tensore emitropico $E'_{i_1 \dots i_\omega} (= H_{i_1 \dots i_\omega})$ è una combinazione lineare dei tensori *emitropici elementari* (19) (isotropi) e (28) (emisotropi) di rango ω . Ovviamente i tensori di tipo (28) si presentano solo se $\omega \geq n$ e, affinchè tensori non nulli di tale tipo esistano, $\omega - n$ deve essere pari. In particolare per ω dispari ed n pari, in S_n non vi sono tensori emitropici non nulli di rango ω .

In base ai ragionamenti precedenti il generico tensore emitropico $\mathbf{E}'$ può esprimersi come somma di un tensore isotropo $\mathbf{I}$ (combinazione lineare di tensori isotropi elementari) e di un tensore emisotropo $\mathbf{E}$ (combinazione lineare di tensori emisotropi elementari). Le componenti di $\mathbf{E}' = \mathbf{I} + \mathbf{E}$ cambiano di segno per una qualunque trasformazione ortogonale impropria se e solo se $\mathbf{E}' = \mathbf{E}$, ossia se il generico tensore emitropico è una combinazione lineare di tensori emisotropi elementari.

La precedente espressione del generico tensore emitropico $\mathbf{E}'$ implica che il numero $N_n(\omega)$ delle dimensioni di $S_{n,\omega}$ è espresso dalla (2)₁.

§ 7. Un'interpretazione della decomposizione (7). Invarianti lineari (elementari) isotropi ed emisotropi.

Dati comunque in $S_{n,\omega}$, il tensore $\mathbf{V}$, il tensore isotropo elementare $\mathbf{I}$ — cfr. (19) — e il tensore emisotropo elementare $\mathbf{E}$ — cfr. (28) — chiameremo i prodotti scalari

$$(31) \quad \mathbf{V} \times \mathbf{I} = V_{i_1 \dots i_\omega} I^{i_1 \dots i_\omega}, \quad \mathbf{V} \times \mathbf{E} = V_{i_1 \dots i_\omega} E^{i_1 \dots i_\omega}$$

invariante lineare (elementare) isotropo del tensore $\mathbf{V}$ e rispettivamente *invariante lineare (elementare) emisotropo* di $\mathbf{V}$.

Diremo i considerati invarianti isotropi ed emisotropi, *invarianti lineari (elementari) emitropici* di $\mathbf{V}$.

Il generico invariante (31)₁ si ottiene considerando una qualunque successione $r_1, r_2, \dots, r_m$ di interi positivi ≥ 1 e non maggiori di $2m$, considerando una successione $s_1, \dots, s_m$ formata coi rimanenti interi positivi non maggiori di $2m$, e saturando l'indice r_h -mo di $V_{i_1 \dots i_{2m}}$ col suo indice s_h -mo per $h=1, \dots, m$.

Un invariante del tipo (31)₂ può aversi solo se $\omega - n$ è pari, ossia $\omega = n + 2m$, e si ottiene considerando due qualsiasi m -ple $r_1, \dots, r_m, s_1, \dots, s_m$ soddisfacenti le condizioni precedenti, saturando tra di loro gli indici r_h -mo ed s_h -mo di $V_{i_1 \dots i_\omega}$ ($h=1, 2, \dots, m$), e infine saturando i rimanenti n indici col tensore orientato di Ricci.

In base alla decomposizione (7), per $\bar{S}_{n,\omega} = S'_{n,\omega}$ — cfr. § 2 — si può affermare che $\mathbf{v}$ è decomponibile nella somma di due tensori $\mathbf{v}^*$ e $\mathbf{v} - \mathbf{v}^*$ ove $\mathbf{v}^*$ è isotropo — cfr. (7)₂ — e ha gli stessi invarianti lineari

isotropi di $\mathbf{v}$ — cfr. (12) — cosicchè $\mathbf{v} - \mathbf{v}^*$ ha gli invarianti lineari isotropi tutti nulli.

Per $\bar{S}_{n,\omega} = S''_{n,\omega}$ la (7) dice che $\mathbf{v}$ è decomponibile nella somma di due tensori $\mathbf{v}^*$ e $\mathbf{v} - \mathbf{v}^*$ ove $\mathbf{v}^*$ è emisotroppo — cfr. (7)₂ — e ha gli stessi invarianti lineari emisotropi di $\mathbf{v}$ — cfr. (12) — cosicchè $\mathbf{v} - \mathbf{v}^*$ ha gli invarianti lineari emisotropi tutti nulli.

Poichè $\mathbf{b}_h \times \mathbf{u}_k = 0$, la possibilità e unicità della decomposizione (7) per $\bar{S}_{n,\omega} = S'_{n,\omega}$ e per $\bar{S}_{n,\omega} = S''_{n,\omega}$ equivalgono alla possibilità e unicità delle seguenti due decomposizioni di un qualunque tensore $\mathbf{v}$ di rango ω in S_n : la decomposizione di $\mathbf{v}$ in un tensore isotropo ed uno ad invarianti lineari isotropi tutti nulli e la decomposizione di $\mathbf{v}$ in un tensore emisotroppo ed uno ad invarianti lineari emisotropi tutti nulli.

Per $\bar{S}_{n,\omega} = S_{n,\omega}$ la (7) permette di estendere le considerazioni precedenti sui tensori isotropi ed emisotropi, ai tensori emitropici.

§ 8. Alcune relazioni di carattere generale tra tensori emisotropi di rango $2m+n$ in S_n per $m > 0$.

Consideriamo in S_n un riferimento cartesiano ($a_{il} = \delta_{il}$), indi dimostriamo l'uguaglianza:

$$(32) \quad \sum_{u=1}^{n+1} (-1)^{nu} a_{ls_u} \epsilon_{s_{u+1} \dots s_{u+n}} = 0 \quad \text{ove} \quad s_{u+n+1} = s_u \quad (u = 1, 2, \dots, n).$$

Fissiamo ad arbitrio gli $n+2$ indici $l, s_1, \dots, s_{n+1}$ nell'insieme $(1, \dots, n)$. Sia N il numero degli indici $s_1, \dots, s_{n+1}$ eguali ad l .

Per $N=0$ la (32)₁ vale perchè $a_{ls_u} = 0$ per $u=1, \dots, n+1$.

Sia ora $N=1$ ed $s_\alpha = l$. Per $u \neq \alpha$, $a_{ls_u} = 0$ e per $u = \alpha$ gli n indici $s_{u+1}, \dots, s_{u+n}$ hanno valori trovantisi tra gli $n-1$ numeri ottenuti dai numeri $1, \dots, n$ togliendo da essi l . Dunque almeno due dei suddetti indici hanno uno stesso valore e quindi $\epsilon_{s_{u+1} \dots s_{u+n}} = 0$. Ne segue di nuovo la validità di (32)₁.

Sia ora $N \geq 3$. Allora almeno due degli indici $s_{u+1}, \dots, s_{u+n}$ sono uguali ad l , onde $\epsilon_{s_{u+1} \dots s_{u+n}} = 0$ per $u=1, \dots, n+1$.

Dunque (32)₁ vale anche per $N \geq 3$.

Sia ora $N=2$. A meno di un cambiamento circolare della nostra denominazione degli indici, possiamo ritenere $s_1=l$. Sia pure $s_{p+1}=l$ con $1 \leq p \leq n$. Per $u \neq l$ e $u \neq p+1$ sono eguali ad l due degli indici $s_{u+1}, \dots, s_{u+n}$ onde $\varepsilon_{s_{u+1} \dots s_{u+n}}=0$. Ne segue che la (32) può porsi nella forma:

$$(33) \quad (-1)^n a_{ls_1 s_2 \dots s_{n+1}} + (-1)^{n(\rho+1)} a_{ls_{p+1} s_{p+2} \dots s_{n+1} s_1 \dots s_p} = 0 \quad (s_1=s_{p+1}=l)$$

e quindi anche nella forma:

$$(34) \quad \varepsilon_{s_2 \dots s_{n+1}} = (-1)^{1+np} \varepsilon_{s_{p+2} \dots s_{n+1} s_1 \dots s_p} \quad (s_1=s_{p+1}=l).$$

Per assodare la (32) anche per $N=2$ basta dimostrare la (34). A tale scopo si osservi che per $(34)_{2,3}$ e note proprietà di $\varepsilon_{l_1 \dots l_n}$, si ha (essendo $s_1=s_{p+1}$)

$$(35) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{s_1 \dots s_{n+1}} &= \varepsilon_{s_2 \dots s_p s_1 s_{p+2} \dots s_{n+1}} = (-1)^{\rho-1} \varepsilon_{s_1 s_2 \dots s_p s_{p+2} \dots s_{n+1}} = \\ &= (-1)^{\rho-1+(n-\rho)\rho} \varepsilon_{s_{p+2} \dots s_{n+1} s_1 \dots s_p} \end{aligned}$$

Infatti la $(35)_2$ vale perchè l'indice s_1 può essere portato al primo posto con $\rho-1$ scambi. Quanto alla $(35)_3$ basta osservare che si passa dall' n -pla $s_1 \dots s_p s_{p+2} \dots s_{n+1}$ alla $s_{p+2} \dots s_{n+1} s_1 \dots s_p$ arretrando di ρ posti ciascuno degli $n-\rho$ indici $s_{p+2}, \dots, s_{n+1}$. Poichè $\rho-1+(n-\rho)\rho=1+n\rho-[(\rho-1)\rho+2]$ e la $[\]$ è pari, la (35) equivale alla (34) e quindi alla $(32)_1$. Dunque quest'ultima vale anche per $N=2$ e quindi in ogni caso.

Da (32) segue immediatamente la seguente relazione per tensori emisotropi di rango $n+2m$ in S_n :

$$(32') \quad \sum_{u=1}^{n+1} (-1)^{nu} a_{ls_1 s_2 \dots s_{n+1}} \dots a_{l_{m-1} s_{p_{m-1}-1} s_{p_{m-1}} s_{p_{m-1}+1} \dots s_{p_{m-1}+n}} = 0$$

$$(s_{u+n+1}=s_u \text{ per } u=1, \dots, n).$$

Moltiplicando per $\varepsilon_{s_{u+1} \dots s_{u+r} h_{r+1} \dots h_n}$, dalla $(32')$ si ottengono facilmente delle relazioni tra tensori isotropi — cfr. § 10 —.

§ 9. Tensori isotropi di rango 2 o 4 in S_n per $n \geq 1$ e di rango 6 in S_n per $n \geq 3$.

Poniamo:

$$(36) \quad \alpha_{hk} = \mathbf{I}_{(h)} \times \mathbf{I}_{(k)}, \quad \alpha_{hr} \alpha^{rk} = \delta_h^k.$$

È istruttivo applicare la precedente teoria al caso ben noto dei tensori isotropi di rango 2 in S_n . Il generico di essi è ca_{ik} .

Sia $\bar{S}_{n,2} = S'_{n,2}$, onde $\mu = N'_n(2)$ [§ 2] e $\mathbf{b}_{(h)} = \mathbf{I}_{(h)}$ ($h = 1, \dots, \mu$). Allora le γ_{hk} espresse da (10) si riducono all'unica $\alpha_{11} = n$, onde, per (11), $\mathbf{v}^* = \mathbf{v} \times \mathbf{I}_{(1)} \alpha^{11} \mathbf{I}_{(1)} = T_i^i \alpha^{11} \mathbf{I}_{(1)} = n^{-1} T_i^i a_{ik}$, ossia $\mathbf{v}^*$ è il tensore isotropo ultimo termine nella (1).

Trattiamo ora il caso dei tensori isotropi di rango 4 in S_n , determinando le α_{hk} ed esplicitando quindi la (11).

È noto che il numero dei tensori isotropi indipendenti di rango 4 è tre; siano $\mathbf{I}_{(1)}$, $\mathbf{I}_{(2)}$, $\mathbf{I}_{(3)}$ i seguenti tensori isotropi:

$$(37) \quad \mathbf{I}_{(1)ilrs} = a_{il} a_{rs}, \quad \mathbf{I}_{(2)ilrs} = a_{ir} a_{ls}, \quad \mathbf{I}_{(3)ilrs} = a_{is} a_{lr}.$$

Stanti le posizioni (36), per $\omega = 4$ la (11) può scriversi:

$$(38) \quad v_{\alpha\beta\gamma\delta}^* = \frac{1}{n^4 - 3n^2 + 2n} \{ [(n^2 - 1)a_{\alpha\beta} a_{\gamma\delta} + (1 - n)(a_{\alpha\gamma} a_{\beta\delta} + a_{\alpha\delta} a_{\beta\gamma})] v_{ir}^{ir} + \\ + [(n^2 - 1)a_{\alpha\gamma} a_{\beta\delta} + (1 - n)(a_{\alpha\beta} a_{\gamma\delta} + a_{\alpha\delta} a_{\beta\gamma})] v_{il}^{il} + \\ + [(n^2 - 1)a_{\alpha\delta} a_{\beta\gamma} + (1 - n)(a_{\alpha\beta} a_{\gamma\delta} + a_{\alpha\gamma} a_{\beta\delta})] v_{il}^{li} \}.$$

Conveniamo d'intendere

$$\mathbf{I}_{(\alpha)} \dots = \mathbf{I}_{(\alpha)ilrshk}.$$

Nel caso di tensori di rango 6 in S_n , indichiamo un procedimento atto alla determinazione delle α_{hk} .

Siano $\mathbf{I}_{(1)}$..., $\mathbf{I}_{(15)}$ i 15 tensori isotropi elementari di rango 6

— cfr. (20) —. Si ha precisamente:

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \mathbf{I}_{(1)} \dots = a_{il}a_{rs}a_{hk} & \mathbf{I}_{(2)} \dots = a_{il}a_{rh}a_{sk} & \mathbf{I}_{(3)} \dots = a_{il}a_{rk}a_{sh} \\ \mathbf{I}_{(4)} \dots = a_{ir}a_{sh}a_{kl} & \mathbf{I}_{(5)} \dots = a_{ir}a_{sk}a_{hl} & \mathbf{I}_{(6)} \dots = a_{ir}a_{sl}a_{kh} \\ \mathbf{I}_{(7)} \dots = a_{is}a_{hk}a_{lr} & \mathbf{I}_{(8)} \dots = a_{is}a_{hl}a_{kr} & \mathbf{I}_{(9)} \dots = a_{is}a_{hr}a_{kl} \\ \mathbf{I}_{(10)} \dots = a_{ih}a_{kl}a_{rs} & \mathbf{I}_{(11)} \dots = a_{ih}a_{kr}a_{ls} & \mathbf{I}_{(12)} \dots = a_{ih}a_{ks}a_{lr} \\ \mathbf{I}_{(13)} \dots = a_{ik}a_{lr}a_{sh} & \mathbf{I}_{(14)} \dots = a_{ik}a_{ls}a_{rh} & \mathbf{I}_{(15)} \dots = a_{ik}a_{lh}a_{rs} . \end{array} \right.$$

Supponiamo $n \geq 3$, cosicchè per il Teorema III [§ 4] i tensori (39) costituiscono una base in $S'_{n,6}$ per $n \geq 3$.

Si può dimostrare³⁾ che

$$(40) \quad \begin{aligned} \alpha_{h+3, k+3} &= \alpha_{hk}, \quad \alpha_{hh} = n^3, \\ \alpha_{1r} &= \alpha_{2s} = n^2 \quad (r=2, 3, 6, 7, 15; s=3, 5, 9, 12) \\ \alpha_{1r} &= \alpha_{2s} = \alpha_{3l} = n \quad (r=4, 5, 8, 9, 11, 12, 14; s=6, 8, 15; l=6, 9). \end{aligned}$$

Siccome $n^{-1}\alpha_{hk}$ è intero, possiamo calcolare esattamente con le macchine calcolatrici il determinante $D' = n^{-15}D_{(n)}$ della matrice $\| n^{-1}\alpha_{hk} \|$ relativa a $S_{(n)}$ e la corrispondente matrice complementare $\| A'^{hk} \| = \| n^{-14}A_{(n)}^{hk} \|$. Ne segue:

$$(41) \quad \alpha^{hk} = \frac{A_{(n)}^{hk}}{D_{(n)}} = \frac{A'^{hk}}{nD'}.$$

³⁾ Ciascuna colonna nel quadro (39) è invariante per la permutazione ciclica non involgente l'indice i : $S_1 = \begin{pmatrix} lrshk \\ rshkl \end{pmatrix}$. Anzi S_1 permuta circolarmente gli elementi di tale colonna.

Inoltre l' h -mo elemento della k -ma colonna si ottiene dal primo elemento della k -ma colonna stessa applicando la $(h-1)$ -ma potenza della permutazione ciclica $(lrshk)$. Il secondo ed il terzo elemento della riga h -ma si ottengono dal 1° elemento della riga h -ma scambiando fra loro gli indici quarto e quinto. Ne segue (40)₁.

§ 10. Tensori isotropi di rango 6 in S_2 .

In questo caso, per la (32), si ha:

$$(42) \quad \sum_{u=1}^3 a_{ls_u} \varepsilon_{s_{u+1} s_{u+2}} = 0.$$

Moltiplichiamo ora la (42) per $\varepsilon_{r_1 r_2}$; per una nota proprietà del prodotto $\varepsilon_{s_{u+1} s_{u+2}} \varepsilon_{r_1 r_2}$, si ha

$$\sum_{u=1}^3 a_{ls_u} \det \begin{vmatrix} a_{s_{u+1} r_1} & a_{s_{u+1} r_2} \\ a_{s_{u+2} r_1} & a_{s_{u+2} r_2} \end{vmatrix} = \sum_{u=1}^3 a_{ls_u} (a_{s_{u+1} r_1} a_{s_{u+2} r_2} - a_{s_{u+1} r_2} a_{s_{u+2} r_1}) = 0$$

ossia

$$(43) \quad a_{ls_1} a_{s_2 r_1} a_{s_3 r_2} - a_{ls_1} a_{s_2 r_2} a_{s_3 r_1} + a_{ls_2} a_{s_3 r_1} a_{s_1 r_2} - \\ - a_{ls_2} a_{s_3 r_2} a_{s_1 r_1} + a_{ls_3} a_{s_1 r_1} a_{s_2 r_2} - a_{ls_3} a_{s_1 r_2} a_{s_2 r_1} = 0.$$

La (43) è una relazione tra tensori isotropi di rango 6 in S_2 .

Per $(ls_1 s_2 s_3 r_2 r_1) = (ilrshk)$, la (43) si scrive:

$$(43') \quad a_{il} a_{rk} a_{sh} - a_{il} a_{rh} a_{sk} + a_{ir} a_{sk} a_{lh} - a_{ir} a_{sh} a_{lk} + a_{is} a_{lk} a_{rh} - a_{is} a_{lh} a_{rk} = 0.$$

Tenuto fisso l'indice i , permutiamo circolarmente i rimanenti indici $l r s h k$: si ottengono delle relazioni che per (39) possono porsi nella forma:

$$(44) \quad \begin{cases} I_2 = I_3 + I_5 + I_9 - I_4 - I_8, \\ I_5 = I_6 + I_8 + I_{12} - I_7 - I_{11}, \\ I_8 = I_9 + I_{11} + I_{15} - I_{10} - I_{14}, \\ I_{11} = I_{12} + I_{14} + I_3 - I_{13} - I_2, \\ I_{14} = I_{15} + I_2 + I_6 - I_1 - I_5. \end{cases}$$

Si può dimostrare che le cinque relazioni (44) sono linearmente in-

dipendenti ⁴⁾.

Con calcolo materiale dalle (44) si giunge alle seguenti espressioni di $I_2, I_5, I_8, I_{11}, I_{14}$ in funzione dei rimanenti tensori (39):

$$(45) \quad \begin{cases} I_2 = I_1 + I_9 + I_{12} - I_7 - I_{10}, \\ I_5 = I_4 + I_{12} + I_{15} - I_{10} - I_{13}, \\ I_8 = I_7 + I_{15} + I_3 - I_{13} - I_1, \\ I_{11} = I_3 + I_6 + I_{10} - I_1 - I_4, \\ I_{14} = I_6 + I_9 + I_{13} - I_4 - I_7. \end{cases}$$

Consideriamo la matrice della $\alpha_{hk} = I_h \times I_k$, ove I_h e I_k sono arbitrari tensori appartenenti alla prima o alla terza colonna nel quadro (39). Conformemente a osservazioni fatte prima della (41), $\alpha'_{hk} = \alpha_{hk}/2$ è intero. In base a (39) si ha precisamente:

$$\| \alpha'_{hk} \| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 4 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 4 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 4 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

Il determinante D' della matrice considerata vale 4096 cosicchè i

⁴⁾ Detti $T_{(\beta)}^{ilrshk}$ ($\beta = 1, \dots, 5$) i tensori aventi rispettivamente le sole componenti $T^{112222}, T^{121222}, T^{122122}, T^{122212}, T^{122221}$ non nulle ed eguali ad 1, risulta facilmente $\mathfrak{F}_{(\alpha)ilrshk} T_{(\beta)}^{ilrshk} = \delta_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, 5$) ove $\mathfrak{F}_{(\alpha)ilrshk}$ è il primo membro dell' α -ma delle relazioni (44) — cfr. quadro (39) —.

dieci tensori $I_1, I_3, I_4, I_6, I_7, I_9, I_{10}, I_{12}, I_{13}, I_{15}$, costituenti la prima e terza colonna nel quadro (39), costituiscono una base in $S'_{2,6}$.

Detto A'^{hk} il complemento algebrico di α'_{hk} nella matrice considerata si, ha:

$$\|A'^{hk}\| = \begin{vmatrix} 4096 & -2048 & 1024 & -1024 & -2048 & 1024 & -2048 & 1024 & 1024 & -1024 \\ -2048 & 2560 & -1024 & 512 & 1024 & -512 & 1024 & -512 & -1024 & 512 \\ 1024 & -1024 & 4096 & -2048 & 1024 & -1024 & -2048 & 1024 & -2048 & -1024 \\ -1024 & 512 & -2048 & 2560 & -1024 & 512 & 1024 & -512 & 1024 & -512 \\ -2048 & 1024 & 1024 & -1024 & -4096 & -2048 & 1024 & -1024 & -2048 & 1024 \\ 1024 & -512 & 1024 & 512 & -2048 & 2560 & -1024 & 512 & 1024 & -512 \\ -2048 & 1024 & -2048 & 1024 & 1024 & -1024 & 4096 & -2048 & 1024 & -1024 \\ 1024 & -512 & 1024 & -512 & -1024 & 512 & -2048 & 2560 & 1024 & 512 \\ 1024 & -1024 & -2048 & 1024 & -2048 & 1024 & -1024 & -1024 & 4096 & -2048 \\ -1024 & 512 & 1024 & -512 & 1024 & -512 & -1024 & 512 & -2048 & 2560 \end{vmatrix}.$$

Allora, in base alla (41) per $n=2$ e all'eguaglianza $D'=4096$, nel caso in considerazione, la (11) diviene:

$$(46) \quad v_{\alpha\beta\gamma\delta\xi\eta}^* = \frac{1}{8192} \sum_h \left(\sum_k A'^{hk} I_{(k)\alpha\beta\gamma\delta\xi\eta} \right) v^{ilrstu} I_{(h)ilrstu}.$$

§ 11. Tensori emisotropi di rango ≤ 5 .

Conformemente alla tabella del Racah al § 2, ogni tensore emisotropo di rango ω in S_ω ha la forma $c\varepsilon_{i_1 \dots l\omega}$; inoltre, l'unico caso interessante di tensore emisotropo di rango $\omega \leq 4$ in S_n si ha per $\omega=4$ ed $n=2$.

Consideriamo tale caso, ossia lo spazio $S''_{2,4}$ di dimensioni $N''_2(4)=3$.

Siano E_1, E_2, E_3 i seguenti tensori emisotropi elementari:

$$(47) \quad E_{(1)ilst} = \varepsilon_{il} a_{st}, \quad E_{(2)ilst} = \varepsilon_{is} a_{lt}, \quad E_{(3)ilst} = \varepsilon_{it} a_{ls}.$$

Si ha:

$$(48) \quad \beta_{hk} = E_{(h)} \times E_{(k)} = 2(1 + \delta_{hk}), \quad \det \|\beta_{hk}\| = 32.$$

Ne segue l'indipendenza lineare dei tensori (47) e, siccome $N_2''(4)=3$, essi costituiscono una base di $S_{2,4}''$.

Fatte $\mathbf{b}_h = \mathbf{E}_h$, la (11) si può porre nella forma:

$$(49) \quad v_{\alpha\beta\gamma\delta}^* = \frac{1}{4} \{ [3v_{[12]s^s} - v_{[12]l^l} - v_{[1l^l 2]}\epsilon_{\alpha\beta}a_{\gamma\delta} + \\ + [3v_{[12]l^l} - v_{[12]s^s} - v_{[1l^l 2]}\epsilon_{\alpha\gamma}a_{\beta\delta} + [3v_{[1l^l 2]} - v_{[12]s^s} - v_{[12]l^l}]\epsilon_{\alpha\delta}a_{\beta\gamma} \}.$$

Dalla tabella del Racah risulta che la considerazione dei tensori di rango 5 in S_n ha interesse solo per $n=3$, nel quale caso essi costituiscono il sottospazio $S_{3,5}''$ di $S_{3,5}$ di dimensioni $N_3''(5)=6$ [§ 2].

Per (29) i tensori emisotropi elementari sono dieci. Identifichiamoli con i tensori $\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_{10}$ le cui componenti sono espresse nel seguente quadro: ⁵⁾

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \mathbf{E}_{(1)ilmns} = \epsilon_{ilm}a_{ns}, & \mathbf{E}_{(5)} \dots = \epsilon_{ilm}a_{ms}, & \mathbf{E}_{(7)} \dots = \epsilon_{mns}a_{il} \\ \mathbf{E}_{(2)} \dots = \epsilon_{imn}a_{sl}, & \mathbf{E}_{(6)} \dots = \epsilon_{ims}a_{nl}, & \mathbf{E}_{(8)} \dots = \epsilon_{nsl}a_{im} \\ \mathbf{E}_{(3)} \dots = \epsilon_{ins}a_{lm}, & -\mathbf{E}_{(5)} \dots = \epsilon_{inl}a_{sm}, & \mathbf{E}_{(9)} \dots = \epsilon_{slm}a_{in} \\ \mathbf{E}_{(4)} \dots = \epsilon_{isl}a_{mn}, & -\mathbf{E}_{(6)} \dots = \epsilon_{ism}a_{ln}, & \mathbf{E}_{(10)} \dots = \epsilon_{lmn}a_{is}. \end{array} \right.$$

Posto

$$(53) \quad \beta_{hk} = \mathbf{E}_{(h)} \times \mathbf{E}_{(k)} = 6\beta'_{hk}, \quad \beta_{hr}\beta^{rk} = \delta_h^k \quad (h, k = 1, \dots, 6)$$

⁵⁾ In questo quadro sono state messe le espressioni di $-\mathbf{E}_{(5)}$ e $-\mathbf{E}_{(6)}$ affinché la permutazione ciclica $S_2 = \begin{pmatrix} l m n s \\ m n s l \end{pmatrix}$ non involgente i lasci invariata ogni colonna di (50). Nel nostro caso, la (32) vale per $n=3$ onde $\epsilon_{mns}a_{li} = \epsilon_{nsl}a_{im} - \epsilon_{sim}a_{ln} + \epsilon_{imn}a_{ls}$, ossia

$$(51) \quad \epsilon_{mns}a_{li} = \epsilon_{ins}a_{lm} - \epsilon_{ims}a_{ln} + \epsilon_{imn}a_{ls}.$$

Allora, per (50) e la seconda proprietà di S_2 , si ha:

$$(52) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{E}_7 = \mathbf{E}_3 - \mathbf{E}_6 + \mathbf{E}_2, & \mathbf{E}_8 = \mathbf{E}_4 + \mathbf{E}_5 + \mathbf{E}_3 \\ \mathbf{E}_9 = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_6 + \mathbf{E}_4, & \mathbf{E}_{10} = \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_5 + \mathbf{E}_1. \end{array} \right.$$

e indicato con B'_{hk} il complemento algebrico di β'_{hk} nella matrice $\|\beta'_{hk}\|$ ($h, k=1, \dots, 6$) e con D' il suo determinante, si ha:

$$(54) \quad D' = 125, \quad \beta^{hk} = \frac{B'^{hk}}{6D'},$$

$$\|B'^{hk}\| = \begin{vmatrix} 75 & 25 & 0 & 25 & -25 & 25 \\ 25 & 75 & 25 & 0 & -25 & -25 \\ 0 & 25 & 75 & 25 & 25 & -25 \\ 25 & 0 & 25 & 75 & 25 & 25 \\ -25 & -25 & 25 & 25 & 75 & 0 \\ 25 & -25 & -25 & 25 & 0 & 75 \end{vmatrix}.$$

Nel caso presente va fatto $\mathbf{b}_h = \mathbf{E}_h$, onde $\gamma_{hk} = \beta_{hk}$ — cfr. (10) e (53)₁ — e la (11) può porsi nella forma:

$$(55) \quad v_{\alpha\beta\gamma\delta\xi}^* = \frac{1}{750} \sum_{k=1}^6 \varepsilon_{ilm} [B'^{1k} v_{ilmn} + B'^{2k} v_{inlm} + B'^{3k} v_{inlm} + \\ + B'^{4k} v_{imn}^l + B'^{5k} v_{ilmn} + B'^{6k} v_{inlm}] E_{(k)\alpha\beta\gamma\delta\xi}.$$

§ 12. Tensori emisotropi di rango 6 in S_2 .

In base ad un risultato ottenuto al § 6, il generico tensore emisotropo di rango 6 in S_2 è una combinazione lineare dei tensori emisotropi elementari (28) che per (29) sono 45.

Consideriamo le seguenti determinazioni del generico tensore $\mathbf{E}_{ilmnst}$ avente la forma (28), nelle quali la i è un indice della ε :

$$(56) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \mathbf{E}_{(1)ilmnst} = \varepsilon_{il} a_{mn} a_{st}, & \mathbf{E}_{(6)} \dots = \varepsilon_{il} a_{ms} a_{tn}, & \mathbf{E}_{(11)} \dots = \varepsilon_{il} a_{mt} a_{ns} \\ \mathbf{E}_{(2)} \dots = \varepsilon_{im} a_{ns} a_{tl}, & \mathbf{E}_{(7)} \dots = \varepsilon_{im} a_{nt} a_{ls}, & \mathbf{E}_{(12)} \dots = \varepsilon_{im} a_{nl} a_{st} \\ \mathbf{E}_{(3)} \dots = \varepsilon_{in} a_{st} a_{lm}, & \mathbf{E}_{(8)} \dots = \varepsilon_{in} a_{sl} a_{mt}, & \mathbf{E}_{(13)} \dots = \varepsilon_{in} a_{sm} a_{tl} \\ \mathbf{E}_{(4)} \dots = \varepsilon_{is} a_{tl} a_{mn}, & \mathbf{E}_{(9)} \dots = \varepsilon_{is} a_{tm} a_{nl}, & \mathbf{E}_{(14)} \dots = \varepsilon_{is} a_{tn} a_{lm} \\ \mathbf{E}_{(5)} \dots = \varepsilon_{it} a_{lm} a_{ns}, & \mathbf{E}_{(10)} \dots = \varepsilon_{it} a_{ln} a_{sm}, & \mathbf{E}_{(15)} \dots = \varepsilon_{it} a_{ls} a_{mn}. \end{array} \right.$$

Nel caso presente la (32') può porsi nella forma

$$(57) \quad a_{l_1 l_2} a_{l_3 s_1} \varepsilon_{s_2 s_3} + a_{l_1 l_2} a_{l_3 s_2} \varepsilon_{s_3 s_1} + a_{l_1 l_2} a_{l_3 s_3} \varepsilon_{s_1 s_2} = 0.$$

Per esempio, con la sostituzione $(l_1 l_2 l_3 s_1 s_2 s_3) = (stlmn)$ la (57) diviene:

$$(57') \quad a_{st} a_{li} \varepsilon_{mn} + a_{st} a_{lm} \varepsilon_{ni} + a_{st} a_{ln} \varepsilon_{im} = 0.$$

Più in generale, nella (57) facciamo sempre $s_1 = i$ e identifichiamo s_2, s_3, l_1, l_2, l_3 con l, m, n, s, t , prescindendo dall'ordine, in tutti i modi possibili.

Si riconosce facilmente che il primo termine della (57) è il generico dei trenta tensori emisotropi elementari diversi dai quindici tensori (56). Infatti gli indici s_2, s_3 si possono scegliere fra gli indici m, n, s, t, l essenzialmente in $\binom{5}{2} = 10$ modi.

Fatto ciò, l_3 può scegliersi in tre modi e la coppia non ordinata l_1, l_2 resta determinata. Le trenta determinazioni del 1° membro di (57) così ottenute sono appunto i tensori emisotropi elementari esclusi dalle (56) e per (57) essi possono esprimersi mediante semplici combinazioni lineari dei tensori (56).

Vogliamo dimostrare che le prime due colonne nel quadro (56) — ossia i tensori $\mathbf{E}_{(1)}, \dots, \mathbf{E}_{(10)}$ — costituiscono una base nello spazio $S'_{2,6}$ dei tensori emisotropi di cui nel titolo. Inoltre, vogliamo esplicitare la (11) nel caso presente. Ai suddetti scopi, ritenendo $\beta_{hk} = \mathbf{E}_{(h)} \times \mathbf{E}_{(k)}$, — cfr. (48)₁ — consideriamo la matrice $\| 2^{-1} \beta_{hk} \|$ ($h, k = 1, \dots, 10$). Si ha:

$$\left\| \frac{\beta_{hk}}{2} \right\| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Detto D' il suo determinante, $\|B'^{hk}\|$ la matrice complementare e β^{hk} il reciproco di β_{hk} nella matrice $\|\beta_{hk}\|$ ($h, k=1, \dots, 10$), si ha:

$$\|B'^{hk}\| = \begin{vmatrix} 8704 & 512 & -3584 & -3584 & 512 & -3584 & 512 & 512 & 512 & 512 \\ 512 & 8704 & 512 & -3584 & -3584 & 512 & -3584 & 512 & 512 & 512 \\ -3584 & 512 & 8704 & 512 & -3584 & 512 & 512 & -3584 & 512 & 512 \\ -3584 & -3584 & 512 & 8704 & 512 & 512 & 512 & 512 & -3584 & 512 \\ 512 & -3584 & -3584 & 512 & 8704 & 512 & 512 & 512 & 512 & -3584 \\ -3584 & 512 & 512 & 512 & 512 & 8704 & -3584 & 512 & 512 & -3584 \\ 512 & -3584 & 512 & 512 & 512 & -3584 & 8704 & -3584 & 512 & 512 \\ 512 & 512 & -3584 & 512 & 512 & 512 & -3584 & 8704 & -3584 & 512 \\ 512 & 512 & 512 & -3584 & 512 & 512 & 512 & -3584 & 8704 & -3584 \\ 512 & 512 & 512 & 512 & -3584 & -3584 & 512 & 512 & -3584 & 8704 \end{vmatrix}.$$

$$(58) \quad D' = 16384, \quad \beta^{hk} = \frac{B'^{hk}}{2D'} \quad (h, k=1, \dots, 10).$$

Dalla (58)₁, fra l'altro, segue l'indipendenza lineare dei tensori $\mathbf{E}_{(r)}$ ($r=1, \dots, 10$) in armonia col fatto che, come risulta dal quadro al § 2, $N'_2(6)=10$.

Nel caso presente, ($\gamma_{hk}=\beta_{hk}$), la (11), stante (58)₂, può porsi nella forma:

$$(59) \quad v_{\alpha\beta\gamma\delta\xi\eta}^* = \frac{1}{16384} \sum_{k=1}^{10} [B'^{1k}v_{[12]m^m s^s} + B'^{2k}v_{[12]n^n l^l} + B'^{3k}v_{[12]s^s} + \\ + B'^{4k}v_{[12]m^m i^i} + B'^{5k}v_{[12]n^n 2^2} + B'^{6k}v_{[12]mn^{mn}} + B'^{7k}v_{[12]n^n l^l} + \\ + B'^{8k}v_{[12]lm^{lm}} + B'^{9k}v_{[12]lm^{lm}} + B'^{10k}v_{[12]lm^{lm}}] E_{(k)\alpha\beta\gamma\delta\xi\eta}.$$

I tensori $\mathbf{E}_{(11)}, \dots, \mathbf{E}_{(15)}$ possono esprimersi come segue nella considerata base $\mathbf{E}_{(1)}, \dots, \mathbf{E}_{(10)}$:

$$(60) \quad \begin{cases} \mathbf{E}_{11} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_3 - \mathbf{E}_4 + \mathbf{E}_5 + \mathbf{E}_6 - \mathbf{E}_7 + \mathbf{E}_8 + \mathbf{E}_9 - \mathbf{E}_{10}) \\ \mathbf{E}_{12} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 - \mathbf{E}_4 - \mathbf{E}_5 + \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_7 - \mathbf{E}_8 + \mathbf{E}_9 + \mathbf{E}_{10} - \mathbf{E}_6) \\ \mathbf{E}_{13} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_3 + \mathbf{E}_4 - \mathbf{E}_5 - \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_8 + \mathbf{E}_9 - \mathbf{E}_{10} + \mathbf{E}_6 - \mathbf{E}_7) \\ \mathbf{E}_{14} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_4 + \mathbf{E}_5 - \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 + \mathbf{E}_9 - \mathbf{E}_{10} + \mathbf{E}_6 + \mathbf{E}_7 - \mathbf{E}_8) \\ \mathbf{E}_{15} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_5 + \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_3 + \mathbf{E}_4 + \mathbf{E}_{10} - \mathbf{E}_6 + \mathbf{E}_7 + \mathbf{E}_8 - \mathbf{E}_9). \end{cases}$$

§ 13. Tensori emisotropi di rango 6 in S_4 o S_n per $n \neq 2$.

Come risulta dalla tabella del Racah al § 2, ha interesse considerare i tensori emisotropi di rango 6 in S_n per $n \neq 2$, solo nel caso $n=4$. Consideriamo appunto questo caso. Allora, come è stato dimostrato al § 6, ogni tensore emisotropo di rango 6 è una combinazione lineare dei seguenti ⁶⁾:

$$(61) \quad \begin{cases} \mathbf{E}_{(1)ilmnst} = \varepsilon_{inst} a_{lm} , & \mathbf{E}_{(6)} \dots = \varepsilon_{imnt} a_{ls} , & \mathbf{E}_{(11)} \dots = \varepsilon_{mnst} a_{il} \\ \mathbf{E}_{(2)} \dots = \varepsilon_{istl} a_{mn} , & \mathbf{E}_{(7)} \dots = \varepsilon_{insl} a_{mt} , & \mathbf{E}_{(12)} \dots = \varepsilon_{nstl} a_{im} \\ \mathbf{E}_{(3)} \dots = \varepsilon_{itlm} a_{ns} , & \mathbf{E}_{(8)} \dots = \varepsilon_{istm} a_{nl} , & \mathbf{E}_{(13)} \dots = \varepsilon_{stlm} a_{in} \\ \mathbf{E}_{(4)} \dots = \varepsilon_{ilmn} a_{st} , & \mathbf{E}_{(9)} \dots = \varepsilon_{itln} a_{sm} , & \mathbf{E}_{(14)} \dots = \varepsilon_{tlmn} a_{is} \\ \mathbf{E}_{(5)} \dots = \varepsilon_{imns} a_{tl} , & \mathbf{E}_{(10)} \dots = \varepsilon_{ilms} a_{tn} , & \mathbf{E}_{(15)} \dots = \varepsilon_{lmns} a_{it} . \end{cases}$$

Nel caso presente ($n=4$), la (32) diviene:

$$(62) \quad \varepsilon_{s_2 s_3 s_4 s_5} a_{ls_1} + \varepsilon_{s_2 s_4 s_5 s_1} a_{ls_2} + \varepsilon_{s_4 s_5 s_1 s_2} a_{ls_3} + \varepsilon_{s_5 s_1 s_2 s_3} a_{ls_4} + \varepsilon_{s_1 s_2 s_3 s_4} a_{ls_5} = 0.$$

Ora sostituiamo nella (62) l'indice l successivamente con m, n, s, t e contemporaneamente sostituiamo (ordinatamente) $s_1, \dots, s_5$ con quelli degli indici i, l, m, n, s, t distinti da quello sostituito ad l . Si ottengono così delle

⁶⁾ La permutazione ciclica $\begin{pmatrix} lmnst \\ mnstl \end{pmatrix}$ non involgente l'indice i lascia invariata ogni colonna del quadro (61) e permuta cicularmente le righe di questo.

relazioni che per (61) possono scriversi:

$$(63) \quad \begin{cases} \mathbf{E}_{11} = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_8 + \mathbf{E}_6 - \mathbf{E}_5, & \mathbf{E}_{12} = \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_9 + \mathbf{E}_7 - \mathbf{E}_1, \\ \mathbf{E}_{13} = \mathbf{E}_3 - \mathbf{E}_{10} + \mathbf{E}_8 - \mathbf{E}_2, & \mathbf{E}_{14} = \mathbf{E}_4 - \mathbf{E}_6 + \mathbf{E}_9 - \mathbf{E}_3, \\ \mathbf{E}_{15} = \mathbf{E}_5 - \mathbf{E}_7 + \mathbf{E}_{10} - \mathbf{E}_4. \end{cases}$$

Per $r=11, \dots, 15$ $\mathbf{E}_{(r)ilmnst}$ è dunque una combinazione lineare dei tensori $\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_{10}$, inclusi fra i tensori (61). Siccome $N_4''(6)=10$ [§ 2], e ogni tensore emisotropo di rango 6 è una combinazione lineare dei tensori (61), i tensori $\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_{10}$ devono essere linearmente indipendenti. Del resto la loro indipendenza risulterà direttamente da successive considerazioni.

Intendendosi $\beta_{hk} = \mathbf{E}_h \times \mathbf{E}_k$ — cfr. (48)₁ —, posto $4 \cdot 3! \beta'_{hk} = \beta_{hk}$, e detto B'_{hk} il complemento algebrico di β'_{hk} nella matrice $\|\beta'_{hk}\|$ ($h, k=1, \dots, 10$), D' il determinante della stessa matrice, e β^{hk} il reciproco di β_{hk} nella matrice $\|\beta_{hk}\|$ ($h, k=1, \dots, 10$), si ha

$$\|B'^{hk}\| = \begin{vmatrix} 3 \cdot 6^5 & -6^5 & 0 & 0 & -6^5 & 6^5 & -6^5 & -6^5 & 6^5 & 0 \\ -6^5 & 3 \cdot 6^5 & -6^5 & 0 & 0 & 0 & 6^5 & -6^5 & -6^5 & 6^5 \\ 0 & -6^5 & 3 \cdot 6^5 & -6^5 & 0 & 6^5 & 0 & 6^5 & -6^5 & -6^5 \\ 0 & 0 & -6^5 & 3 \cdot 6^5 & -6^5 & -6^5 & 6^5 & 0 & 6^5 & -6^5 \\ -6^5 & 0 & 0 & -6^5 & 3 \cdot 6^5 & -6^5 & -6^5 & 6^5 & 0 & 6^5 \\ 6^5 & 0 & 6^5 & -6^5 & -6^5 & 3 \cdot 6^5 & 0 & -6^5 & -6^5 & 0 \\ -6^5 & 6^5 & 0 & 6^5 & -6^5 & 0 & 3 \cdot 6^5 & 0 & -6^5 & -6^5 \\ -6^5 & -6^5 & 6^5 & 0 & 6^5 & -6^5 & 0 & 3 \cdot 6^5 & 0 & -6^5 \\ 6^5 & -6^5 & -6^5 & 6^5 & 0 & -6^5 & -6^5 & 0 & 3 \cdot 6^5 & 0 \\ 0 & 6^5 & -6^5 & -6^5 & 6^5 & 0 & -6^5 & -6^5 & 0 & 3 \cdot 6^5 \end{vmatrix},$$

$$(64) \quad D' = 46656, \quad \beta^{hk} = \frac{B'^{hk}}{4 \cdot 3! D'} = \frac{B'^{hk}}{1.119.744}.$$

Nel caso presente ($\mathbf{b}_h = \mathbf{E}_h$, $\gamma_{hk} = \beta_{hk}$) la (11) può scriversi:

$$\begin{aligned}
 (65) \quad v_{\alpha\beta\gamma\delta\xi\eta}^* = & \frac{1}{1119744} \sum_{k=1}^{10} \varepsilon_{ilmn} [B'^{1k} v^{is,lmn} + B'^{2k} v^{ins,lm} + B'^{3k} v^{imns,l} + \\
 & + B'^{4k} v^{ilmns} + B'^{5k} v^{islmn} + B'^{6k} v^{islm,n} + B'^{7k} v^{inslm} + \\
 & + B'^{8k} v^{isn,lm} + B'^{9k} v^{imns,l} + B'^{10k} v^{ilmns}] E_{(k)\alpha\beta\gamma\delta\xi\eta}.
 \end{aligned}$$

dove sono stati messi in evidenza gli invarianti lineari (elementari) emisotropi del tensore v .

BIBLIOGRAFIA

- [1] PASTORI MARIA: *Sui tensori isotropi: relazione fra le componenti*, Rend. Acc. Lincei, serie 6^a, vol. XII, 1930, pag. 374.
- [2] PASTORI MARIA: *Espressione generale dei tensori isotropi*, Rend. Acc. Lincei, serie 6^a, vol. XII, 1930, pag. 499.
- [3] RACAU G.: *Numero dei tensori isotropi ed emisotropi in spazi a più dimensioni*, Rend. Acc. Lincei, serie 6^a, vol. XVIII, 1933, pag. 135.
- [4] SMITH G. F. and RIVLIN R. S.: *The anisotropic tensors*, Quart. Appl. Math., vol. XV, 1957, pag. 308.

Manoscritto pervenuto il 23 aprile 1969.