RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

FEDERICO MENEGAZZO

Gruppi nei quali la relazione di quasi-normalità è transitiva. II

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 42 (1969), p. 389-399

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1969__42__389_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

GRUPPI NEI QUALI LA RELAZIONE DI QUASI-NORMALITÀ È TRANSITIVA. II.

FEDERICO MENEGAZZO *)

Il gruppo G si dice Q-gruppo se la relazione di quasi-normalità per i sottogruppi di G è transitiva, o più precisamente se da $A \subseteq_q B \subseteq_q G$ segue $A \subseteq_q G$ per ogni coppia A, B di sottogruppi di G ([8]; per la nozione di sottogruppo quasi-normale H di un gruppo G, notato $H \subseteq_q G$, e per alcune proprietà dell'insieme dei sottogruppi quasi-normali di un gruppo, vedasi [5], [1]). La presente nota contiene nei teoremi 1.3 e 2.3 una caratterizzazione dei Q-gruppi risolubili misti, nei quali cioè esistono elementi aperiodici ed elementi periodici non identici; in vista dei risultati ottenuti in [8] e [4], è dunque completata la determinazione dei gruppi risolubili aventi la proprietà in questione.

Le notazioni sono quelle usuali della teoria dei gruppi. Se G è un gruppo, G è risolubile (supersolubile) se ogni immagine omomorfa non identica di G possiede un sottogruppo normale abeliano (rispettivamente: ciclico) non identico. Il gruppo G è superiormente (inferiormente) nilpotente se la sua serie centrale ascendente (discendente) termina con G (con il sottogruppo identico). G è un T-gruppo se da $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$ segue $A \trianglelefteq G$. Se G è un gruppo misto, G è « separato » se l'insieme degli elementi periodici di G è un sottogruppo; in caso contrario G è « non separato ».

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca matematici del C.N.R.

Indirizzo dell'Autore: Seminario Matematico, Università, Padova.

1. Il caso « separato ».

È conveniente discutere dapprima alcuni casi particolari.

LEMMA 1.1. *Siano x un elemento ed H un sottogruppo del gruppo G, tali che $G=\langle x, H\rangle$; x sia aperiodico, H un p-gruppo risolubile e normale in G. G è un Q-gruppo se e solo se H è abeliano e x induce su H una potenza $\alpha\equiv 1$ (mod. p) ($\alpha\equiv 1$ (mod. 4) se $p=2$ e $H^4\neq H^2$).*

Se G è un Q-gruppo, $H\lhd G$ è un p-gruppo con proprietà Q; inoltre $A\lhd\lhd H$ implica $A\subseteq_q G$, da cui $A=\langle y, A\rangle\cap H\lhd\langle y, A\rangle$ per ogni elemento aperiodico y di G; H è dunque un T-gruppo risolubile e i sottogruppi subnormali di H sono normali in G. Qualora sia $p\neq 2$, tanto basta per concludere che H è abeliano e che x induce su H una potenza (cioè $x^{-1}hx=h^\alpha$, con α intero p-adico indipendente da $h\in H$); esiste un numero naturale r tale che $\alpha^r\equiv 1$ (mod. p), e per un teorema di Iwasawa ([7], p. 19) $\langle x^r, H\rangle$ è quasi-hamiltoniano. Poichè in G la quasi-normalità è transitiva, per ogni $a\in H$ di ordine p è $\langle x^r a\rangle\subseteq_q G$; si possono quindi scegliere due numeri interi u, v tali che $x^p(x^r a)=(x^r a)^u x^{pv}$ e cioè $x^{p+r}a=x^{ru+pv}a^{u\alpha^{pv}}$, da cui $u\equiv 1$ (mod. p), $v\equiv 1$ (mod. r), $\alpha\equiv\alpha^v\equiv\alpha^{pv}\equiv u\alpha^{pv}\equiv 1$ (mod. p) come volevasi. Sia ora $p=2$, e supponiamo che H non sia abeliano. H non può essere hamiltoniano: infatti in tal caso G sarebbe un gruppo nilpotente e quindi modulare; ma il sottogruppo di torsione dei gruppi modulari misti è abeliano ([7], p. 19). Se poi H fosse un T-gruppo non hamiltoniano [6] sarebbe $H=\langle z, C\rangle$, $C^4=C^2$ e inoltre C abeliano infinito, e $z^{-1}cz=c^{-1}$ per ogni $c\in C$. Per ogni $c\in C$ si ha $\langle x^2, c\rangle\subseteq_q\langle x^2, C\rangle\lhd G$ poichè $\langle x^2, C\rangle$ è quasi-hamiltoniano; ma allora $\langle z\rangle=\langle z, x^2c\rangle\cap H\lhd\langle z, x^2c\rangle$, e quindi $\langle z\rangle\lhd H$, il che è assurdo. Dunque H è abeliano e x induce su H una potenza $\alpha\equiv 1$ (mod. 2); se poi $H^4\neq H^2$ e $\alpha\not\equiv 1$ (mod. 4) il gruppo G/H^4 avrebbe un quoziente diedrale, e quindi non sarebbe un Q-gruppo, contro l'ipotesi, il che stabilisce la necessità della condizione.

Il viceversa è contenuto nel citato teorema di Iwasawa se $p\neq 2$ o se $p=2$, $\alpha\equiv 1$ (mod. 4); possiamo quindi senza restrizione supporre $p=2$, $H^4=H^2$, $\alpha\equiv -1$ (mod. 4). Siano A, B sottogruppi di G tali che $A\subseteq_q B\subseteq_q G$; se A è periodico risulta $A\lhd G$; supponiamo allora $A\not\subseteq H$ e distinguiamo due casi:

i) $A \not\subseteq \langle x^2, H^2\rangle$. È allora $B=\langle z, B\cap H\rangle$ con z aperiodico e tale che, per ogni $h\in H$, $z^{-1}hz=h^\beta$ con $\beta\equiv -1 \pmod 4$. Qualunque sia $h\in H$, da $\langle z\rangle(B\cap H)\subseteq_q\langle z, h\rangle(B\cap H)$ segue $\langle \bar z\rangle\subseteq_q\langle \bar z, \bar h\rangle$ dove il soprassegno indica la classe laterale modulo $\langle z, h\rangle\cap B\cap H$, e poichè $\bar z^{-1}\bar h\bar z\equiv \bar h^{-1}$ (mod. $\langle \bar h^4\rangle$) risulta $\bar h^2=\bar 1$, cioè $h^2\in B$. Lo stesso ragionamento si può fare per A, e quindi $H^2\subseteq A$; ma G/H^2 è abeliano, da cui $A\lhd G$.

ii) $A\subseteq\langle x^2, H^2\rangle$. Per concludere nel senso voluto, è sufficiente dimostrare che i sottogruppi ciclici di $\langle x^2, H^2\rangle$ sono quasi-normali in G, e anzi che risulta $\langle x^{2m}a\rangle\subseteq_q\langle x, a\rangle$ per ogni potenza pari di x e per ogni $a\in H$. Inoltre, poichè $\langle x, a\rangle$ è nilpotente, non è restrittivo supporre $x^{2m}=x^{2^k}$. Il gruppo $\langle x^2, H\rangle$ è quasi-hamiltoniano, e quindi gli intervalli $[\langle x^2, a\rangle/\langle x^{2^k}a\rangle]$ e $[\langle x^2\rangle/\langle x^{2^k}a\rangle\cap\langle x\rangle]$ sono reticolarmente isomorfi; dimostriamo che $\langle x^2, a\rangle$ è l'unico sottogruppo massimo di $\langle x, a\rangle$ contenente $\langle x^{2^k}a\rangle$. Infatti, se r è pari, $\langle x^{2^k}a, x^ra^s\rangle\subseteq\langle x^2, a\rangle$; se r è dispari, posto $\langle a^m\rangle=\langle a\rangle\cap\langle x^{2^k}a, x^ra^s\rangle$, risulta $\langle x^{2^k}a, x^ra^s\rangle=$ $=\langle xa^j, a^m\rangle$ da cui $x^{2^k}a=(xa^j)^ua^{mv}=x^ua^{j(\alpha^{u-1}+\ \dots\ +\alpha+1)+mv}$; ma allora $u=2^k$, $\alpha^{2^k-1}+\ \dots\ +\alpha+1$ è pari, $\langle a^m\rangle=\langle a\rangle$ e quindi $\langle x^{2^k}a, x^ra^s\rangle=$ $=\langle x, a\rangle$. Si può dunque affermare che gli intervalli $[\langle x, a\rangle/\langle x^{2^k}a\rangle]$ e $[\langle x\rangle/\langle x^{2^k}a\rangle\cap\langle x\rangle]$ sono isomorfi; $\langle x^{2^k}a\rangle$ è allora un elemento di Dedekind nel reticolo di $\langle x, a\rangle$ che è un gruppo nilpotente, e in definitiva $\langle x^{2^k}a\rangle\subseteq_q\langle x, a\rangle$, c.v.d.

LEMMA 1.2. *Sia G un gruppo risolubile non abeliano, misto e « separato », e il sottogruppo di torsione T di G sia prodotto diretto dei sottogruppi di Sylow T_p. G è un Q-gruppo se e solo se T e G/T sono abeliani, il rango di G/T è uno, e ogni elemento aperiodico $g\in G$ induce su ogni T_p una potenza $\alpha_p(g)\equiv 1$ (mod. p) ($\alpha_2(g)\equiv 1$ (mod. 4) se $T_2^4\neq T_2^2$).*

Dimostriamo la necessità della condizione. G/T è un Q-gruppo risolubile aperiodico e quindi abeliano ([4], teor. B); inoltre, se $g\in G$ è un arbitrario elemento aperiodico, risulta $\langle g, T_p\rangle\cong\langle g, T\rangle/T_{p'}\trianglelefteq G/T_{p'}$ per ogni sottogruppo di Sylow T_p di T ($T_{p'}$ indica il complemento di T_p in T). $\langle g, T_p\rangle$ è allora un Q-gruppo, e per il lemma 1.1 T_p (e quindi T) è abeliano; inoltre g induce su T_p una potenza $\alpha_p(g)\equiv 1$ (mod. p) ($\alpha_2(g)\equiv 1$ (mod. 4) se $T_2^4\neq T_2^2$). Proviamo ora che se il rango di G/T è maggiore di uno G è abeliano. Qualunque sia $g\in G$ e aperiodico, esiste

in queste ipotesi un elemento aperiodico $h \in G$ tale che $\langle g \rangle \cap \langle h \rangle = 1$. $\langle g^2, T \rangle$ è quasi-hamiltoniano e normale in G; segue che $\langle g^2 \rangle \subseteq_q G$ e che $\langle g^2, h \rangle$ è aperiodico e quindi abeliano. Sia ora x un arbitrario elemento aperiodico di G; se $\langle x \rangle \cap \langle g^2 \rangle = 1$ come sopra $[x, g^2] = 1$. Nel caso contrario $\langle xh \rangle \cap \langle g^2 \rangle = 1$ e ancora $[x, g^2] = 1$: infatti se $x^r \in \langle g^2 \rangle$, $(xh)^s \in \langle g^2 \rangle$ con $r, s \neq 0$, $(xh)^{rs} = x^{rs} h^{rs} t \in \langle g^2 \rangle$, per un opportuno $t \in T$, $h^{rs} t \in \langle g^2 \rangle$ ed è facile vedere che una potenza non identica di h apparterrebbe a $\langle g^2 \rangle$. Ma allora $g^2 \in Z_1(G)$ e, per l'arbitrarietà di g, $G^2 \subseteq Z_1(G)$, da cui G è nilpotente e modulare, e dunque [7] abeliano.

Viceversa, G sia un gruppo soddisfacente la condizione assegnata. Dimostriamo che ogni sottogruppo di G^2 è quasi-normale in G: infatti se $x \in G^2$ è periodico, $\langle x \rangle \lhd G$; se x è aperiodico e y è un qualunque elemento di G, $|\langle y \rangle : \langle x \rangle \cap \langle y \rangle| = 2^t m$ con m dispari; poichè G/T_2 è quasi-hamiltoniano $\langle x, T_2 \rangle \subseteq_q G$ e poichè $G/T_{2'}$ è un Q-gruppo a norma del lemma 1.1 e $xT_{2'} \in (G/T_{2'})^2$, anche $\langle x, T_{2'} \rangle \subseteq_q G$. Segue allora che $|\langle y^{2^t} \rangle : \langle y^{2^t} \rangle \cap \langle x, T_{2'} \rangle| = |\langle y^{2^t}, x, T_{2'} \rangle : \langle x, T_{2'} \rangle|$ è dispari, da cui $\langle y^{2^t}, x, T_{2'} \rangle = \langle z, T_{2'} \rangle$ risulta quasi-hamiltoniano; in particolare $\langle x \rangle \langle y^{2^t} \rangle = \langle y^{2^t} \rangle \langle x \rangle$. Analogamente $|\langle y^m \rangle : \langle y^m \rangle \cap \langle x, T_2 \rangle| = |\langle y^m, x, T_2 \rangle : \langle x, T_2 \rangle|$ è una potenza di 2 e $\langle y^m, x, T_2 \rangle = \langle u, T_2 \rangle$ è un Q-gruppo; ma $x \in \langle u^2, T_2 \rangle$ e quindi $\langle x \rangle \subseteq_q \langle y^m, x, T_2 \rangle$. Risulta dunque $\langle y \rangle \langle x \rangle = \langle y^m \rangle \langle y^{2^t} \rangle \langle x \rangle = \langle y^m \rangle \langle x \rangle \langle y^{2^t} \rangle = \langle x \rangle \langle y^m \rangle \langle y^{2^t} \rangle = \langle x \rangle \langle y \rangle$, come volevasi. Siano ora A, B sottogruppi di G tali che $A \subseteq_q B \subseteq_q G$; senza introdurre restrizioni supponiamo che G non sia quasi-hamiltoniano e che $A \not\subseteq G^2$. Esiste allora $x \in G$ tale che $B \cap \langle x, T_2^2 \rangle \not\subseteq \langle x^2, T_2^2 \rangle$, mentre è $B \cap \langle x, T_2^2 \rangle \subseteq_q \subseteq_q \langle x, T_2^2 \rangle$; e il ragionamento del lemma 1.1 *i*) indica che $T_2^2 \subseteq B$. Analogamente esiste $b \in B$ tale che $A \cap \langle b, T_2^2 \rangle \not\subseteq \langle b^2, T_2^2 \rangle \subseteq B$, e ancora $T_2^2 \subseteq A$; ma G/T_2^2 è un gruppo quasi-hamiltoniano, e dunque $A \subseteq_q G$, c.v.d.

Siamo ora in grado di affrontare il problema, limitatamente ai gruppi « separati », nella sua piena generalità.

TEOREMA 1.3. *Il gruppo G è un Q-gruppo risolubile misto « separato » se e solo se G contiene un sottogruppo periodico L tale che*

a) ogni sottogruppo di L è normale in G;

b) L è di Hall in G, e privo di elementi di periodo 2;

c) G/L *è un gruppo misto, ed è abeliano, oppure gli elementi periodici di* G/L *formano un sottogruppo* T/L *abeliano tale che* G/T *è abeliano di rango* 1, *e ogni elemento di* G/L *induce su ogni sottogruppo di Sylow* $(T/L)_p$ *di* T/L *una potenza* $\alpha_p \equiv 1$ (*mod.* p) ($\alpha_2 \equiv 1$ (*mod.* 4) *se* $(T/L)_2^4 \neq (T/L)_2^2$);

d) nessun elemento aperiodico di G *induce una potenza congrua ad* 1 (*mod.* p) *su di un* p*-gruppo di Sylow non identico di* L.

Sia G un Q-gruppo risolubile misto « separato », con sottogruppo di torsione P. Se P è prodotto diretto dei suoi sottogruppi di Sylow $L=1$ soddisfa le condizioni richieste a norma del lemma 1.2; in caso contrario ([4], teor. *D*) il Q-gruppo risolubile periodico P contiene un sottogruppo N ogni cui sottogruppo è normale in P; inoltre N è di Hall in P e privo di elementi di periodo 2, e P/N è prodotto diretto dei suoi sottogruppi di Sylow. Ogni sottogruppo M di N è quasi-normale in G e, per ogni elemento aperiodico $x \in G$, $M = \langle x, M \rangle \cap P \lhd \langle x, M \rangle$, da cui $M \trianglelefteq G$. Sia allora L il sottogruppo di N riunione dei sottogruppi di Sylow di N che non sono fattori diretti di P; L soddisfa *a*) e *b*), P/L è ancora prodotto diretto dei suoi sottogruppi di Sylow, e un'applicazione del lemma 1.2 a G/L prova *c*). Supponiamo ora, in contraddizione con *d*), che esista un elemento aperiodico $g \in G$ inducente una potenza congrua ad 1 (mod. p) sul p-sottogruppo di Sylow non identico S di L. $h = g^2$ gode della stessa proprietà; poichè $hL \in (G/L)^2$ risulta $\langle h, L \rangle \subseteq_q G$ e ancora, se R è il complementare di S in L, $\langle h, S \rangle \cong \langle h, L \rangle / R$ è un gruppo quasi-hamiltoniano. Ma allora, qualunque sia $s \in S$, $\langle hs, R \rangle \subseteq_q G$ e, se $x \in P$, $\langle x, hs, R \rangle \cap P = \langle x \rangle (\langle hs, R \rangle \cap P) = \langle x, R \rangle \lhd \langle x, hs, R \rangle$, da cui $S \subseteq \mathfrak{N}_G(\langle x, R \rangle)$. Quindi se $(|x|, p) = 1$ $[x, s] \in S \cap \langle x, R \rangle = 1$ perchè $\langle x, R \rangle$ non contiene p-elementi, mentre se $|x|$ è una potenza di p la stessa conclusione si ottiene per la commutatività di S. In definitiva S è contenuto nel centro del gruppo localmente finito P, e dunque ne è un fattore diretto, contro l'ipotesi fatta su L; ed L soddisfa *d*).

Dimostriamo che la condizione è sufficiente. Per *a*) e *b*) L è abeliano, G/L è metabeliano per *c*) e quindi G è risolubile; G è misto per *c*) ed è evidentemente « separato » con sottogruppo di torsione T; inoltre T è un Q-gruppo ([4], teor. *D*). Siano poi A, B sottogruppi di G tali che $A \subseteq_q B \subseteq_q G$; poichè $A \cap L \lhd G$ (il che ci permette di

supporre $A \not\subseteq L$) risulta $A/A \cap L \subseteq_q B/A \cap L \subseteq_q G/A \cap L$. Se $A \subseteq T$ da $A \subseteq_q B \cap T \subseteq_q T$ segue $A \subseteq_q T$, da cui $A/A \cap L \subseteq_q T/A \cap L$; in particolare $A/A \cap L$ è quasi-normale e di Hall (e quindi caratteristico) in $AL/A \cap L$ che è normale in $G/A \cap L$, e anche in questo caso $A \lhd G$. Non è dunque restrittivo supporre che A, e quindi B, contenga un elemento aperiodico a; dimostriamo che in queste ipotesi $L \subseteq A$. Infatti, sia S il sottogruppo di Sylow di L relativo ad un certo numero primo p, e sia $s \in S$ un elemento d'ordine p tale che $s \notin B$; $s \in \mathfrak{C}_G(B)$, quindi $[s, a] \in \langle s \rangle \cap B = 1$, e a induce su S una potenza $\alpha \equiv 1 \pmod{p}$ in contraddizione con d); dunque $S \subseteq B$. Ma $A \subseteq_q B$ e per il medesimo ragionamento anche $A \supseteq S$, da cui la conclusione per l'arbitrarietà di S, e $A/L \subseteq_q B/L \subseteq_q G/L$, in vista del fatto che G/L è un Q-gruppo per il lemma 1.2, porge $A \subseteq_q G$, c.v.d.

2. Il caso « non separato ».

Per la determinazione dei Q-gruppi di questo tipo sarà utile la seguente generalizzazione della proposizione 3.2 di [4].

LEMMA 2.1. *Sia G un gruppo inferiormente nilpotente. Se G è un Q-gruppo, ogni sottogruppo di G è quasi-normale in G.*

Detto Γ_α il termine α-esimo della serie centrale discendente di G, proviamo per induzione transfinita che G/Γ_α gode della proprietà enunciata. Se $\alpha = 1$ la cosa è ovvia; se poi α ammette un precedente $\alpha - 1$, tutti i sottogruppi di $G/\Gamma_{\alpha-1}$ risultano quasi-normali in $G/\Gamma_{\alpha-1}$, e per ogni $x \in G$ $\langle x, \Gamma_{\alpha-1} \rangle / \Gamma_\alpha = \langle x\Gamma_\alpha \rangle (\Gamma_{\alpha-1}/\Gamma_\alpha)$ è un gruppo abeliano in quanto il quoziente sopra il suo centro è ciclico; di qui segue $\langle x, \Gamma_\alpha \rangle \lhd \langle x, \Gamma_{\alpha-1} \rangle \subseteq_q G$, da cui $\langle x, \Gamma_\alpha \rangle \subseteq_q G$, come volevasi. Sia allora α un ordinale limite, e siano a, b due elementi di G tali che $a\Gamma_\alpha$ e $b\Gamma_\alpha$ risultino periodici in G/Γ_α. Per ogni $\beta \leq \alpha$ definiamo il sottogruppo $H_\beta = \langle a, \Gamma_\beta \rangle$; se $\beta < \alpha$ $H_\beta \subseteq_q G$ per l'ipotesi induttiva, e inoltre risulta $H_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} H_\beta$: infatti, se $x \in \bigcap_{\beta<\alpha} H_\beta$ e $\langle a \rangle \cap \Gamma_\alpha = \langle a^u \rangle$ con $u \geq 0$ e minimo, per ogni $\beta < \alpha$ esistono $h_\beta \in \Gamma_\beta$ e un numero intero r_β soddisfacente alla $0 \leq r_\beta < u$, tali che $x = h_\beta a^{r_\beta}$; ed inoltre esiste $\gamma < \alpha$ tale che $\gamma < \beta \leq \alpha$ implica $\langle a \rangle \cap \Gamma_\beta = \langle a \rangle \cap \Gamma_\alpha$. Ma allora se $\alpha > \beta' > \beta > \gamma$ da $x = h_\beta a^{r_\beta} = h_{\beta'} a^{r_{\beta'}}$ (con evidente significato dei simboli) segue $a^{r_{\beta'}} = a^{r_\beta}$, $h_{\beta'} = h_\beta$

e in definitiva $h_\beta \in \bigcap_{\beta'<\alpha} \Gamma_{\beta'} = \Gamma_\alpha$, e cioè $x \in \langle a, \Gamma_\alpha \rangle = H_\alpha$. Per [4], prop. 3.1 si ha quindi $H_\alpha \subseteq_q \langle b, H_\alpha \rangle$, da cui $\langle a\Gamma_\alpha \rangle \subseteq_q \langle a\Gamma_\alpha, b\Gamma_\alpha \rangle$; quest'ultimo gruppo è pertanto periodico e dunque, attesa l'arbitrarietà di $a\Gamma_\alpha$ e $b\Gamma_\alpha$, gli elementi periodici di G/Γ_α costituiscono un sottogruppo; ricordando la proposizione 3.2 di [4] si ottiene la conclusione desiderata.

Il risultato che segue modifica, adattandolo ad una situazione particolare, un noto teorema di Černikov ([3], II, p. 234).

LEMMA 2.2. *Sia G un gruppo superiormente nilpotente, e sia T il sottogruppo degli elementi periodici di G. Se il sottogruppo di Sylow S di G relativo al numero primo p è abeliano e $(G/T)^p = G/T$, allora S è nel centro di G.*

Sia a un arbitrario elemento di S, e sia α il minimo ordinale tale che $a \in Z_\alpha(G)$ dove $Z_\alpha(G)$ è il termine α-esimo della serie centrale ascendente di G; la dimostrazione è per induzione su α. Se $\alpha = 1$ $a \in Z_1(G)$ e non c'è niente da dimostrare; supponiamo che α ammetta un precedente $\alpha - 1$; per ogni $x \in G$ $[x, a] \in S \cap Z_{\alpha-1}(G)$ e per l'ipotesi induttiva $[x, a] \in Z_1(G)$; ne consegue che $a \in Z_2(G)$ e $\langle x, a \rangle$ è nilpotente di classe al più 2, da cui $[x^{p^n}, a] = [x, a^{p^n}] = 1$ se $p^n = |a|$. Ma ogni elemento $g \in G$ si può rappresentare come prodotto $g = x_1^{p^n} \dots x_r^{p^n} t$ con $t \in T$, e poichè $S \subseteq Z_1(T)$ risulta $[g, a] = 1$, come volevasi. Se poi α non ha precedente ma $Z_\alpha(G) = \bigcup_{\beta<\alpha} Z_\beta(G)$ risulta $a \in Z_\beta(G)$ per un certo $\beta < \alpha$ e ancora $a \in Z_1(G)$ per l'ipotesi induttiva.

Dimostriamo ora il teorema centrale di questa sezione, contenente una caratterizzazione dei Q-gruppi risolubili « non separati ».

TEOREMA 2.3 *Il gruppo G è un Q-gruppo risolubile misto « non separato » se e solo se G contiene un sottogruppo abeliano C di indice 2 in G tale che $G = \langle z, C \rangle$, $C = A \times B$ con A gruppo abeliano misto 2-divisibile, B 2-gruppo limitato, z 2-elemento, $z^{-1}az = a^{-1}$ per ogni $a \in A$ e inoltre*

1) *$z^2 = 1$, B elementare, $z^{-1}bz = b$ $\forall b \in B$; oppure*

2) *$z^2 \neq 1$, $\langle z \rangle \cap A = 1$, $B = B_1 \times B_2 \times B_3$, $B_1 = \langle z^2 \rangle$, B_2 elementare, $B_3 = \langle b_3 \rangle$ ciclico di ordine 2, $z^{-1}bz = b$ $\forall b \in B_1 \times B_2$, $z^{-1}b_3 z \equiv b_3$ (mod. $\langle z^4 \rangle$); oppure*

3) $z^2 \neq 1$, $B = B_1 \times B_2$, B_1 *elementare*, $B_2 = \langle b_2 \rangle$ *ciclico di ordine* 4, $z^2 = b_2^2$, $z^{-1}bz = b$ $\forall b \in B_1$, $z^{-1}b_2 z = b_2^{-1}$; *o infine*

4) $z^2 \neq 1$, $B = B_1 \times B_2$, B_1 *elementare*, $B_2 = \langle b_2 \rangle$ *ciclico di ordine* 2, $z^2 = ab_2$ $(a \in A)$, $z^4 = a^2$, $z^8 = 1$, $z^{-1}bz = b$ $\forall b \in B_1$, $z^{-1}b_2 z = z^4 b_2$.

Iniziamo dimostrando che la condizione è necessaria. Consideriamo il sottogruppo K del Q-gruppo G intersezione di tutti i termini della serie centrale discendente di G: $K = \bigcap_\alpha \Gamma_\alpha(G)$. Ogni sottogruppo di G/K è quasi-normale in G/K (lemma 2.1); in particolare gli elementi periodici di G/K sono un sottogruppo, e se K fosse periodico G sarebbe « separato » contro l'ipotesi. Quindi K contiene degli elementi aperiodici; inoltre $K^2 = K$: infatti se $a \in K$, $a \notin K^2$, poichè K/K^2 è abeliano, risulterebbe $\langle aK^2 \rangle \subseteq_q G/K^2$ e quindi ([4], prop. 1.1.) $aK \in Z_2(G/K^2)$ e G/K^2 sarebbe inferiormente nilpotente, da cui $K^2 = K$. Poichè G è supersolubile ([4], teor. *A*) K è un Q-gruppo superiormente nilpotente e per il lemma 1.2, tenendo conto del fatto che $K^2 = K$, ogni sottogruppo di K è quasi-normale (in K e quindi) in G; indicato con P il sottogruppo degli elementi periodici di K, poniamo $C/P = \mathfrak{C}_{G/P}(K/P)$. K/P è un sottogruppo normale aperiodico, e quindi abeliano, di G/P; ne consegue ([4], prop. 1.2) che $|G : C| \leq 2$ e ogni elemento di G/P induce su K/P l'identità o l'inversione. C è « separato »: infatti, qualunque sia l'elemento periodico $a \in C$, e per un arbitrario elemento aperiodico $k \in K$, $\langle k \rangle \subseteq_q G$ implica $a^{-1}ka = k^r a^s = kb$ con $b \in P$, r, s numeri interi opportuni; ma $\langle b \rangle \subseteq_q G$, da cui $\langle a, b \rangle$ è un sottogruppo periodico; e quindi $k^{r-1} = 1$, $k \in \mathfrak{T}_G(\langle a \rangle)$. Per l'arbitrarietà di k, e poichè K è generato dai suoi elementi aperiodici, risulta $\langle a \rangle \lhd \langle a, K \rangle \subseteq_q G$, $\langle a \rangle \subseteq_q G$: tutti i sottogruppi periodici di C sono quasi-normali in G, da cui in particolare si conclude che gli elementi periodici di C sono un sottogruppo T che è il prodotto diretto dei suoi sottogruppi di Sylow. Quindi $G \neq C$, $|G : C| = 2$, $G = \langle z, C \rangle$ dove z è un opportuno 2-elemento, $z^{-1}cz \equiv c^{-1} \pmod{T}$ per ogni $c \in C$, e inoltre $(C/T)^2 = C/T$ perchè in caso contrario G avrebbe un quoziente diedrale. C è un Q-gruppo e per il lemma 1.2 C è abeliano oppure il rango di G/T è 1 e T è abeliano; inoltre il lemma 2.2 assicura che il 2-Sylow-gruppo di T è contenuto nel centro di C: ma allora ogni sottogruppo di C è quasi-normale in C, e anzi in G (lemma 1.2 e [7], p. 21); in particolare $\langle z^2 \rangle \subseteq Z_1(G)$. Dimostriamo ora che C è abeliano, supponendo dapprima $z^2 = 1$. In questo caso, sia x

un qualunque elemento aperiodico di C: da $\langle x\rangle \lhd \langle z, x\rangle$ e $z^{-1}xz = x^{-1}t$ per un opportuno $t \in T$ risulta $z^{-1}xz = x^{-1}$, e questo per ogni tale $x \in C$. Pertanto, comunque si scelgano $a \in T$, $b \in C$, $b \notin T$, si ha $z^{-1}bz = b^{-1}$, $z^{-1}baz = b^{-1}z^{-1}az = a^{-1}b^{-1}$ e cioè $bab^{-1} = z^{-1}a^{-1}z$, e anzi $b^2ab^{-2} = z^{-2}az^2 = a$; e poichè ogni elemento aperiodico $c \in C$ si può scrivere nella forma $c = b^2t$ con $t \in T$, ne segue per l'abelianità di T $c^{-1}yc = y$ per ogni $y \in T$ e quindi $T \subseteq Z_1(C) : C$ è dunque un gruppo localmente ciclico sopra il suo centro, e quindi abeliano. In generale allora $C/\langle z^2\rangle$ è abeliano, il 2-gruppo di Sylow di T è contenuto nel centro di C, e per ogni p-Sylow-gruppo S di T con $p \neq 2$ risulta $[c, S] \subseteq S \cap \langle z^2\rangle = 1$ qualunque sia $c \in C$, e ancora $T \subseteq Z_1(C)$ e C è abeliano. Nelle considerazioni precedenti è implicito che z induce su $C/\langle z^2\rangle$ l'inversione, e quindi $(C/\langle z^2\rangle)^4 = (C/\langle z^2\rangle)^2$, da cui $C/\langle z^2\rangle = \bar{A} \times \bar{B}$ con $\bar{A}^2 = A$, $\bar{B}^2 = \bar{1}$, altrimenti G avrebbe un quoziente diedrale. La parte ridotta B del 2-sottogruppo di Sylow di C è limitata, in quanto $\langle B, z^2\rangle/\langle z^2\rangle$ è isomorfo ad un sottogruppo di $\bar{B}$; B è allora un fattore diretto di C ([2], teor. 50.3), e il suo complementare A è un gruppo 2-divisibile. Se $z^2 = 1$ non c'è più niente da dimostrare; supponiamo $z^2 \neq 1$ e distinguiamo due casi:

i) $\langle z\rangle \cap A \neq 1$. Ovviamente $B \cap \langle z^2\rangle = 1$, da cui $B \cong \bar{B}$ è elementare; se $z^4 = 1$ si ha $z^{-1}bz = b$ per ogni $b \in B$ (in caso contrario $\langle b\rangle$ non sarebbe quasi-normale in $\langle b, z\rangle$), mentre se $z^4 \neq 1$ risulta $B = B_1 \times B_2$, $z^{-1}bz = b$ per ogni $b \in B_1$, $B_2 = \langle b_2\rangle$, $z^2 = ab_2$ con $a \in A$, $z^{-1}b_2z = b_2z^4$ e $z^8 = 1$.

ii) $\langle z\rangle \cap A = 1$. Scegliendo B in maniera opportuna si può supporre $z^2 \in B$; poichè B è limitato risulta $B = H \times K$, con $H^2 = 1$ e K prodotto diretto di gruppi ciclici di ordine ≥ 4. Se $K = 1$ $z^4 = 1$ e come sopra $z^{-1}bz = b$ per ogni $b \in B$; se $K \neq 1$ sia $k \in K$ un elemento d'ordine 2: per un conveniente $l \in K$ è $k = l^2$, e da $B^2 \subseteq \langle z^2\rangle$ segue che k è l'unico elemento di $\langle z^2\rangle$ che abbia ordine 2, e quindi K è ciclico e normale in G. Consideriamo ora il gruppo $\langle z, K\rangle$: se esso possiede un elemento u di periodo 2 non contenuto in K, è $G = \langle u, C\rangle$ e siamo ricondotti ad un caso studiato in precedenza; anzi, per quanto visto sopra, sarebbe $B^2 = 1$ in contraddizione con $K \neq 1$. Quindi $\langle z, K\rangle$ ha un solo elemento di periodo 2, ed è ciclico, nel qual caso $H = B_1 \times B_2$, $z^{-1}bz = b$ per ogni $b \in B_1$, $B_2 = \langle b_2\rangle$, $z^{-1}b_2z = b_2z^{2^{n-1}}$ se $2^n = |z|$, oppure $\langle z, K\rangle$ è isomorfo

al gruppo dei quaternioni, $z^4=1$ e $z^{-1}bz=b$ per ogni $b\in H$, il che conclude la dimostrazione che la condizione assegnata è necessaria.

Per quanto riguarda la sufficienza, osserviamo dapprima che i sottogruppi di C sono quasi-normali in G: infatti se $c\in A$, $\langle c\rangle \lhd G$; se $\langle c\rangle \cap A=1$ non è restrittivo supporre $c\in B$, e se $x\in C$ $xc=cx$ mentre se $x\notin C$ risulta $\langle x, B\rangle \cong G/A$ che è un 2-gruppo modulare, e ancora $\langle x\rangle\langle c\rangle=\langle c\rangle\langle x\rangle$; se $c\notin A$ ma $\langle c\rangle \cap A\neq 1$ $\langle c\rangle \cap A \lhd G$, e la conclusione si ottiene ripetendo il ragionamento precedente in $G/A\cap\langle c\rangle$. Siano ora H, K sottogruppi di G tali che $H\subseteq_q K\subseteq_q G$: dimostriamo che $H\subseteq_q G$. Se $H\subseteq C$ l'affermazione è già stata provata; se $H\not\subseteq C$ si può senz'altro supporre $z\in H$. Ma in questo caso per ogni $c\in A$ risulta $z(zc)=(zc)^r k$ con r numero intero e $k\in K$ convenienti, e cioè $z^2c=z^{2s}k$, da cui $c\in K$, se $r=2s$ è pari, e $z^2c=z^{2s+1}ck$, da cui $cz^2=c^{-1}z^{2s+1}k$ e $c^2\in K$, se $r=2s+1$ è dispari; e in ogni caso $A^2=A\subseteq K$. Con la stessa tecnica si dimostra che $A\subseteq H$ e in definitiva $H\subseteq_q G$ per la modularità di G/A.

3. Osservazioni finali.

È noto [8] che per un gruppo finito G sono equivalenti le due condizioni

M l'insieme $s(G)$ dei sottogruppi subnormali di G coincide con l'insieme $q(G)$ dei sottogruppi quasi-normali;

Q la relazione di quasi-normalità per i sottogruppi di G è transitiva.

Tale equivalenza è ancora vera se G è un gruppo risolubile periodico: infatti nel corso della dimostrazione del teorema D in [4] si è implicitamente provato che Q implica M, mentre l'implicazione inversa si dimostra osservando che tutti i teoremi di [4] rimangono validi qualora negli enunciati (e nelle dimostrazioni) alla locuzione « Q-gruppo » si sostituisca « gruppo verificante M », ad eccezione della proposizione 3.2 nella quale occorre aggiungere l'ipotesi che G sia periodico. Così pure avviene se G è un gruppo risolubile aperiodico, per motivi analoghi. Per i gruppi risolubili misti, invece, Q non implica, in generale, M, come dimostra l'esempio seguente: sia H un p-gruppo abeliano divisibile ($p\neq 2$), $G=\langle x, H\rangle$ con $xhx^{-1}=h^\alpha$ per ogni $h\in H$, α intero p-adico non identico, $\alpha\equiv 1$ (mod. p). G è un Q-gruppo, anzi un gruppo quasi-

hamiltoniano; in particolare $\langle x\rangle \subseteq_q G$. D'altra parte, per ogni $h \in H$, $[x^{-1}, h^{-1}] = h^{\alpha-1} \in \langle x\rangle^G$ e nelle nostre ipotesi $\langle x\rangle^G \supseteq \langle x, H^{\alpha-1}\rangle = \langle x, H\rangle = G$, e quindi $\langle x\rangle$ non è un sottogruppo subnormale di G. E nemmeno, in generale, M implica Q: infatti sia G come nell'esempio precedente, salvo che α è aperiodico e $\alpha \not\equiv 1 \pmod{p}$; G soddisfa M perchè, come è agevole dimostrare in modo sostanzialmente simile alla prima parte del lemma 1.1, i sottogruppi quasi-normali di G sono contenuti in H o lo contengono, e sono quindi normali in G, al pari di quelli subnormali (in particolare G è un T-gruppo); ma segue dal lemma 1.1 che G non è un Q-gruppo. Il problema della determinazione dei gruppi risolubili soddisfacenti la condizione M rimane dunque, nel caso dei gruppi misti, ancora aperto.

BIBLIOGRAFIA

[1] DESKINS W. E.: *On quasi-normal subgroups of finite groups*, Math. Z. 28 (1963), 140-152.

[2] FUCHS L.: *Abelian groups*, Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences, 1958.

[3] KUROSH A. G.: *The theory of groups*, Chelsea, 1956.

[4] MENEGAZZO F.: *Gruppi nei quali la relazione di quasi-normalità è transitiva*, Rend. Sem. Mat. Padova, XL (1968), 1-15.

[5] ORE O.: *Contribution to the theory of groups*, Duke Math. J. 5 (1939), 431-460.

[6] ROBINSON D. J. S.: *Groups in which normality is a transitive relation*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 60, part 1 (1964).

[7] SUZUKI M.: *Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups*, Erg. der Math. und ihrer Grenzgebiete, Heft 10, Springer Verlag, Berlin (1956).

[8] ZACHER G.: *I gruppi risolubili finiti in cui i sottogruppi di composizione coincidono con i sottogruppi quasi-normali*, Rend. Accad. naz. Lincei Cl. scienze, s. VIII, vol. XXXVII, fasc. 3-4 (1964).

Manoscritto pervenuto in redazione il 1° settembre 1968.