

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

FEDERICO MENEGAZZO

Sui gruppi relativamente complementati

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 43 (1970), p. 209-214

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1970__43__209_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1970__43__209_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SUI GRUPPI RELATIVAMENTE COMPLEMENTATI

FEDERICO MENEGAZZO (*)

Un gruppo G è relativamente complementato [3] se tale è il reticolo $\mathfrak{L}(G)$ dei suoi sottogruppi, e cioè se per ogni terna A, B, C di sottogruppi di G tali che $A \leq B \leq C$ esiste un sottogruppo L di G per il quale $C = B \cup L$, $A = B \cap L$. Se il gruppo G è finito, è allora noto [3] che esso è relativamente complementato se e solo se G è un T -gruppo risolubile con i p -sottogruppi di Sylow abeliani elementari per ogni numero primo p ¹⁾. In questa nota si dimostra (n. 1) che il gruppo risolubile o localmente finito G è relativamente complementato se e solo se G è un T -gruppo risolubile periodico con i p -sottogruppi di Sylow abeliani elementari per ogni numero primo p , e tale che tutti i π -sottogruppi di Sylow di G ($\pi = \omega(G/G')$) siano complementi di G' ; se in particolare G è finito si riottiene la caratterizzazione di [3].

Le notazioni e le definizioni sono quelle usuali della teoria dei gruppi. Il gruppo G si dice T -gruppo se $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$ implica $A \trianglelefteq G$; G è un $\bar{T}$ -gruppo se ogni suo sottogruppo è un T -gruppo.

Se H è un gruppo periodico $\omega(H)$ è l'insieme dei numeri primi p tali che H possiede un elemento di ordine p .

1. Mettiamo in evidenza una proprietà dei T -gruppi che sarà usata nel seguito.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca matematici del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

¹⁾ Nei lavori [4], [1] si affronta il problema dei gruppi infiniti relativamente complementati, ma le caratterizzazioni in essi ottenute non sono corrette (cfr. l'esempio al n. 2).

LEMMA 1.1. *Sia G un T -gruppo risolubile periodico con i p -sottogruppi di Sylow abeliani elementari per ogni numero primo p ; poniamo $\omega(G/G')=\pi$. Se ogni π -sottogruppo di Sylow di G è un complemento di G' , allora ogni π -sottogruppo di Sylow di H (di G/N) è un complemento in H (in G/N) di $G' \cap H$ (di G'/N), per ogni sottogruppo H di G e per ogni sottogruppo N di G' .*

i) $G' \leq H \leq G$. Un arbitrario π -sottogruppo di Sylow S di H è contenuto in un π -sottogruppo di Sylow T di G tale che $G=G'T$ e, poichè $S \leq T \cap H$, per la massimalità di S risulta $S=T \cap H$ da cui $G'S = G'(T \cap H) = H$.

ii) $N \leq G'$ (e quindi $[2] N \triangleleft G$). Se S/N è un arbitrario π -sottogruppo di Sylow di G/N , scegliamo un π -sottogruppo di Sylow S_1 di S e un π -sottogruppo di Sylow T di G contenente S_1 . Posto $G'=M \times N$ risulta $MT \cap S \cap G' = 1$ e da $S_1 \leq MT \cap S \leq S$ segue, per la massimalità di S_1 , $MT \cap S = S_1$ da cui $NS_1 = N(MT \cap S) = N(MT) \cap S = S$; in particolare $S \leq NT$. Ma allora $NT/N = S/N$ perchè S/N è di Sylow in G/N e dunque $(G'/N)(S/N) = (G'/N)(NT/N) = G'T/N = G/N$.

iii) Sia H un arbitrario sottogruppo di G . Posto $G' = (G' \cap H) \times N$, G/N soddisfa le ipotesi del lemma per ii) e perchè $(G/N)' = G'/N$; segue da $H \cong NH/N = G'H/N$ e da i) che anche H gode della proprietà enunciata.

TEOREMA 1.2. *Il gruppo risolubile G è relativamente complementato se e solo se è un T -gruppo periodico con i p -sottogruppi di Sylow abeliani elementari per ogni numero primo p , e tale che ogni π -sottogruppo di Sylow di G sia un complemento di G' ($\pi = \omega(G/G')$).*

Dimostriamo che la condizione è necessaria. G non contiene fattori ciclici di ordine p^2 , p un primo, il cui reticolo non è complementato; quindi G è periodico e i p -sottogruppi di Sylow hanno esponente p . Se $A \triangleleft B \triangleleft C \leq G$, esiste $L \leq C$ tale che $A = B \cap L \triangleleft L$ e $\mathfrak{S}_C(A) \geq B \cup L = C$: G è un T -gruppo (e anzi un $\bar{T}$ -gruppo); ma allora $[2] G'$ è abeliano e di Hall in G , e quindi i p -sottogruppi di Sylow di G sono abeliani elementari. Per ogni π -sottogruppo di Sylow S di G esiste $C \leq G$ tale che $G'S \cap C = S$, $G = (G'S)C = G'C$; poichè $C \cap G' \leq S \cap G' = 1$, C è un π -gruppo contenente S , da cui $S = C$ è un complemento di G' .

La condizione è sufficiente. Siano A, B, C sottogruppi di G tali che $A \leq B \leq C$; non è restrittivo supporre $A \cap G' = 1$. Se S è un π -sotto-

gruppo di Sylow di B contenente A , e T un π -sottogruppo di Sylow di C contenente S , risulta $B = (G' \cap B)S$, $C = (G' \cap C)T$ per il lemma; poichè T è abeliano elementare esiste $R \leq T$ tale che $T = SR$, $S \cap R = A$. Posto $G' \cap C = (G' \cap B) \times C_1$ e $F = C_1R$, si ha $C = (G' \cap C)T = (G' \cap B)C_1SR = (G' \cap B)SC_1R = BF$, $A \leq B \cap F$ e anzi se $x \in B \cap F = (G' \cap B)S \cap C_1R$, $x = bs = c_1r \in G'T$, con $b \in G' \cap B$, $s \in S$, $c_1 \in C_1$, $r \in R$; poichè $G' \cap T = 1$ si ha $b = c_1 \in (G' \cap B) \cap C_1 = 1$, $x \in S \cap R = A$, $B \cap F = A$, c.v.d.

COROLLARIO 1.3. *Il gruppo localmente finito G è relativamente complementato se e solo se è un T -gruppo risolubile con i p -sottogruppi di Sylow abeliani elementari per ogni numero primo p , e tale che ogni π -sottogruppo di Sylow di G sia un complemento di G' ($\pi = \omega(G/G')$).*

I sottogruppi finitamente generati del gruppo localmente finito e relativamente complementato G sono $\bar{T}$ -gruppi finiti, e quindi [2] sono metabeliani; G è allora risolubile e la conclusione segue subito dal teorema.

DEFINIZIONE. Siano G un gruppo periodico e π un insieme di numeri primi: una π -base completa di Sylow di G è una collezione $\mathcal{S} = \{S_i\}$ di sottogruppi di G , di cui S_0 è un π -sottogruppo di Sylow di G e S_i ($i \neq 0$) è un p_i -sottogruppo di Sylow G per ogni numero primo $p_i \notin \pi$ e inoltre

1) $S_i S_j = S_j S_i$ per ogni coppia di sottogruppi in $\mathcal{S}$ e

2) $G = \bigcup_{S_i \in \mathcal{S}} S_i$.

COROLLARIO 1.4. *Il gruppo risolubile (localmente finito) G è relativamente complementato se e solo se è un T -gruppo periodico (risolubile) con i p -sottogruppi di Sylow abeliani elementari per ogni numero primo p , e tale che ogni π -sottogruppo di Sylow di G (π un arbitrario insieme di primi) è immergibile in una π -base completa di Sylow di G .*

Infatti, posto $\pi = \omega(G/G')$, ciò equivale ad ammettere che i π -sottogruppi di Sylow di G sono complementi di G' .

2. La struttura dei T -gruppi risolubili periodici con p -sottogruppi di Sylow abeliani elementari per ogni numero primo p è ben nota [2]: G' è abeliano elementare, di Hall in G e non contiene 2-elementi, G/G'

è elementare, e gli automorfismi indotti dagli elementi di G mediante coniugazione in G' sono automorfismi potenze. Se G è finito queste condizioni sono sufficienti, per il teorema di Schur-Zassenhaus, a garantire in base al teorema 1.2 che G è relativamente complementato: in questo caso quindi si è riottenuta la caratterizzazione di [3].

LEMMA 2.1. *Sia G un T -gruppo risolubile periodico con i p -sottogruppi di Sylow abeliani elementari per ogni numero primo p . Allora $\mathcal{C}_G(G') = G' \times H$, H è un fattore diretto di G e G è relativamente complementato se e solo se G/H è relativamente complementato.*

G' è un sottogruppo di Hall contenuto nel centro di $\mathcal{C}_G(G')$, e quindi $\mathcal{C}_G(G') = G' \times H$. G/G' è abeliano elementare, pertanto $G/G' = \mathcal{C}_G(G')/G' \times K/G'$ da cui $G = (H \times G')K = H \times K$ poichè $H \trianglelefteq G$ e $H \cap K = 1$. Supponiamo ora che (G/H) e quindi K sia relativamente complementato. Per ogni π -sottogruppo di Sylow S di G ($\pi = \omega(G/G')$) $H \trianglelefteq G$ implica $H \leq S$; se T è un π -sottogruppo di Sylow di K contenente $S \cap K$ risulta $G'T = K$, $S = S \cap (K \times H) = (S \cap K) \times H \leq TH$, da cui $S = TH$; quindi $G'S = G'TH = KH = G$, e per l'arbitrarietà di S G è relativamente complementato.

Non è quindi restrittivo supporre, come faremo talora nel seguito, che $G' = \mathcal{C}_G(G')$; il problema, tuttora aperto, è dunque di determinare quali sottogruppi abeliani elementari C del gruppo $P(G')$ degli automorfismi potenze di G' , per i quali $\omega(C) \cap \omega(G') = \emptyset$, siano tali che se $G/G' \cong C$ allora G è relativamente complementato.

PROPOSIZIONE 2.2. *Sia G un T -gruppo risolubile periodico con i p -sottogruppi di Sylow abeliani elementari per ogni numero primo p . G è relativamente complementato se e solo se è relativamente complementato $G/(G' \cap \mathcal{C}_G(g))$ per ogni $g \in G$.*

È sufficiente dimostrare che un arbitrario π -sottogruppo di Sylow S di G ($\pi = \omega(G/G')$) è un complemento di G' . Per un fissato $g \in G$ $G' = [g, G'] \times (G' \cap \mathcal{C}_G(g)) = [g, G'] \times K_g$ per un conveniente sottogruppo K_g di G' e $\langle g \rangle^G = [g, G'] \langle g \rangle$; poichè G/K_g è relativamente complementato per ipotesi e $\langle g \rangle^G S \cong (K_g [g, G'] \langle g \rangle S) / K_g = (G' \langle g \rangle S) / K_g \leq G/K_g$ anche $\langle g \rangle^G S$ è relativamente complementato, da cui $\langle g \rangle^G S = [g, G'] S$ e $g \in G'S$. Ciò vale per ogni $g \in G$ e dunque $G = G'S$, c.v.d.

Poichè G' è il prodotto diretto dei suoi p -sottogruppi di Sylow G'_p , $P(G')$ è il prodotto cartesiano (senza restrizione) dei gruppi $P(G'_p)$ degli automorfismi potenze dei G'_p , cioè $P(G') \cong \times_{p \in \omega(G')} C(p-1)$ dove $C(p-1)$ indica un gruppo ciclico di ordine $p-1$. Pertanto $G/G' = C$ è un sottogruppo periodico elementare di $\times_{p \in \omega(G')} C(p-1)$, $\omega(C) \cap \omega(G') = \emptyset$ e C ha, in generale, la potenza del continuo.

PROPOSIZIONE 2.3. *Sia G un T -gruppo periodico risolubile con i p -sottogruppi di Sylow abeliani elementari. Se, con riferimento alle notazioni precedenti, $G/\mathcal{C}_G(G') = C \leq \prod_{p \in \omega(G')} C(p-1)$ (prodotto diretto ordinario), allora G è relativamente complementato.*

Infatti per ogni $g \in G$ $\omega([g, G'])$ è in questo caso un sottoinsieme finito di $\omega(G')$; il centralizzante di $G'/G' \cap \mathcal{C}_G(g)$ in $G/G' \cap \mathcal{C}_G(g)$ ha quindi indice finito in $G/G' \cap \mathcal{C}_G(g)$: vale in $G/G' \cap \mathcal{C}_G(g)$ il teorema di Schur-Zassenhaus sull'esistenza e il coniugio dei complementi di $G'/G' \cap \mathcal{C}_G(g)$ e dunque $G/G' \cap \mathcal{C}_G(g)$ è relativamente complementato. La conclusione segue ora dalla proposizione 2.2.

ESEMPIO. Si considerino infiniti gruppi non abeliani $H_i = \langle a_i, b_i \rangle$ di ordine $p_i q_i$ con p_i, q_i numeri primi dispari tali che $p_i > q_i$, $|a_i| = p_i$, $|b_i| = q_i$, di ordini a due a due primi tra loro; detto $H = \prod_i H_i$, poniamo $G = \langle z, H \rangle$, dove $z^2 = 1$, $z^{-1} a_i z = a_i^{-1}$, $z^{-1} b_i z = b_i$.

Allora $G' = \prod_i \langle a_i \rangle$ è abeliano elementare di Hall in G e non ha elementi di periodo 2; $C = \langle z, \prod_i \langle b_i \rangle \rangle$ è abeliano elementare e gli automorfismi interni indotti dagli elementi di G subordinano in G' automorfismi potenze, sicchè G è un T -gruppo risolubile periodico a p -sottogruppi di Sylow abeliani elementari per ogni numero primo p . G non è relativamente complementato: infatti il sottogruppo $S = \prod_i \langle a_i b_i \rangle$ è un π -sottogruppo di Sylow di G ($\pi = \omega(G/G')$) che non è un complemento di G' (è sufficiente notare che, per ogni $a \in G'$, $[az, a_i b_i] \neq 1$ non appena $(|a|, p_i) = 1$).

Si osservi che, qualunque sia il numero primo p , ogni p -sottogruppo di Sylow di G è inseribile in una base completa di Sylow di G , in contraddizione con quanto affermato in [1].

BIBLIOGRAFIA

- [1] ABRAMOVSKII I. N., *Sui gruppi il cui reticolo dei sottogruppi è relativamente complementato*, Algebra i Logica Seminar 6 (1967), 1, 5-8.
- [2] ROBINSON D. J. S., *Groups in which normality is a transitive relation*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 60 (1964), 21-38.
- [3] ZACHER G., *Determinazione dei gruppi d'ordine finito relativamente complementati*, Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli, (4) 19 (1952), 200-206.
- [4] ZACHER G. e EMALDI M., *I gruppi risolubili relativamente complementati*, Ricerche di matematica XIV (1965), 1, 1-8.

Manoscritto pervenuto in redazione il 10 luglio 1969.