

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

BERNHARD AMBERG

Gruppentheoretische Eigenschaften und Normalisatorbedingungen

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 41 (1968), p. 97-118

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1968__41__97_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

GRUPPENTHEORETISCHE EIGENSCHAFTEN UND NORMALISATORBEDINGUNGEN

BERNHARD AMBERG *)

Die Begriffe der hyperabelschen, der hyperzyklischen und der hyperzentralen Gruppen lassen sich durch die folgenden Definitionen verallgemeinern :

Ist θ eine Klasse von geordneten Paaren $(\mathfrak{c}, \mathfrak{f})$ gruppentheoretischer Eigenschaften $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{f}$, so heisst der Normalteiler N der Gruppe G ein θ -Normalteiler von G , in Zeichen $N\theta G$, wenn es ein Element $(\mathfrak{c}, \mathfrak{f})$ in θ gibt derart, dass N eine $\mathfrak{c}$ -Gruppe und $G/\mathfrak{c}_G N$ eine $\mathfrak{f}$ -Gruppe ist. Die Gruppe G heisst hyper- θ -Gruppe, wenn jedes von 1 verschiedene epimorphe Bild von G einen von 1 verschiedenen θ -Normalteiler besitzt.

Die Klasse θ bestehe nun insbesondere aus nur einem Element. Ferner sei $\mathfrak{u}$ die universelle Eigenschaft, Gruppe zu sein. Ist $\mathfrak{a}$ die Klasse der abelschen Gruppen, so ist hyper- $(\mathfrak{a}, \mathfrak{u})$ die Klasse der hyperabelschen Gruppen ; ist $\mathfrak{z}$ die Klasse der zyklischen Gruppen, so ist hyper- $(\mathfrak{z}, \mathfrak{u})$ die Klasse der hyperzyklischen Gruppen ; ist $\mathfrak{t}$ die triviale Gruppenklasse, so ist hyper- $(\mathfrak{u}, \mathfrak{t})$ die Klasse der hyperzentralen Gruppen.

Hyperabelsche, hyperzyklische und hyperzentrale Gruppen lassen sich — unter Voraussetzung gewisser Endlichkeitsbedingungen — durch Forderungen charakterisieren, dass Untergruppen in irgendeinem Sinn « häufig » von ihrem Normalisator verschieden sind [vgl.

*) Indirizzo dell'A.: Mathematisches Seminar der Universität, 6 Frankfurt am Main, Robert-Mayer-Strasse 6-8.

R. BAER [4] und [5], B. I. PLOTKIN und K. A. HIRSCH]. Diese Tatsachen legen die Aufgabe nahe, die von einer gegebenen Klasse θ von geordneten Paaren gruppentheoretischer Eigenschaften abgeleitete Eigenschaft hyper- θ durch ähnliche «Normalisatorbedingungen» zu charakterisieren.

An die Klasse θ wird im allgemeinen die folgende Forderung gestellt:

(*) Ist $(\mathfrak{c}, \mathfrak{f})$ ein Element aus θ , so sind Faktoren von $\mathfrak{c}$ -Gruppen bzw. $\mathfrak{f}$ -Gruppen selber $\mathfrak{c}$ -Gruppen bzw. $\mathfrak{f}$ -Gruppen.

Der folgende Satz enthält eine Charakterisierung von hyper- θ -Gruppen, die der Maximalbedingung für Untergruppen genügen.

SATZ: Genügt die Klasse θ der Forderung (*), sind alle zyklischen Gruppen hyper- θ -Gruppen, sind Erweiterungen von hyper- θ -Gruppen durch hyper- θ -Gruppen selber hyper- θ -Gruppen, besitzt die Gruppe G eine maximale hyper- θ -Untergruppe, so ist G dann und nur dann eine hyper- θ -Gruppe, wenn gilt:

(+) Ist $X = \mathfrak{n}_G X$ eine echte Untergruppe von G , so gibt es eine Untergruppe Y von G mit

$$Y^X = Y, \quad X_{XY} \subseteq Y \not\subseteq X, \quad Y/X_{XY} \theta XY/X_{XY}.$$

(vgl. Satz 2.1).

Ähnliche Kriterien kann man für artinsche Gruppen (= Gruppen mit Minimalbedingung für Untergruppen) beweisen (vgl. Satz 3.1 und Folgerung 3.6). Die in diesen Sätzen enthaltenen Voraussetzungen an die Klasse θ können für artinsche und auflösbare Gruppen erheblich abgeschwächt werden. Hier gilt der

SATZ: Genügt die Klasse θ der Forderung (*), sind zyklische Gruppen von Primzahlordnung hyper- θ -Gruppen, sind hyper- θ -Gruppen auflösbar, so ist die artinsche Gruppe G dann und nur dann eine hyper- θ -Gruppe, wenn gilt:

Ist die maximale Untergruppe X der Untergruppe U von G kein Normalteiler von U , so gibt es einen Normalteiler Y von U

mit den folgenden Eigenschaften :

$$U = XY, \quad X_U \subseteq Y, \quad Y/X_U \theta U/X_U.$$

(vgl. Satz 3.8).

Es konnte nicht entschieden werden, inwieweit die in diesen Sätzen enthaltenen Voraussetzungen an die Klasse θ abschwächbar sind. Es lässt sich aber zeigen, dass unter der Voraussetzung (*) eine Gruppe G dann und nur dann eine hyper- θ -Gruppe ist, wenn sie einer Verschärfung der Bedingung (+) genügt (vgl. Satz 1.8).

Diese Arbeit ist auf Anregung von Herrn Professor Dr. Reinhold Baer entstanden. Ihm und Herrn Privatdozent Dr. Otto Kegel danke ich herzlich für ihre Unterstützung.

BEZEICHNUNGEN

- $\{...\}$ = von den eingeschlossenen Elementemengen erzeugte Untergruppe
 - $n_Y X$ = Normalisator der Untergruppe X der Gruppe Y in Y
 - $c_Y X$ = Zentralisator von X in Y
 - X^Y = Menge aller x^y mit x aus X , y aus Y
 - X_Y = Produkt aller in X enthaltenen Normalteiler von Y
 - $X \subset Y$ = X ist echte Untergruppe von Y
 - $|Y:X|$ = Index von X in Y
 - $X \circ M$ = Menge aller $x^{-1} m^{-1} x m$ mit x aus X , m aus der Teilmenge M von Y
 - ΦY = Frattiniuntergruppe von Y
 - $A \times B$ = Direktes Produkt der Gruppen A und B
 - Faktor = epimorphes Bild einer Untergruppe
 - auflösbare Gruppe = Gruppe, deren Ableitungen fast alle trivial sind
 - fastabelsche Gruppe = Gruppe, die einen abelschen Normalteiler mit endlichem Index enthält
 - artinsche Gruppe = Gruppe mit Minimalbedingung für Untergruppen
 - ϵ -Gruppe = Gruppe mit der Eigenschaft ϵ
- Die Eigenschaft ϵ vererbt sich auf Untergruppen [Normalteiler/epimorphe Bilder], wenn Untergruppen [Normalteiler/epimorphe Bilder] von ϵ -Gruppen selber ϵ -Gruppen sind.

1. Es sei θ eine Klasse von geordneten Paaren $(\mathfrak{e}, \mathfrak{f})$ gruppentheoretischer Eigenschaften $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{f}$. Die Klasse aller gruppentheoretischen Eigenschaften $\mathfrak{e}$, für die es eine gruppentheoretische Eigenschaft $\mathfrak{f}$ gibt, so dass $(\mathfrak{e}, \mathfrak{f})$ aus θ ist, heisst *erste Komponente* θ_1 von θ . Entsprechend ist die *zweite Komponente* θ_2 von θ definiert. Eine Komponente θ_i von θ hat die Eigenschaft $\mathfrak{w}$ oder erfüllt die Aussage $\mathfrak{W}$, wenn jedes $\mathfrak{e}$ in θ_i die Eigenschaft $\mathfrak{w}$ hat oder die Aussage $\mathfrak{W}$ erfüllt. Zum Beispiel vererbt sich θ_i auf Untergruppen [epimorphe Bilder], wenn für jedes $\mathfrak{e}$ in θ_i Untergruppen [epimorphe Bilder] von $\mathfrak{e}$ -Gruppen selber $\mathfrak{e}$ -Gruppen sind. Ebenso hat θ die Eigenschaft $\mathfrak{w}$ oder erfüllt die Aussage $\mathfrak{W}$, wenn dies von den beiden Komponenten von θ gilt.

Der Normalteiler N der Gruppe G heisst θ -Normalteiler von G , in Zeichen $N\theta G$, wenn es ein Paar $(\mathfrak{e}, \mathfrak{f})$ in θ mit folgenden Eigenschaften gibt:

- (a) N ist eine $\mathfrak{e}$ -Gruppe,
- (b) $G/\mathfrak{c}_G N$ ist eine $\mathfrak{f}$ -Gruppe.

Es ist klar, dass $G/\mathfrak{c}_G N$ im wesentlichen mit der von G in N induzierten Automorphismengruppe übereinstimmt. Die Gruppe G heisst θ -Gruppe, wenn $G\theta G$ gilt.

LEMMA 1.1: Es seien N, M, K Normalteiler der Gruppe G mit $M \subseteq K$.

(a) Ist $K \subseteq N$, so ist dann und nur dann $N/K \theta G/K$, wenn $(N/M)/(K/M) \theta (G/M)/(K/M)$ gilt.

Es ist dann und nur dann $NM/M \theta G/M$, wenn $N/(N \cap M) \theta G/(N \cap M)$ gilt.

(b) Vererbt sich θ auf epimorphe Bilder, so folgt aus $N\theta G$, dass auch $NM/M \theta G/M$ gilt.

(c) Vererbt sich die zweite Komponente von θ auf Untergruppen und ist U eine N enthaltende Untergruppe von G , so folgt aus $N\theta G$, dass auch $N\theta U$ gilt.

(d) Vererbt sich die erste Komponente von θ auf Normalteiler und die zweite Komponente von θ auf Faktoren, so folgt für jeden in N enthaltenen Normalteiler L der Untergruppe U von G aus $N\theta G$, dass auch $L\theta U$ gilt.

(e) *Vererbt sich die erste Komponente von θ auf Faktoren und die zweite Komponente von θ auf epimorphe Bilder, so folgt aus $N\theta G$ für zwei in N enthaltene Normalteiler R und S von G , dass auch $RS/S\theta G/S$ gilt.*

BEWEIS: Sind X und Y Normalteiler der Gruppe G mit $X \subseteq Y$, so versteht man unter dem Kommutatorquotienten $X \div Y$ von X und Y die Menge aller Elemente g aus G , für die $Y \circ g \subseteq X$ gilt. $X \div Y$ ist ein Normalteiler von G , und es ist $(X \div Y)/X = \mathfrak{C}_{G/X}(Y/X)$, so dass $G/(X \div Y)$ im wesentlichen mit der von G/X in Y/X induzierten Automorphismengruppe übereinstimmt.

(a): Es ist N/K genau dann eine $\mathfrak{e}$ -Gruppe, wenn $(N/M)/(K/M)$ eine $\mathfrak{e}$ -Gruppe ist. Da der Normalteiler M von G in N und K enthalten ist, ist $(K \div N)/M = (K/M) \div (N/M)$ und damit

$$G/(K \div N) \simeq (G/M)/((K \div N)/M) = (G/M)/((K/M) \div (N/M)),$$

so dass die von G/K in N/K induzierte Automorphismengruppe zu der von $(G/M)/(K/M)$ in $(N/M)/(K/M)$ induzierten Automorphismengruppe isomorph ist. Hieraus folgt die erste Behauptung von (a).

Es ist genau dann NM/M eine $\mathfrak{e}$ -Gruppe, wenn $N/(N \cap M)$ eine $\mathfrak{e}$ -Gruppe ist. Ferner ist $M \div NM = (N \cap M) \div N$ und damit

$$G/(M \div NM) = G/((N \cap M) \div N),$$

so dass die von G/M in NM/M induzierte Automorphismengruppe im wesentlichen mit der von $G/(N \cap M)$ in $N/(N \cap M)$ induzierten Automorphismengruppe übereinstimmt.

Für das folgende sei $N\theta G$ vorausgesetzt. Dann gibt es also ein Paar $(\mathfrak{e}, \mathfrak{f})$ in θ derart, dass N eine $\mathfrak{e}$ -Gruppe und $G/\mathfrak{C}_G N$ eine $\mathfrak{f}$ -Gruppe ist.

(b) Mit N ist auch das epimorphe Bild $NM/M \simeq N/(N \cap M)$ von N eine $\mathfrak{e}$ -Gruppe. Ferner ist $\mathfrak{C}_G N$ in $M \div NM$ enthalten, und $G/(M \div NM)$ ist ein epimorphes Bild von $G/\mathfrak{C}_G N$ und daher ebenfalls eine $\mathfrak{f}$ -Gruppe. Also gilt $NM/M\theta G/M$, und (b) ist bewiesen.

(c): Es ist $U/(\mathfrak{C}_G N \cap U) \simeq U\mathfrak{C}_G N/\mathfrak{C}_G N$ eine Untergruppe von $G/\mathfrak{C}_G N$, und daher ist nach Voraussetzung auch $U/(\mathfrak{C}_G N \cap U) = U/\mathfrak{C}_U N$ eine $\mathfrak{f}$ -Gruppe. Also gilt $N\theta U$, und (c) ist bewiesen.

(d): Mit N ist nach Voraussetzung auch der Normalteiler L von N eine $\mathfrak{e}$ -Gruppe. Aus (c) folgt, dass mit $G/\mathfrak{c}_G N$ auch $U/\mathfrak{c}_U N$ eine $\mathfrak{f}$ -Gruppe ist. Wegen $\mathfrak{c}_U N \subseteq \mathfrak{c}_U L$ ist $U/\mathfrak{c}_U L$ ein epimorphes Bild von $U/\mathfrak{c}_U N$, und daher ist $U/\mathfrak{c}_U L$ ebenfalls eine $\mathfrak{f}$ -Gruppe. Also gilt $L\theta U$, und (d) ist bewiesen.

(e): Als Faktor von N ist nach Voraussetzung auch RS/S eine $\mathfrak{e}$ -Gruppe. Aus $R \subseteq N$ folgt $\mathfrak{c}_G N \subseteq \mathfrak{c}_G R$. Daher ist $G/\mathfrak{c}_G R$ als epimorphes Bild von $G/\mathfrak{c}_G N$ eine $\mathfrak{f}$ -Gruppe. Also gilt $R\theta G$. Anwendung von (b) ergibt $RS/S \theta G/S$, so dass auch (e) bewiesen ist.

DEFINITION: Eine Gruppe heisst *hyper- θ -Gruppe*, wenn jedes von 1 verschiedene epimorphe Bild von G einen von 1 verschiedenen θ -Normalteiler besitzt.

LEMMA 1.2: Ist die Gruppe G Produkt von [endlich oder unendlich vielen] sich gegenseitig zentralisierenden Normalteilern, die sämtlich hyper- θ -Gruppen sind, so ist G selbst eine hyper- θ -Gruppe.

BEWEIS: Die Gruppe G sei Produkt einer Menge $\mathfrak{M}$ von Normalteilern, die sämtlich hyper- θ -Gruppen sind. Ist σ ein Epimorphismus von G auf $H \neq 1$, so ist H das Produkt der Normalteiler X^σ für X aus $\mathfrak{M}$. Wenn sich die Normalteiler X aus $\mathfrak{M}$ paarweise gegenseitig zentralisieren, so zentralisieren sich auch die Normalteiler X^σ von H für X aus $\mathfrak{M}$ paarweise gegenseitig. Aus $H \neq 1$ folgt $X^{*\sigma} \neq 1$ für wenigstens ein X^* aus $\mathfrak{M}$. Da X^* eine hyper- θ -Gruppe ist, gibt es also einen θ -Normalteiler $Y \neq 1$ von $X^{*\sigma}$. Da die übrigen X^σ den Normalteiler $X^{*\sigma}$ von H zentralisieren, ist Y auch ein Normalteiler von H , und die von H in Y induzierte Automorphismengruppe ist mit der von $X^{*\sigma}$ in Y induzierten Automorphismengruppe identisch. Es folgt, dass Y ein von 1 verschiedener θ -Normalteiler von H ist. Damit ist gezeigt, dass G eine hyper- θ -Gruppe ist.

ANMERKUNG: Aus Lemma 1.2 folgt, dass direkte Produkte von [beliebig vielen] hyper- θ -Gruppen selber hyper- θ -Gruppen sind.

Dagegen sind cartesische Produkte von hyper- θ -Gruppen bekanntlich im allgemeinen nicht wieder hyper- θ -Gruppen.

LEMMA 1.3: (a) *Vererbt sich die erste Komponente von θ auf Untergruppen und die zweite Komponente von θ auf Faktoren, so gibt es zu jedem Normalteiler $N \neq 1$ der hyper- θ -Gruppe G einen θ -Normalteiler E von G mit $1 \subset E \subseteq N$.*

(b) *Vererbt sich θ auf Faktoren, so ist jeder Faktor einer hyper- θ -Gruppe ebenfalls eine hyper- θ -Gruppe.*

BEWEIS: Der Beweis von (a) verläuft im wesentlichen wie der Beweis von R. BAER [3], p. 17, Lemma 3.2. Der Beweis von (b) wird im wesentlichen wie der Beweis von R. BAER [2], p. 358, Satz 4.4 (a), geführt.

FOLGERUNG 1.4: *Vererbt sich die erste Komponente von θ auf Untergruppen und die zweite Komponente von θ auf Faktoren, so ist die Gruppe G dann und nur dann eine hyper- θ -Gruppe, wenn gilt:*

Sind R und S zwei Normalteiler von G mit $S \subset R$, so gibt es einen Normalteiler N von G mit $S \subset N \subseteq R$ und $N/S \theta G/S$.

BEWEIS: Dies ergibt sich sofort aus Lemma 1.3 (a) und der Definition der hyper- θ -Gruppe.

HILFSATZ 1.5: *Jede der beiden folgenden gruppentheoretischen Eigenschaften vererbt sich auf epimorphe Bilder:*

(+) *Zu jeder echten Untergruppe $X = \mathfrak{n}_G X$ der Gruppe G gibt es eine Untergruppe Y von G mit*

$$Y^X = Y, \quad X_{XY} \subseteq Y \subsetneq X, \quad Y/X_{XY} \theta XY/X_{XY}.$$

(++) *Zu jeder maximalen Untergruppe X der Gruppe G , die kein Normalteiler von G ist, gibt es einen Normalteiler Y von G mit*

$$G = XY, \quad X_G \subseteq Y, \quad Y/X_G \theta G/X_G.$$

BEWEIS: Ist $A = \mathfrak{n}_H A$ eine echte Untergruppe des epimorphen Bildes H der (+) erfüllenden Gruppe G , ist weiter σ ein Epimor-

phismus von G auf H , so sei X das Urbild von A unter σ . Dann ist $(n_G X)^\sigma \subseteq n_H A = A$, so dass $n_G X$ im Urbild von A enthalten ist. Also wird $X = n_G X$, und es gibt wegen (+) eine Untergruppe Y von G mit

$$Y^X = Y, \quad X_{XY} \subseteq Y \not\subseteq X, \quad Y/X_{XY} \theta XY/X_{XY}.$$

Ist K der Kern von σ , so ist K ein in X enthaltener Normalteiler von G und damit auch von XY , so dass $K \subseteq X_{XY} \subseteq Y$ gilt. Es sei nun $B = Y^\sigma = Y/K$. Da Y von X normalisiert wird, wird auch B von A normalisiert, so dass $B^A = B$ gilt. Der grösste in X enthaltene Normalteiler von XY wird auf den grössten in A enthaltenen Normalteiler von $\{A, B\} = AB$ abgebildet. Also ist $(X_{XY})^\sigma = A_{AB}$. Da Untergruppen von Y auf Untergruppen von B abgebildet werden, folgt $A_{AB} \subseteq B$. Wäre $B \subseteq A$, also $Y/K \subseteq X/K$, so wäre auch $Y \subseteq X$. Also ist $B \not\subseteq A$. Aus Lemma 1.1 (a) folgt noch, dass auch $B/A_{AB} \theta AB/A_{AB}$ gilt. Damit sind alle verlangten Bedingungen nachgewiesen. Also vererbt sich (+) auf epimorphe Bilder. Die Epimorphismenvererblichkeit von (++) zeigt man analog.

HILFSSATZ 1.6: (a) *Vererbt sich die erste Komponente von θ auf epimorphe Bilder und die zweite Komponente von θ auf Faktoren, so gibt es zu jeder echten Untergruppe X der hyper- θ -Gruppe G eine Untergruppe Y von G mit*

$$Y^X = Y, \quad X_{XY} \subseteq Y \not\subseteq X, \quad Y/X_{XY} \theta XY/X_{XY}.$$

(b) *Vererbt sich die erste Komponente von θ auf Normalteiler und epimorphe Bilder und die zweite Komponente von θ auf Faktoren, ist X eine echte Untergruppe der hyper- θ -Gruppe G und ist 1 der einzige θ -Normalteiler von $n_G X/X$, so gibt es eine Untergruppe Y von G mit*

$$Y^X = Y, \quad X_{XY} \subseteq Y \not\subseteq X, \quad Y/X_{XY} \theta XY/X_{XY}, \quad Y \cap n_G X \subseteq X.$$

BEWEIS: Es sei X eine echte Untergruppe der hyper- θ -Gruppe G . Wegen $X_G \subseteq X \subseteq G$ ist X_G ein Normalteiler von G mit von 1 verschiedener Faktorgruppe G/X_G . Also gibt es einen Normalteiler

N von G mit $X_G \subset N$ und $N/X_G \theta G/X_G$. Da X_G der grösste in X enthaltene Normalteiler von G ist, folgt $N \not\subseteq X$. Aus $\{X, N\} = XN \subseteq G$ folgt $X_G \subseteq X_{XN}$. Ausserdem folgt aus $N/X_G \theta G/X_G$ wegen der Untergruppenvererblichkeit der zweiten Komponente von θ nach Lemma 1.1 (c) die Beziehung $N/X_G \theta XN/X_G$. Aus Lemma 1.1 (b) ergibt sich

$$(N/X_G)/((N \cap X_{XN})/X_G) \theta (XN/X_G)/((N \cap X_{XN})/X_G).$$

Anwendung von Lemma 1.1 (a) ergibt

$$N/(N \cap X_{XN}) \theta XN/(N \cap X_{XN}) \quad \text{und}$$

$$NX_{XN}/X_{XN} \theta XN/X_{XN}.$$

Die Untergruppe $Y = NX_{XN}$ wird natürlich von X normalisiert. Aus $N \not\subseteq X$ folgt $Y \not\subseteq X$, und es ist $X_{XY} = X_{XN} \subseteq Y$. Schliesslich gilt noch $Y/X_{XY} \theta XY/X_{XY}$. Damit ist (a) bewiesen.

Der beim Beweis von (a) benutzte Normalteiler N von G erfüllt $N/X_G \theta G/X_G$. Aus Lemma 1.1 (d) und (b) ergibt sich

$$(N \cap \mathfrak{n}_G X)/X_G \theta \mathfrak{n}_G X/X_G \quad \text{und} \quad (N \cap \mathfrak{n}_G X) X/X \theta \mathfrak{n}_G X/X.$$

Ist nun 1 der einzige θ -Normalteiler von $\mathfrak{n}_G X/X$, so folgt $(N \cap \mathfrak{n}_G X) X \subseteq X$, also $N \cap \mathfrak{n}_G X \subseteq X$. Setzt man wieder $Y = NX_{XN}$, so ist

$$X_{XY} \subseteq Y \not\subseteq X, \quad Y^X = Y, \quad Y/X_{XY} \theta XY/X_{XY}.$$

Ferner ist nach dem dedekindschen Modulsatz

$$Y \cap \mathfrak{n}_G X = NX_{XN} \cap \mathfrak{n}_G X = X_{XN}(N \cap \mathfrak{n}_G X) \subseteq X.$$

Damit ist auch (b) bewiesen.

FOLGERUNG 1.7: *Vererbt sich θ auf Faktoren, so gibt es zu jeder echten Untergruppe X einer Untergruppe U der hyper- θ -Gruppe G eine Untergruppe Y von U mit*

$$Y^X = Y, \quad X_{XY} \subseteq Y \not\subseteq X, \quad Y/X_{XY} \theta XY/X_{XY}.$$

BEWEIS: Diese Aussage folgt sofort durch Kombination von Lemma 1.3 (b) und Hilfssatz 1.6 (a).

Die in Hilfssatz 1.6 (b) abgeleitete Bedingung gibt bereits eine Charakterisierung der hyper- θ -Gruppen.

SATZ 1.8: *Vererbt sich die erste Komponente von θ auf Normalteiler und epimorphe Bilder und die zweite Komponente von θ auf Faktoren, so sind die folgenden Eigenschaften der Gruppe G äquivalent:*

(I) G ist eine hyper- θ -Gruppe.

(II) Ist X eine echte Untergruppe von G und ist 1 der einzige θ -Normalteiler von $\mathfrak{n}_G X/X$, so gibt es eine Untergruppe Y von G mit

$$Y^X = Y, \quad X_{XY} \subseteq Y \not\subseteq X, \quad Y/X_{XY} \theta XY/X_{XY}, \quad Y \cap \mathfrak{n}_G X \subseteq X.$$

(III) Ist X eine echte Untergruppe von G und ist 1 der einzige θ -Normalteiler von $\mathfrak{n}_G X/X$, so gibt es eine Untergruppe Y von G mit

$$Y \not\subseteq X \quad \text{und} \quad Y \cap \mathfrak{n}_G X \subseteq X.$$

BEWEIS: Es ergibt sich aus Hilfssatz 1.6 (b), dass (II) aus (I) folgt. (III) ist eine Abschwächung von (II).

Es werde nun Bedingung (III) von der Gruppe G erfüllt. Angenommen, G ist keine hyper- θ -Gruppe. Dann gibt es einen Normalteiler M von G so, dass 1 der einzige θ -Normalteiler von $G/M = \mathfrak{n}_G M/M$ ist. Aus (II) folgt die Existenz einer Untergruppe Y von G mit $Y = Y \cap G = Y \cap \mathfrak{n}_G M \subseteq X$ und $Y \not\subseteq X$, was nicht sein kann. Also folgt (I) aus (III).

2. Eine Charakterisierung von hyper- θ -Gruppen, die der Maximalbedingung für Untergruppen genügen, ist im folgenden Satz enthalten. Eine gruppentheoretische Eigenschaft $\mathfrak{W}$ heisst *erweiterungsvererblich*, wenn gilt:

Ist N ein Normalteiler der Gruppe G und sind N und die Faktorgruppe G/N beide $\mathfrak{W}$ -Gruppen, so ist auch G eine $\mathfrak{W}$ -Gruppe.

SATZ 2.1: *Vererbt sich θ auf Faktoren, sind alle zyklischen Gruppen θ -Gruppen, ist hyper- θ erweiterungsvererblich, besitzt die*

Gruppe G eine maximale hyper- θ -Untergruppe, so sind die folgenden Eigenschaften von G äquivalent:

- (I) G ist eine hyper- θ -Gruppe.
- (II) Ist $X = \mathfrak{n}_G X$ eine echte Untergruppe von G , so gibt es eine Untergruppe Y von G mit

$$Y^X = Y, \quad X_{XY} \subseteq Y \not\subseteq X, \quad Y/X_{XY} \theta XY/X_{XY}.$$

BEWEIS: Es ergibt sich aus Hilfssatz 1.6 (a), dass (II) eine Folge von (I) ist.

G erfülle nun die Bedingung (II). Nach Voraussetzung gibt es eine maximale hyper- θ -Untergruppe M von G . Angenommen, es ist $M \subset G$. Wäre $M \neq \mathfrak{n}_G M$, so gäbe es ein M normalisierendes Element g in G , das nicht in M enthalten ist. Dann ist M ein Normalteiler von $\{M, g\}$ und $\{M, g\}/M \simeq \{g\}/(M \cap \{g\})$ ist zyklisch. Aus den Voraussetzungen folgt, dass dann $\{M, g\}/M$ eine θ -Gruppe und also auch eine hyper- θ -Gruppe ist. Aus der Erweiterungsvererblichkeit der Eigenschaft hyper- θ ergibt sich, dass auch $\{M, g\}$ eine hyper- θ -Gruppe ist, was der Maximalität von M widerspricht. Also ist $M = \mathfrak{n}_G M$ und aus (II) folgt die Existenz einer Untergruppe Y von G mit

$$Y^M = Y, \quad M_{MY} \subseteq Y \not\subseteq M, \quad Y/M_{MY} \theta MY/M_{MY}.$$

Da sich θ auf Faktoren vererbt, ist mit M auch die Untergruppe M_{MY} von M eine hyper- θ -Gruppe; vgl. Folgerung 1.7. Aus der Erweiterungsvererblichkeit der Eigenschaft hyper- θ folgt dann, dass auch Y eine hyper- θ -Gruppe ist. Nun ist Y ein Normalteiler von MY und $MY/Y \simeq M/(Y \cap M)$ ist als epimorphes Bild einer hyper- θ -Gruppe ebenfalls eine hyper- θ -Gruppe. Dann folgt aus der Erweiterungsvererblichkeit der Eigenschaft hyper- θ , dass auch MY eine hyper- θ -Gruppe ist. Wegen $M \subset MY$ widerspricht dies der Maximalität von M . Aus diesem Widerspruch folgt, dass $G = M$ eine hyper- θ -Gruppe ist. Also folgt auch (I) aus (II).

BEMERKUNG 2.2: Bedingung (II) von Satz 2.1 wird von allen zyklischen Gruppen erfüllt. Dies zeigt die Unentbehrlichkeit der Voraussetzung in Satz 2.1, dass zyklische Gruppen θ -Gruppen und also auch hyper- θ -Gruppen sind.

3. Im folgenden werden Gruppen mit Minimalbedingungen betrachtet. Eine gruppentheoretische Eigenschaft $\mathfrak{W}$ heisst *lokal*, wenn Gruppen, deren endlich erzeugbare Untergruppen $\mathfrak{W}$ -Gruppen sind, selbst die Eigenschaft $\mathfrak{W}$ haben.

SATZ 3.1: *Vererbt sich θ auf Faktoren, sind zyklische Gruppen von Primzahlordnung θ -Gruppen, ist hyper- θ erweiterungsvererblich und lokal, so sind die folgenden Eigenschaften der artinschen Gruppe G äquivalent:*

- (I) G ist eine hyper- θ -Gruppe.
- (II) Ist die maximale Untergruppe X der Untergruppe U von G kein Normalteiler von U , so gibt es einen Normalteiler Y von U mit

$$U = XY, \quad X_U \subseteq Y, \quad Y/X_U \theta U/X_U.$$

BEWEIS: Es ergibt sich aus Folgerung 1.7, dass (II) eine Folge von (I) ist.

Es werde nun Bedingung (II) von der Gruppe G erfüllt. Angenommen, G ist keine hyper- θ -Gruppe. Da G artinsch ist, gibt es unter den Untergruppen X von G , die keine hyper- θ -Gruppen sind, eine minimale A mit folgenden Eigenschaften:

- (1) A ist keine hyper- θ -Gruppe;
- (2) Jede echte Untergruppe von A ist eine hyper- θ -Gruppe.

Angenommen, A ist nicht endlich erzeugbar. Dann ist jede endlich erzeugbare Untergruppe von A eine echte Untergruppe von A und daher wegen (2) eine hyper- θ -Gruppe. Dann ist also A lokal eine hyper- θ -Gruppe, und es folgt aus der Voraussetzung, dass A selbst eine hyper- θ -Gruppe ist. Dies widerspricht (1), so dass also gilt:

- (3) A ist endlich erzeugbar.

Als endlich erzeugbare Gruppe besitzt A maximale Untergruppen. Ist M eine solche, so ist $M \subset A$, und es folgt aus (2), dass M eine hyper- θ -Gruppe ist. Wäre $M \neq \mathfrak{n}_A M$, so wäre M ein Normal-

teiler von A und A/M wäre frei von eigentlichen Untergruppen, also zyklisch von Primzahlordnung. Nach Voraussetzung ist dann A/M eine θ -Gruppe und daher auch eine hyper- θ -Gruppe. Da Erweiterungen von hyper- θ -Gruppen durch hyper- θ -Gruppen selbst hyper- θ -Gruppen sind, ist also A eine hyper- θ -Gruppe, was (1) widerspricht. Also gilt $M = \mathfrak{n}_A M \subset A$. Aus (II) folgt nun die Existenz eines Normalteilers W von A mit

$$A = WM, \quad M_A \subseteq W, \quad W/M_A \theta A/M_A.$$

Wegen (2) ist M_A als echte Untergruppe von A eine hyper- θ -Gruppe. Wäre $W = A$, so wäre wegen der Erweiterungsvererblichkeit der Eigenschaft hyper- θ auch A eine hyper- θ -Gruppe, was (1) widerspricht. Also ist $W \subset A$, so dass W wegen (2) eine hyper- θ -Gruppe ist. Nun ist mit M auch das epimorphe Bild $A/W = WM/W \simeq M/(M \cap W)$ von M eine hyper- θ -Gruppe. Aus der Erweiterungsvererblichkeit der Eigenschaft hyper- θ folgt, dass auch A eine hyper- θ -Gruppe ist. Aus diesem Widerspruch zu (1) ergibt sich, dass auch (I) aus (II) folgt.

SATZ 3.2: *Vererbt sich θ auf Faktoren, sind zyklische Gruppen von Primzahlordnung θ -Gruppen, genügen die Normalteiler der Gruppe G der Minimalbedingung und der Maximalbedingung, so sind die folgenden Eigenschaften von G äquivalent:*

- (I) G ist eine hyper- θ -Gruppe.
- (II) (a) *Zu jeder maximalen Untergruppe X von G , die kein Normalteiler von G ist, gibt es einen Normalteiler Y von G mit*

$$G = XY, \quad X_G \subseteq Y, \quad Y/X_G \theta G/X_G.$$

- (b) *Ist der minimale Normalteiler M des epimorphen Bildes H von G der einzige minimale Normalteiler von H , ist M in der Frattiniuntergruppe ΦH von H enthalten und H/M eine hyper- θ -Gruppe, so ist M ein θ -Normalteiler von H .*

BEWEIS: Gilt (I), so folgt (II.a) aus Hilfssatz 1.6 (a) und (II.b) aus Lemma (1.3) (a).

Es werde nun Bedingung (II) von der Gruppe G erfüllt. Angenommen, G ist keine hyper- θ -Gruppe. Da sich Bedingung (II) nach Hilfssatz 1.5 auf epimorphe Bilder vererbt, folgt aus der Maximalbedingung für Normalteiler von G die Existenz eines epimorphen Bildes F von G mit folgenden Eigenschaften:

- (1) F ist keine hyper- θ -Gruppe; F erfüllt (II).
- (2) Jedes echte epimorphe Bild von F ist eine hyper- θ -Gruppe.

Da F keine hyper- θ -Gruppe ist, ist $F \neq 1$ und besitzt nach Voraussetzung minimale Normalteiler. Angenommen, es gibt zwei verschiedene minimale Normalteiler A und B von F . Wegen (2) sind F/A und F/B hyper- θ -Gruppen, und aus Lemma 1.2 folgt, dass auch das direkte Produkt $F/A \times F/B$ eine hyper- θ -Gruppe ist. Nun ist $A \cap B = 1$, und daher ist F einer Untergruppe von $F/A \times F/B$ isomorph. Anwendung von Lemma 1.3 (b) ergibt, dass auch F eine hyper- θ -Gruppe ist. Aus diesem Widerspruch zu (1) folgt, dass $A = B$ ist. Also gilt:

- (3) F besitzt genau einen minimalen Normalteiler M .

Wegen (2) ist F/M eine hyper- θ -Gruppe. Wäre M ein θ -Normalteiler von F , so wäre wegen (2) auch F eine hyper- θ -Gruppe, was (1) widerspricht. Also gilt:

- (4) M ist kein θ -Normalteiler von F , doch F/M ist eine hyper- θ -Gruppe.

Wäre M in der Frattiniuntergruppe ΦF von F enthalten, so folgte aus (II.b), dass F eine hyper- θ -Gruppe ist, was (1) widerspricht. Also gilt:

- (5) $M \not\subseteq \Phi F$.

Wegen (5) ist $\Phi F \neq F$, und es gibt eine maximale Untergruppe S von F mit $M \not\subseteq S$. Ist $S=1$, so folgt aus der Maximalität von S , dass F zyklisch von Primzahlordnung ist. Nach Voraussetzung ist dann F eine θ -Gruppe, also auch eine hyper- θ -Gruppe. Aus die-

sem Widerspruch zu (1) folgt $S \neq 1$. Wäre S ein Normalteiler von F , so würde $M \subseteq S$ aus (3) folgen, was der Wahl von S widerspricht. Also ist $S \subseteq \mathfrak{n}_F S \subset F$, und aus der Maximalität von S folgt $S = \mathfrak{n}_F S$. Wegen (II.a) gibt es also einen Normalteiler N von F mit

$$F = SN, \quad S_F \subseteq N, \quad N/S_F \theta F/S_F.$$

Wäre $S_F \neq 1$, so würde aus (2) $M \subseteq S_F \subseteq S$ folgen, was der Wahl von S widerspricht. Also ist $S_F = 1$, so dass $N = N/S_F$ ein θ -Normalteiler von $F = F/S_F$ ist. Wegen $S \subset F = SN$ ist $N \neq 1$. Nach (3) ist $M \subseteq N$, und aus $N \theta F$ folgt nach Lemma 1.1 (e) auch $M \theta F$. Aus diesem Widerspruch zu (4) ergibt sich, dass auch (I) aus (II) folgt.

BEMERKUNG 3.3: Nach B. HUPPERT, p. 418, Beispiel 1, gibt es eine endliche, auflösbare Gruppe G mit den folgenden Eigenschaften: G enthält einen Normalteiler P der Ordnung 3^{10} . Die Frattiniuntergruppe $\Phi P = P'$ von P ist elementarabelsch und enthält einen minimalen Normalteiler M von G der Ordnung 3^4 . Ist p ein Teiler der Ordnung von G , so sind die Ordnungen der p -Hauptfaktoren von $G/\Phi G$ sämtlich $\leq p^2$.

Es sei nun $\mathfrak{e}$ die folgende Gruppenklasse: $\mathfrak{e}$ enthalte alle endlichen Gruppen, deren Ordnungen 3 nicht als Teiler haben, ferner alle Gruppen der Ordnung 3^2 und alle Untergruppen dieser Gruppen. Die Klasse θ bestehe aus dem Paar $(\mathfrak{e}, \mathfrak{u})$, wobei $\mathfrak{u}$ die universelle Eigenschaft bedeutet. Es ist klar, dass θ die Voraussetzungen von Satz 3.2 erfüllt.

Jede maximale Untergruppe S von G enthält $\Phi P \subseteq \Phi G$. Da die Ordnungen der p -Hauptfaktoren von $G/\Phi G$ sämtlich $\leq p^2$ sind, ist $G/\Phi G$ eine hyper- θ -Gruppe. Hieraus folgt, dass Bedingung (II.a) von Satz 3.2 von $[G/\Phi G \text{ und } G]$ erfüllt wird; vgl. Folgerung 1.7. Da aber der minimale Normalteiler M von G kein $\mathfrak{e}$ -Normalteiler von G ist, ist G keine hyper- θ -Gruppe. Damit ist gezeigt, dass die Bedingung (II.b) in Satz 3.2 unentbehrlich ist.

BEMERKUNG 3.4: Bedingung (II.b) von Satz 3.2 ist sicher dann erfüllt, wenn eine der folgenden beiden Bedingungen erfüllt ist:

- (+) Alle elementarabelschen Primärgruppen sind θ -Gruppen.
 (++) Ist $G/\Phi G$ eine hyper- θ -Gruppe, so ist auch G eine hyper- θ -Gruppe.

Die Bedingung (++) bedeutet, dass die Eigenschaft hyper- θ gesättigt (oder vom Frattinityp) ist. Sie wird etwa von den endlichen hyperzentralen, hyperzyklischen und hyperabelschen Gruppen erfüllt.

HILFSSATZ 3.5: *Vererbt sich θ auf Faktoren, so sind die folgenden Eigenschaften der artinschen und fastabelschen Gruppe G äquivalent:*

- (I) G ist eine hyper- θ -Gruppe.
 (II) Jede endliche Untergruppe von G ist eine hyper- θ -Gruppe.
 (III) Jedes von 1 verschiedene epimorphe Bild H von G besitzt einen von 1 verschiedenen, endlichen θ -Normalteiler.

BEWEIS: Wegen Folgerung 1.7 sind Untergruppen von hyper- θ -Gruppen selber hyper- θ -Gruppen, so dass (II) aus (I) folgt.

Als artinsche und fastabelsche Gruppe ist G lokal endlich; vgl. etwa R. BAER [3], p. 7/8, Satz 2.1. Gilt nun (II), so ist jede endlich erzeugbare Untergruppe von G eine endliche hyper- θ -Gruppe. Es sei nun $H \neq 1$ ein epimorphes Bild von G . Mit G hat auch H folgende Eigenschaften:

- (*) H ist artinsch und fastabelsch; jede endlich erzeugbare Untergruppe von H ist eine endliche hyper- θ -Gruppe.

Ist erstens H endlich, so ist H wegen (*) eine hyper- θ -Gruppe, die dann natürlich einen von 1 verschiedenen θ -Normalteiler besitzt. Ist zweitens H unendlich, so sei D der Durchschnitt aller Untergruppen X von H mit endlichem Index $|H:X|$. Da H artinsch ist, ist D eine unendliche, abelsche, charakteristische Untergruppe von H mit endlicher Faktorgruppe H/D , vgl. R. BAER [3], p. 7/8, Satz 2.1. Folglich bilden die Elemente quadratfreier Ordnung in D eine von 1 verschiedene, endliche, charakteristische Untergruppe K von D und also von H , vgl. L. FUCHS, p. 68, 19. Da K und H/D endlich sind, gibt es eine endlich erzeugbare Untergruppe L von H mit $K \subseteq L$ und $H = LD$. Da wegen (*) L eine hyper- θ -Gruppe und K ein Normalteiler von L ist, gibt es nach Lemma 1.3 (a) einen

θ -Normalteiler A von L mit $1 \subset A \subseteq K$. Da D eine abelsche Obergruppe von K und A ist, ist A ein Normalteiler von $LD = H$, und H und L induzieren dieselbe Automorphismengruppe in A . Also ist A ein endlicher θ -Normalteiler von H . Damit ist gezeigt, dass (III) aus (II) folgt. Dass schliesslich auch (I) aus (III) folgt, ist trivial.

FOLGERUNG 3.6: *Vererbt sich θ auf Faktoren und sind elementarabelsche Primärgruppen θ -Gruppen, so sind die folgenden Eigenschaften der artinschen Gruppe G äquivalent:*

- (I) G ist eine fastabelsche hyper- θ -Gruppe.
 (II) (a) Ist X eine maximale Untergruppe der Untergruppe U von G , aber kein Normalteiler von U , so gibt es einen Normalteiler Y von U mit

$$U = XY, X_U \subseteq Y, Y/X_U \theta U/X_U.$$

(b) θ -Faktoren von G sind fastabelsch.

- (III) (a) Ist X eine maximale Untergruppe der endlichen Untergruppe U von G , aber kein Normalteiler von U , so gibt es einen Normalteiler Y von U mit

$$U = XY, X_U \subseteq Y, Y/X_U \theta U/X_U.$$

(b) G ist fastabelsch.

BEWEIS: Es ist klar, dass (II. b) aus (b) folgt, und es ergibt sich aus Folgerung 1.7, dass auch (II. a) aus (I) folgt.

Ist die maximale Untergruppe X der Untergruppe U der (II) erfüllenden Gruppe G kein Normalteiler von U , so gibt es einen Normalteiler Y von U mit

$$U = XY, X_U \subseteq Y, Y/X_U \theta U/X_U.$$

Ist $Y = U$, so ist U/X_U ein θ -Faktor von G , also nach (II. b) fastabelsch. Aus B. AMBERG, Folgerung 4, folgt nun, dass G fastabelsch ist. Nun ist es klar, dass (III) eine Folge von (II) ist.

Gilt (III), so ist G als artinsche und fastabelsche Gruppe lokal endlich, vgl. R. BAER [3], p. 7/8, Satz 2.1. Daher folgt aus (III. a)

wegen Satz 3.2 und Bemerkung 3.4, dass jede endlich erzeugbare Untergruppe von G eine endliche hyper- θ -Gruppe ist. Aus Hilfssatz 3.5 ergibt sich, dass G selbst eine hyper- θ -Gruppe ist. Also folgt (I) aus (III).

BEMERKUNG 3.7: Die Voraussetzung in Folgerung 3.6, dass elementarabelsche Primärgruppen θ -Gruppen sind, wurde nur bei der Anwendung von Satz 3.2 benutzt. Nach Bemerkung 3.4 kann sie etwa auch durch folgende Forderung ersetzt werden:

Zyklische Gruppen von Primzahlordnung sind θ -Gruppen, und hyper- θ ist gesättigt (vom Frattinityp).

SATZ 3.8: *Vererbt sich θ auf Faktoren, sind zyklische Gruppen von Primzahlordnung θ -Gruppen, so sind die folgenden Eigenschaften der artinschen Gruppe G äquivalent:*

- (I) G ist eine auflösbare hyper- θ -Gruppe.
- (II) (a) Ist die maximale Untergruppe X der Untergruppe U von G kein Normalteiler von U , so gibt es einen Normalteiler Y von U mit

$$U = XY, X_U \subseteq Y, Y/X_U \theta U/X_U.$$

- (b) Hyper- θ -Untergruppen von G sind auflösbar.

BEWEIS: Aus Folgerung 1.7 ergibt sich, dass (II) aus (I) folgt.

Die Gruppe G erfülle nun Bedingung (II), und es sei E eine endliche und auflösbare Untergruppe von G . Angenommen, E ist keine hyper- θ -Gruppe. Dann gibt es unter den endlichen Faktoren von E , die keine hyper- θ -Gruppen sind, einen F von minimaler Ordnung. Da sich (II. a) auf Untergruppen und wegen Hilfssatz 1.5 auch auf epimorphe Bilder vererbt, gilt:

- (1) F erfüllt Bedingung (II. a), ist aber keine hyper- θ -Gruppe.
- (2) Jeder echte Faktor von F ist eine hyper- θ -Gruppe.

Da F keine hyper- θ -Gruppe ist, ist $F \neq 1$ und besitzt also minimale Normalteiler. Gäbe es zwei verschiedene minimale Normalteiler A und B von F , so wäre $A \cap B = 1$, so dass F einer Unter-

gruppe des direkten Produktes $F/A \times F/B$ isomorph wäre. Wegen (2) sind F/A und F/B hyper- θ -Gruppen, so dass wegen Lemma 1.2 auch $F/A \times F/B$ eine hyper- θ -Gruppe ist. Dann ist nach Lemma 1.3 (b) aber auch F eine hyper- θ -Gruppe, was (1) widerspricht. Also gilt:

(3) F besitzt genau einen minimalen Normalteiler M .

Es ergibt sich aus (2), dass F/M eine hyper- θ -Gruppe ist. Wäre M ein θ -Normalteiler von F , so würde aus (2) folgen, dass F eine hyper- θ -Gruppe ist. Aus diesem Widerspruch zu (1) folgt:

(4) F/M ist eine hyper- θ -Gruppe, aber M ist kein θ -Normalteiler von F .

Angenommen, M ist nicht in der Frattiniuntergruppe ΦF von F enthalten. Wegen (2) genügt jedes echte epimorphe Bild von F der Bedingung (II.b) von Satz 3.2, und hieraus folgt, dass F selbst dieser Bedingung (II.b) genügt. Mit (II.a) folgt dann aus diesem Satz, dass F im Widerspruch zu (1) eine hyper- θ -Gruppe ist. Also gilt:

(5) $M \subseteq \Phi F$.

Die Frattiniuntergruppe einer endlichen Gruppe ist nilpotent, vgl. etwa R. KOCHENDÖRFFER, p. 203, (9.3.5). Also ist der minimale Normalteiler M von F eine elementarabelsche p -Gruppe. Angenommen, es ist $F = \mathbf{C}_F M$. Dann ist M im Zentrum $\mathbf{Z} F$ von F enthalten, und jede Untergruppe von M ist ein Normalteiler von F . Aus der Minimalität von M folgt dann, dass M zyklisch von Primzahlordnung p ist. Wäre p ein Teiler der Ordnung von F/M , so wäre M einer Untergruppe der hyper- θ -Gruppe F/M isomorph, also nach Lemma 1.3 (b) selbst eine hyper- θ -Gruppe. Da aber M ein im Zentrum von F enthaltener zyklischer Normalteiler von Primzahlordnung ist, wäre M sogar ein θ -Normalteiler von F , was (4) widerspricht. Also ist p kein Teiler der Ordnung von F/M . Es folgt, dass die Ordnungen von M und F/M teilerfremd sind, so dass nach dem Satz von SCHUR und ZASSENHAUS F über M zerfällt, was wegen (5) nicht sein kann; vgl. etwa R. KOCHENDÖRFFER, p. 117, (6.2.2),

und p. 202, (9.3.2). Aus diesem Widerspruch folgt:

$$(6) \quad \mathbf{C}_F M \subset F.$$

Natürlich enthält dann $F/\mathbf{C}_F M$ einen von 1 verschiedenen, auflösbaren Normalteiler, und es folgt aus R. BAER [1], p. 656, Lemma 2:

$$(7) \quad F/\mathbf{C}_F M \text{ besitzt einen Normalteiler mit zu } p \text{ teilerfremder Ordnung.}$$

Nun folgt aus R. BAER [1], p. 655, (E), die Existenz einer Untergruppe S von F mit folgenden Eigenschaften:

$$(8) \quad M \cap S = 1, S\mathbf{C}_F M = F.$$

Wäre $SM = F$, so folgte aus der Minimalität und Kommutativität von M , dass S eine maximale Untergruppe von F ist; vgl. etwa R. BAER [1], p. 642, Lemma 1. Aus $M \subseteq \Phi F$ folgte dann $S \subset F = SM = S$, was nicht sein kann. Also ist $SM \subset F$, und SM ist wegen (2) eine hyper- θ -Gruppe. Da S und F wegen (8) dieselbe Automorphismengruppe in M induzieren, ist M auch minimaler Normalteiler von SM , so dass M ein θ -Normalteiler von SM und F ist, vgl. Lemma 1.3 (a). Aus diesem Widerspruch zu (4) folgt:

$$(8) \quad \text{Jede endliche, auflösbare Untergruppe von } G \text{ ist eine hyper-}\theta\text{-Gruppe.}$$

Angenommen, G ist keine hyper- θ -Gruppe. Da G artinsch ist, gibt es unter den Untergruppen von G , die keine hyper- θ -Gruppen sind, eine minimale W mit folgenden Eigenschaften:

$$(9) \quad W \text{ ist keine hyper-}\theta\text{-Gruppe.}$$

$$(10) \quad \text{Jede echte Untergruppe von } W \text{ ist eine hyper-}\theta\text{-Gruppe.}$$

Angenommen, W ist nicht endlich erzeugbar. Dann ist jede endlich erzeugbare Untergruppe von W eine echte Untergruppe von W , also wegen (10) eine hyper- θ -Gruppe und wegen (II.b) sogar

auflösbar. Insbesondere ist W lokal auflösbar, und es folgt etwa aus B. AMBERG, Folgerung B, dass W selbst artinsch, auflösbar und fastabelsch ist. Es ergibt sich nun aus (8), dass jede endliche Untergruppe von W eine hyper- θ -Gruppe ist, so dass W wegen Hilfssatz 3.5 eine hyper- θ -Gruppe ist. Aus diesem Widerspruch zu (9) folgt:

(11) W ist endlich erzeugbar.

Angenommen, W ist nicht auflösbar. Wegen (11) besitzt W eine maximale Untergruppe R . Wegen $R \subset W$ und (10) ist R eine hyper- θ -Gruppe, so dass R nach (II.b) auflösbar ist. Wäre $R \neq \mathfrak{n}_W R$, so wäre R ein Normalteiler von W , und W/R wäre frei von eigentlichen Untergruppen, also zyklisch von Primzahlordnung. Mit R und W/R ist auch W auflösbar, was der Annahme widerspricht. Also ist $R = \mathfrak{n}_W R$, und wegen (II.a) gibt es einen Normalteiler S von W mit folgenden Eigenschaften:

(12) $W = RS, \quad R_W \subseteq W, \quad S/R_W \theta W/R_W.$

Da R_W eine echte Untergruppe von W ist, ist R_W wegen (10) eine hyper- θ -Gruppe, und aus (II.b) ergibt sich die Auflösbarkeit von R_W . Wäre $W = S$, so wäre W/R_W wegen (12) eine θ -Gruppe, und Anwendung von (II.b) zeigte die Auflösbarkeit von W/R_W . Mit R_W und W/R_W ist aber auch W auflösbar, und dies ist ein Widerspruch zur Annahme. Also ist $S \subset W$. Wegen (10) ist S eine hyper- θ -Gruppe, und die Anwendung von (II.b) zeigt die Auflösbarkeit von S . Nun ist mit R auch das epimorphe Bild $W/S = RS/S \simeq R/(R \cap S)$ von R auflösbar. Mit S und W/S ist aber auch W auflösbar, und aus diesem Widerspruch zur Annahme folgt:

(13) W ist auflösbar.

Wegen (11) und (13) ist W eine endlich erzeugbare, auflösbare und artinsche Gruppe. Anwendung von R. BAER [3], p. 18, Lemma 3.3, ergibt die Endlichkeit von W . Nun ergibt sich aus (8), dass W eine hyper- θ -Gruppe ist. Dies widerspricht (9). Also ist (I) doch eine Folge von (II).

BEMERKUNG 3.9: Aus dem in Bemerkung 3.3 angegebenen Beispiel ergibt sich, dass die Untergruppenvererblichkeit von Bedingung (II.a) in Satz 3.8 unentbehrlich ist.

BEMERKUNG 3.10: Die in den Sätzen dieses Abschnitts erscheinende Voraussetzung, dass zyklische Gruppen von Primzahlordnung θ -Gruppen sind, ist unentbehrlich, da etwa Bedingung (II.a) von Satz 3.8 von allen zyklischen Gruppen von Primzahlordnung erfüllt wird. Ähnliche Bemerkungen gelten für die übrigen Sätze mit dieser Voraussetzung.

LITERATURVERZEICHNIS

- B. AMBERG, *Gruppen mit Minimalbedingung für Subnormalteiler*, erscheint demnächst im Arch. der Math.
- R. BAER,
- [1] *Nilpotent characteristic subgroups of finite groups*, Amer. Journal of Math. 75 (1953), 633-664.
 - [2] *Abzählbar erkennbare gruppentheoretische Eigenschaften*, Math. Z. 79 (1962), 344-363.
 - [3] *Gruppen mit Minimalbedingung*, Math. Ann. 150 (1963), 1-44.
 - [4] *Local and global hypercentrality and supersolubility*, Indagationes Math. 28 (1966), 93-126.
 - [5] *Normalisatorreiche Gruppen*, Rend. Math. Padova 38 (1967), 358-450.
- L. FUCHS, *Abelian groups*, Budapest (1958).
- K. A. HIRSCH, *Über lokal nilpotente Gruppen*, Math. Z. 63 (1955), 290-294.
- B. HUPPERT, *Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen*, Math. Z. 60 (1954), 409-434.
- R. KOCHENDÖRFFER, *Lehrbuch der Gruppentheorie unter besonderer Berücksichtigung der endlichen Gruppen*, Leipzig (1966).
- B. I. PLOTKIN, *On some criteria of locally nilpotent groups*, Amer. Math. Soc. Transl. 2, 17 (1961), 1-8 (Übers. aus dem Russ.: Uspechi Mat. Nauk (N. S.) 9 (1954), 3 (16), 181-186).

Manoscritto pervenuto in redazione il 17-2-68.