

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

P. BOERO

Metodi omologici elementari nella teoria dei sistemi di equazioni, II

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 41 (1968), p. 349-361

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1968__41__349_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

METODI OMOLOGICI ELEMENTARI NELLA TEORIA DEI SISTEMI DI EQUAZIONI, II

P. BOERO *)

SUMMARY. Let p be a non negative integer, or $+\infty$; A an integral algebra over \mathbb{C} . In this work, we define functors ${}_A E_p$ from the category of A -modules to the same category. If A is a suitable \mathbb{C} -algebra of « operators » on $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ (for instance, the algebra of all the operators of partial derivation in n variables), ${}_A E_p(\mathcal{C}(\mathbb{R}^n))$ contains all the polynomial-exponentials of polynomial « degree » $q < p + 1$, and only them.

We consider many properties of these functors ${}_A E_p$ and of their first derivatives; finally, we give an application of the functor E_∞ to prove that the polynomial-exponential solutions are dense in the space of the solutions of some systems of convolution equations.

Introduzione.

In questo lavoro, data una algebra A commutativa ed integra su \mathbb{C} , con identità moltiplicativa, si introducono i funtori ${}_A E_m$ ($0 \leq m \leq +\infty$) definiti nella categoria dei A -moduli ed a valori in essa.

Si prova che, se A è una opportuna algebra (*E-algebra*) di endomorfismi di $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, ${}_A E_m(\mathcal{C})$ coincide con il A -modulo delle funzioni che sono combinazioni lineari finite di prodotti di polinomi di « gra-

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la Matematica del C. N. R.

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico dell'Università, Via L. B. Alberti, Genova.

do » (in un senso adeguatamente precisato) minore di $m + 1$, per esponenziali.

Questo lavoro continua con vari esempi di *E-algebre*; in particolare, si considerano *E-algebre* di operatori su $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ che commutano con le traslazioni; se T è un tale operatore, si studiano poi le relazioni tra $E_\infty(Ker T)$ ed $E'_p(Ker T)$; si prova che, se T è continuo e di « grado » finito, p_0 , per $p > p_0$ il valore su $Ker T$ del funtore derivato E'_p dipende solo da $E'_{p_0}(Ker T)$ se $n = 1$.

Infine, si applica il funtore E_∞ allo studio delle soluzioni di classe C^∞ di un sistema omogeneo di convoluzione, provando che, se i coefficienti del sistema appartengono ad un'algebra bezontiana di operatori, le soluzioni polinomi-esponenziali sono dense nello spazio delle soluzioni del sistema (secondo l'ordinaria topologia di $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, o secondo topologie meno fini che però conservino certe sue proprietà).

Per quanto i risultati valgono quasi tutti in ipotesi algebriche più generali, conveniamo che tutti gli anelli che consideriamo siano commutativi, interi e con identità che si conserva passando ad eventuali sottoanelli.

PARTE I - I FUNTORI ${}_A E_p$

1. Sia A una \mathbb{C} -algebra integra con identità moltiplicativa; sia X un A -modulo; indichiamo con ${}_A S_p(X)$ l'insieme: $\{x \in X, \dim_{\mathbb{C}} Ax \leq p + 1\}$, ove Ax è il sotto- A -modulo di X generato da x ; indichiamo con ${}_A E_p(X)$ il sotto- A -modulo di X generato da ${}_A S_p(X)$. In particolare, ${}_A E_0(X)$ è il A -modulo costituito dalle combinazioni lineari finite a coefficienti complessi del tipo:

$$\sum_1^k c_i x_i, \text{ ove } x_i \in X, \text{ e } \dim_{\mathbb{C}} Ax_i = 1.$$

Poniamo ${}_A E_\infty(X) = \bigcup_{p \geq 0} {}_A E_p(X)$; si ha subito:

$${}_A E_\infty(X) = \{x \in X, \dim_{\mathbb{C}} Ax < +\infty\}.$$

Osserviamo che, se $m < n$, ${}_A E_m(X) \subset {}_A E_n(X)$.

Se $\varphi: X \rightarrow Y$ è un Λ -omomorfismo, indichiamo con ${}_{\Lambda}E_p(\varphi)$ la sua restrizione a ${}_{\Lambda}E_p(X)$.

Ove non sorgano ambiguità, ometteremo, nello scrivere ${}_{\Lambda}E_p(X)$ ed ${}_{\Lambda}E_p(\varphi)$, l'indicazione dell'anello Λ , scrivendo semplicemente: $E_p(X)$, $E_p(\varphi)$.

TEOREMA 1: per ogni p , $0 \leq p \leq +\infty$, E_p è un funtore covariante addittivo, esatto a sinistra, della categoria dei Λ -moduli in sè.

Per come è definito, E_p muta Λ -moduli in Λ -moduli; inoltre, data una mappa $\varphi: X \rightarrow Y$ tra Λ -moduli, $E_p(\varphi)$ è una mappa definita in $E_p(X)$ ed a valori in $E_p(Y)$: infatti, se $\dim_{\mathbb{C}} \Lambda x = p + 1$, $\dim_{\mathbb{C}} \Lambda \varphi(x) \leq p + 1$ poichè φ è un Λ -omomorfismo.

Resta da provare l'esattezza a sinistra di E_p ; data la sequenza esatta:

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{\pi} Z \rightarrow 0$$

di Λ -moduli, dobbiamo provare che è esatta la sequenza:

$$0 \rightarrow E_p(X) \rightarrow E_p(Y) \rightarrow E_p(Z).$$

Anzitutto, osserviamo che $E_p(i)$ è monomorfismo (in quanto restrizione di un monomorfismo).

Supponiamo che $E_p(\pi)(y) = 0$; vogliamo provare che $y = E_p(i)(x)$, ove $x \in E_p(X)$. Dato che $y \in E_p(Y)$, $\dim_{\mathbb{C}} \Lambda y < +\infty$; $\pi(\Lambda y) = 0$, onde possiamo fissare, in Λy , una base costituita di elementi della forma $\lambda_k z_k$, ove $\dim_{\mathbb{C}} \Lambda(\lambda_k z_k) \leq \dim_{\mathbb{C}} \Lambda z_k \leq p + 1$, tali che $\pi(\lambda_k z_k) = 0$. Ne viene, per ogni indice k , $\lambda_k z_k = i(x_k)$ ove $\dim_{\mathbb{C}} \Lambda x_k = \dim_{\mathbb{C}} \Lambda(\lambda_k z_k) \leq p + 1$; quindi $x_k \in E_p(X)$; y proviene allora da una combinazione, a coefficienti complessi, degli elementi x_k .

Indichiamo con ${}_{\Lambda}t(X)$ il Λ -modulo: $\{x \in X, \exists \lambda \in \Lambda, \lambda \neq 0, t. c. \lambda x = 0\}$.

TEOREMA 2: se $\dim_{\mathbb{C}} \Lambda = +\infty$, allora ${}_{\Lambda}E_{\infty}(X) \subset {}_{\Lambda}t(X)$ per ogni Λ -modulo X .

infatti, se $x \in E_\infty(X)$, $\dim_{\mathbb{C}} Ax < +\infty$; sia $\{\lambda_1 x, \dots, \lambda_n x\}$ una base dello spazio vettoriale complesso Ax ; sia λ un elemento di A non appartenente allo spazio vettoriale complesso generato da $\lambda_1, \dots, \lambda_n$; si ha: $\lambda x = \sum_1^n c_i \lambda_i x$ da cui: $\left(\lambda - \sum_1^n c_i \lambda_i\right) x = 0$ ma $\lambda \neq \sum_1^n c_i \lambda_i$, onde $x \in t(X)$.

OSSERVAZIONI: notiamo anzitutto che l'ipotesi: $\dim_{\mathbb{C}} A = +\infty$ è essenziale per la validità del Teorema 2.; infatti, se $\dim_{\mathbb{C}} A < +\infty$ si ha che $\dim_{\mathbb{C}} Ax < +\infty$ per ogni $x \in X$, onde $E_\infty(X) = X$, mentre, in genere, $t(X) \neq X$.

Inoltre, osserviamo che, per qualche \mathbb{C} -algebra A di dimensione infinita su \mathbb{C} e per qualche A -modulo X , $E_\infty(X) \neq t(X)$: ad esempio, se X è lo spazio delle funzioni di classe C^∞ su \mathbb{R} , e A è l'algebra complessa degli operatori misti di derivazione e traslazione in una variabile, si ha che ogni funzione periodica e di classe C^∞ sta in $t(X)$, mentre, in base ai risultati che vedremo in seguito, $E_\infty(X)$ coincide con lo spazio delle combinazioni lineari finite di prodotti di polinomi per esponenziali.

Infine, si noti che, se $A' \supset A$ è un'algebra integra su \mathbb{C} , ${}_A E_\infty(A') = \{0\}$, se $\dim_{\mathbb{C}} A = +\infty$.

2. Se A è l'anello degli operatori differenziali lineari a coefficienti costanti in una variabile, ed $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathbb{R})$ è lo spazio delle funzioni di classe C^∞ su \mathbb{R} , è immediato verificare che ${}_A E_\infty(\mathcal{C})$ coincide con l'insieme di tutte le combinazioni lineari finite a coefficienti complessi di prodotti di polinomi per esponenziali. Ci si può chiedere per quali \mathbb{C} algebre A di operatori lineari sullo spazio vettoriale delle funzioni di classe C^∞ su \mathbb{R}^n continua a valere l'analogo risultato (in n variabili).

Diamo la seguente

DEFINIZIONE: sia A una \mathbb{C} -algebra, integra e con identità, di operatori lineari su $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$. A si dice una E -algebra (relativamente ad $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$) se, per ogni p , $0 \leq p \leq +\infty$, ${}_A E_p(\mathcal{C}(\mathbb{R}^n))$ è costituito dalla totalità delle combinazioni lineari finite di prodotti del tipo:

$$x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} e^{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n}, \text{ ove } \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$$

e

$$\prod_1^n (i_k + 1) < p + 2.$$

Segue immediatamente dalla definizione che se A è una E -algebra, se $\lambda \in A$, e se $x \in E_p(\mathcal{C}(\mathbb{R}^n))$, allora $\lambda x \in E_p(\mathcal{C}(\mathbb{R}^n))$.

Enunciamo (la dimostrazione non presenta difficoltà) il seguente

TEOREMA 3: *sia A una E -algebra, ed X un sotto- A -modulo di $\mathcal{C}_m(\mathbb{R}^n)$. Allora, ${}_A E_p(X)$ è costituito dai vettori di $X \subset \mathcal{C}_m(\mathbb{R}^n)$ le cui componenti s -esime sono combinazioni lineari finite a coefficienti complessi di prodotti del tipo:*

$$x_1^{i_{s1}} \dots x_n^{i_{sn}} e^{\alpha_{s1}x_1 + \dots + \alpha_{sn}x_n}, \text{ ove } \alpha_{s1}, \dots, \alpha_{sn} \in \mathbb{C}$$

e

$$\sum_s^m \left(\prod_1^n (i_{sk} + 1) \right) < p + 2.$$

Ovviamente, nell'enunciato deve intendersi che, se $\lambda \in A$, e $v = (v_1, \dots, v_m) \in \mathcal{C}^m$, allora $\lambda v = (\lambda v_1, \dots, \lambda v_m)$.

Il teorema seguente assicura che esistono effettivamente delle E -algebre (relativamente ad $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$):

TEOREMA 4: *sono E -algebre:*

l'algebra \mathcal{D} degli operatori di derivazione parziale in n variabili, a coefficienti costanti.

l'algebra \mathcal{T} degli operatori di traslazione in n variabili.

Proviamo il risultato per \mathcal{D} ; le difficoltà della dimostrazione, per \mathcal{T} , sono le stesse.

Se $\varphi(x_1, \dots, x_n) = x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} e^{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n}$, è ovvio che $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{D}\varphi = \prod_1^n (i_k + 1)$; infatti, i prodotti $x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n} e^{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n}$ (ove $0 \leq j_k \leq i_k$ per $k = 1, 2, \dots, n$) costituiscono una base dello spazio vettoriale complesso $\mathcal{D}\varphi$.

Viceversa, data $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ tale che $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{D}\varphi \leq p + 1$, tenendo fisse le $n - 1$ variabili $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$ si prova che, rispetto alla variabile x_j , φ si esprime come combinazione lineare — a coef-

ficienti di classe C^∞ dipendenti dalle altre $n - 1$ variabili — di prodotti di polinomi per esponenziali. Ciò è vero per ogni $j, 1 \leq j \leq n$, onde φ è combinazione lineare di prodotti di polinomi per esponenziali (in n variabili). In sostanza, ci si riconduce ad un « principio di identità » per i polinomi-esponenziali.

Ove non sorgono ambiguità, con il simbolo $E_p(\mathcal{C})$ indicheremo il A -modulo ${}_A E_p(\mathcal{C})$, ove A è una qualunque E -algebra.

Si noti che può accadere che, per qualche algebra A di operatori su $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, ${}_A E_\infty(\mathcal{C}) = E_\infty(\mathcal{C})$, mentre, per qualche $p < +\infty$, ${}_A E_p(\mathcal{C}) \neq E_p(\mathcal{C})$ (gli esempi sono di facile realizzazione).

Per le applicazioni all'analisi, interessano le E -algebre di operatori su $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ che commutano con le traslazioni. Per esse, vale il seguente :

TEOREMA 5: *siano A, A' due algebre (integre) di operatori su $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ che commutano con le traslazioni, $A' \supset A$.*

Se A è una E -algebra, anche A' è una E -algebra.

Per ogni $x \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, $\dim_{\mathbb{C}} A'x \geq \dim_{\mathbb{C}} Ax$, onde se $\dim_{\mathbb{C}} A'x \leq p + 1$, anche $\dim_{\mathbb{C}} Ax \leq p + 1$, cioè $x \in E_p(\mathcal{C})$.

Viceversa, se $\varphi \in S_p(\mathcal{C})$ e $\lambda' \in A'$, osserviamo che per ogni $\lambda \in A$

$$\begin{aligned} \lambda(\lambda'\varphi) &= (\lambda\lambda')\varphi = (\lambda'\lambda)\varphi = \lambda'(\lambda\varphi) = \lambda' \left(\sum_0^p c_i \lambda_i \varphi \right) = \sum_0^p c_i (\lambda'\lambda) \varphi = \\ &= \sum_0^p c_i (\lambda_i \lambda') \varphi = \sum_0^p c_i \lambda_i (\lambda'\varphi); \text{ quindi, } \lambda'\varphi \in E_p(\mathcal{C}). \end{aligned}$$

La conclusione $\dim_{\mathbb{C}} A'\varphi \leq p + 1$ si ottiene subito dal seguente lemma :

LEMMA: *se A è un'algebra di operatori su $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ che commutano con le traslazioni, allora se $\varphi(x_1, \dots, x_n) = x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} e^{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n}$ e $\lambda \in A$ $\lambda\varphi$ è prodotto di un polinomio nelle n variabili x_1, \dots, x_n per $e^{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n}$.*

Tenuto conto del fatto che gli elementi di A commutano con le traslazioni, ci si può ridurre al caso di una sola variabile, e quindi procedere per induzione (sul grado polinomiale del monomio φ).

Dal teorema 5 si deduce il seguente corollario :

COROLLARIO : $\mathcal{C}'(\mathbb{R}^n)$ è una E -algebra.

Per la validità del teorema 5 è essenziale l'ipotesi che gli elementi di \mathcal{A}' commutino con le traslazioni; altrimenti, una sopraalgebra (integrata e commutativa) di una E -algebra può non essere una E -algebra. Ad esempio, se noi consideriamo su $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ gli operatori misti di derivazione, e di contrazione intera della variabile, cioè gli operatori della forma: $\sum_{i,j}^m \alpha_{ij} D^i T_j$ ove $D^i T_j (f(x)) = f^{(i)}(jx)$, abbiamo che $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A} \text{ sen } x = +\infty$ (\mathcal{A} indica l'algebra degli operatori misti di derivazione e contrazione intera della variabile).

3. Se T è un operatore lineare su $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ che commuta con le traslazioni, interessa studiare le combinazioni lineari di prodotti di polinomi per esponenziali appartenenti al nucleo di T , cioè ${}_{\mathcal{C}}E_{\infty}(Ker T)$ che indicheremo, al solito, con $E_{\infty}(Ker T)$ solamente (si noti che, se T commuta con le traslazioni, $Ker T$ è un \mathcal{C} -modulo, onde possiamo applicare il teorema 3).

Consideriamo, su $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, la topologia della convergenza uniforme delle funzioni e di tutte le loro derivate sugli insiemi compatti di \mathbb{R}^n .

Sia T un operatore continuo rispetto a tale topologia, che commuta con le traslazioni: allora, $T \in \mathcal{C}'(\mathbb{R}^n)$. Vale il seguente

LEMMA : se $T \in \mathcal{C}'(\mathbb{R}^n)$, $E_{\infty}(T) : E_{\infty}(\mathcal{C}) \rightarrow E_{\infty}(Im T)$ è epimorfismo.

Sia $T \neq 0$ ed $x^p e^{ax} \in E_{\infty}(Im T)$. Proviamo che $x^p e^{ax} = T\varphi$, ove $\varphi \in E_{\infty}(\mathcal{C})$ (la dimostrazione, nel caso di n variabili, $n > 1$, è solo formalmente più complicata).

Per $s \geq p$, consideriamo $T x^s e^{ax} = \sum_0^s \beta_i x^i e^{ax}$; per qualche $s = \bar{s}$, $\beta_p \neq 0$ (altrimenti, $x^s e^{ax} \in Ker T$ per ogni s , assurdo se $T \neq 0$, $T \in \mathcal{C}'$); si può allora costruire una funzione $\varphi(x) = \frac{1}{\beta_p} x^{\bar{s}} e^{ax} + \dots + c_0 e^{ax}$ tale che $T\varphi = x^p e^{ax}$.

Dal lemma segue il teorema :

TEOREMA 6: *sia $T \in \mathcal{C}'(\mathbb{R}^n)$, $T \neq 0$; se $E_\infty(Ker T) \neq \{0\}$, allora, per tutti i p , $0 \leq p < +\infty$, $E'_p(Ker T) \neq \{0\}$.*

Operando nella categoria degli \mathcal{C}' -moduli, dalla sequenza esatta:

$$0 \rightarrow Ker T \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow Im T \rightarrow 0$$

si ottiene la sequenza esatta ($0 \leq p < +\infty$):

$$0 \rightarrow E_p(Ker T) \rightarrow E_p(\mathcal{C}) \xrightarrow{E_p(T)} E_p(Im T) \rightarrow E'_p(Ker T) \rightarrow \dots$$

Se $E_p(T)$ non è epimorfismo, si deduce subito che non può essere $E'_p(Ker T) = 0$.

Proviamo che se $E_\infty(Ker T) \neq 0$, allora $E_p(T)$ non può essere epimorfismo; proviamolo nel caso $n = 1$; per $n > 1$, le maggiori difficoltà sono solo formali.

Supponiamo che $x^p e^{ax} \in E_\infty(Ker T)$; allora, $x^p e^{ax} \in E_p(Im T)$ mentre $x^p e^{ax} \notin T(E_p(\mathcal{C}))$.

Se $x^p e^{ax} \in Ker T$, si può poi verificare che, per ogni $0 \leq s \leq p$, $x^s e^{ax} \in Ker T$; infatti, indicata con T_h la traslazione di ampiezza h ,

$$\begin{aligned} T_h(Tx^p e^{ax}) &= 0 = T(T_h x^p e^{ax}) = T(x+h)^p e^{a(x+h)} = \\ &= Tx^p e^{a(x+h)} + Tp x^{p-1} h e^{a(x+h)} + \dots + Th^p e^{ax} e^{ah} = \\ &= 0 + e^{ah}(hTx^{p-1} e^{ax} + \dots + h^p Te^{ax}) = 0 \end{aligned}$$

onde, per l'arbitrarietà di h , $Tx^{p-1} e^{ax} = \dots = Te^{ax} = 0$.

Questo ci dice che, per ogni $k \leq p$, $E'_k(Ker T) \neq \{0\}$.

Proviamo ora che, se $k > p$, $k < +\infty$, allora $E'_k(Ker T) \neq \{0\}$. Basta provare che, se $Tx^p e^{ax} = 0$, e

$$k > p, Tx^k e^{ax} = \beta_{k-p} x^{k-p} + \dots + \beta_0 e^{ax};$$

ma ciò segue subito osservando che deve ancora essere

$$T(x+h)^k e^{a(x+h)} = T_h(Tx^k e^{ax})$$

e ricordando che, per tutti gli indici $i \leq p$, $Tx^i e^{ax} = 0$.

Le condizioni per la validità del teorema 6 non possono essere attenuate, in modo essenziale; in particolare, non può essere eliminata l'ipotesi di continuità di T . Consideriamo infatti il sottospazio Y di $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ costituito dalle funzioni $P(x)e^x$, ove $P(x)$ è un polinomio nella variabile x ; e consideriamo l'operatore T che opera come identità su $\mathcal{C}(\mathbb{R}) - Y$ ed annulla gli elementi di Y . T commuta con le traslazioni; $E_\infty(Ker T) = Ker T$, mentre, per ogni

$$p < +\infty, E'_p(Ker T) = \{0\}.$$

Il teorema 6, noti i risultati di Malgrange [3] ed Ehrenpreis [2] sulla densità, nello spazio delle soluzioni di un'equazione di convoluzione, delle soluzioni combinazioni lineari finite di prodotti di polinomi per esponenziali, consente di dedurre immediatamente che, se $Ker T \neq \{0\}$, allora $E'_p(Ker T) \neq \{0\}$ per tutti i $p < +\infty$.

Viceversa, il teorema 6, unito al teorema che segue, può essere utilizzato per dimostrare che dato un operatore $T \in \mathcal{C}'(\mathbb{R}^n)$, se $Ker T \neq \{0\}$ allora $E_\infty(Ker T) \neq 0$; ciò può presentare un certo interesse in quanto le dimostrazioni del teorema 6 e del successivo teorema 7 richiedono soltanto che $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ sia uno spazio vettoriale topologico di funzioni, sulle quali operano le traslazioni, e nel quale è una parte densa la totalità delle funzioni prodotto di polinomi per una funzione esponenziale fissata (non nulla).

TEOREMA 7: *sia Λ una E -algebra di operatori che commutano con le traslazioni, tale che ${}_\Lambda E'_p(\mathcal{C}) = \{0\}$ per ogni $0 \leq p \leq +\infty$; sia T un operatore su $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ che commuta con le traslazioni e con gli elementi di Λ . Se per qualche $0 \leq p < +\infty$ ${}_\Lambda E'_p(Ker T) \neq \{0\}$ allora $E_\infty(Ker T) \neq \{0\}$,*

dalla sequenza esatta di Λ -moduli,

$$0 \rightarrow Ker T \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow T(\mathcal{C}) \rightarrow 0$$

si ottiene la sequenza esatta:

$$0 \rightarrow E_p(Ker T) \rightarrow E_p(\mathcal{C}) \rightarrow E_p(Im T) \rightarrow E'_p(Ker T) \rightarrow 0$$

supponiamo che, per un certo p , $E'_p(\text{Ker } T) \not\equiv \{0\}$; allora esiste

$$\varphi(x_1, \dots, x_n = x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} e^{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n} \in E_p(T(\mathcal{C}))$$

tale che $\prod_1^n (i_k + 1) = p + 1$, e $\varphi \notin T(E_p(\mathcal{C}))$.

Consideriamo $T\varphi = \sum_s^p \beta_s x_1^{i_s} \dots x_n^{i_{ns}} e^{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n}$ (ove i_{ks} è una successione decrescente di indici, con $0 \leq i_{ks} \leq i_k$); se $i_{k0} = i_k$ per tutti gli indici $k = 1, 2, 3, \dots, n$, deve essere $\beta_0 = 0$, altrimenti, operando su φ con T e con opportuni elementi di Λ , potrei ottenere $\varphi \in T(E_p(\mathcal{C}))$.

Se $\beta_0 = 0$, si deduce immediatamente che, per qualche $\psi \in E_p(\mathcal{C})$, $T\psi = 0$: infatti, $\dim_{\mathbb{C}} T(\Lambda\varphi) < \dim_{\mathbb{C}} \Lambda\varphi$.

OSSERVAZIONE: se $n = 1$, ogni E -algebra principale (o di Bezout) Λ soddisfa alla condizione del teorema 7, in quanto ${}_{\Lambda}E'_p(\mathcal{C}) = \{0\}$ per ogni p .

4. Nel caso di una variabile $E_p(\text{Ker } T) = E_{\infty}(\text{Ker } T)$ se $T \in \mathcal{D}$ e $p + 1$ è uguale al grado (polinomiale) di T .

Ciò giustifica la seguente

DEFINIZIONE: sia T un endomorfismo di $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ che commuta con le traslazioni. Diremo grado di T , e lo indicheremo con $\omega(T)$, il minimo intero positivo p tale che $E_{p-1}(\text{Ker } T) = E_p(\text{Ker } T) \not\equiv \{0\}$; se $E_{\infty}(\text{Ker } T) = \{0\}$ porremo $\omega(T) = -\infty$; se $E_{p-1}(\text{Ker } T) \not\equiv E_p(\text{Ker } T)$ per tutti i $p > 0$, porremo $\omega(T) = +\infty$.

Esistono delle distribuzioni a supporto compatto che operano su $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ come operatori di grado finito, e che non sono operatori di derivazione: in particolare, la funzione caratteristica dell'intervallo aperto di estremi -1 ed 1 è una distribuzione di grado 1.

Sia Λ una E -algebra tale che ${}_{\Lambda}E'_p(\mathcal{C}) = \{0\}$ per ogni p ; sia $T \in \mathcal{C}'(\mathbb{R}^n)$, $\omega(T) < +\infty$ e $p \geq \omega(T) - 1$.

Consideriamo il diagramma:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & E_p(Ker T) & \longrightarrow & E_p(\mathcal{C}) & \longrightarrow & T(E_p(\mathcal{C})) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \mathcal{L} & & \downarrow & & \downarrow \alpha \\
 0 & \longrightarrow & E_\infty(Ker T) & \longrightarrow & E_\infty(\mathcal{C}) & \longrightarrow & T(E_\infty(\mathcal{C})) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

applicando il « lemma dei 5 », si deduce subito che α è monomorfismo. Formiamo il diagramma :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & \longrightarrow & E'_p(Ker T) \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \mathcal{L} \\
 0 & \longrightarrow & T(E_p(\mathcal{C})) & \longrightarrow & E_p(T(\mathcal{C})) & \longrightarrow & E'_p(Ker T) \longrightarrow 0 \\
 & & \alpha \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & T(E_\infty(\mathcal{C})) & \xrightarrow{\beta} & E_\infty(T(\mathcal{C})) & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & T(E_\infty(\mathcal{C}))/T(E_p(\mathcal{C})) & \longrightarrow & (E_\infty(T(\mathcal{C}))/E_p(T(\mathcal{C}))) & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

in esso, α è monomorfismo (in base all'osservazione precedente) e β è isomorfismo (come segue dal lemma al teorema 6).

Si ottiene quindi la sequenza esatta :

$$(I) \quad 0 \longrightarrow E'_p(Ker T) \longrightarrow T(E_\infty(\mathcal{C}))/T(E_p(\mathcal{C})) \longrightarrow E_\infty(T(\mathcal{C}))/E_p(T(\mathcal{C})) \longrightarrow 0$$

che porge $E'_p(Ker T)$ come nucleo di un epimorfismo, indotto da inclusioni, tra A -moduli che restano determinati una volta noto $E_{\omega(T)-1}(Ker T)$.

In conclusione, potremo dire che, se $p > \omega(T) - 1$, $E'_p(Ker T)$ è individuato da $E'_{\omega(T)-1}(Ker T)$ mediante la sequenza (I).

PARTE II - APPLICAZIONE: UN TEOREMA DI SINTESI
SPETTRALE. ESTENSIONI.

5. Consideriamo, in $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, la topologia usuale (convergenza uniforme delle funzioni e delle loro derivate sugli insiemi compatti di \mathbb{R}^n).

Malgrange ed Ehrenpreis hanno provato che, se $T \in \mathcal{C}'(\mathbb{R}^n)$, le soluzioni combinazioni lineari finite di prodotti di polinomi per

esponenziali sono dense in $\text{Ker } T$; analogo risultato è stato provato da Malgrange [3] per certi sistemi di equazioni di convoluzione (con condizioni sulla matrice dei coefficienti), e da Malgrange [4] e Palamodov [5] per i sistemi di equazioni lineari alle derivate parziali ed a coefficienti costanti.

Assumiamo, in $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, una topologia di spazio vettoriale topologico tale che $\overline{E_\infty(\text{Ker } T)} = \text{Ker } T$ per ogni operatore T appartenente ad una algebra bezoutiana Λ di operatori che commutano con le traslazioni. Vale il seguente

TEOREMA 8: *se $\Phi: \mathcal{C}^p \rightarrow \mathcal{C}^q$ è un sistema a coefficienti in Λ ,*

$$\overline{E_\infty(\text{Ker } \Phi)} = \text{Ker } \Phi.$$

Sia $L = (\lambda_{ij})$ la matrice dei coefficienti; la sequenza:

$$0 \rightarrow \text{Ker } L \rightarrow \Lambda^p \xrightarrow{L} \Lambda^q \rightarrow \text{coker } L \rightarrow 0$$

è una risoluzione libera di $\text{coker } L$; tensorializzando con i Λ -moduli \mathcal{C} ed $E_\infty(\mathcal{C})$, si ottengono (come in [1]) le due sequenze esatte:

$$(II) \quad 0 \rightarrow \mathcal{C}^k \rightarrow \text{Ker } \Phi \rightarrow \bigoplus_{i=1}^s \text{Ker } \Phi_i \rightarrow 0$$

$$\text{ove } \Phi_i \in \Lambda, \quad \Phi_i: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$$

e:

$$(III) \quad 0 \rightarrow (E_\infty(\mathcal{C}))^k \rightarrow \text{Ker } E_\infty(\Phi) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^s \text{Ker } E_\infty(\Phi_i) \rightarrow 0$$

ove $E_\infty(\Phi_i)$, $E_\infty(\Phi)$ indicano le restrizioni ad $E_\infty(\mathcal{C})$, $(E_\infty(\mathcal{C}))^p$, rispettivamente della mappa Φ_i e della matrice L .

Si verifica facilmente che $\text{Ker } E_\infty(\Phi_i) = E_\infty(\text{Ker } \Phi_i)$, e che $\text{Ker } E_\infty(\Phi) = E_\infty(\text{Ker } \Phi)$; inoltre, possiamo pensare le sequenze (II) e (III) realizzate come sequenze di sottospazi vettoriali di \mathcal{C}^p ; ne viene che — come spazi vettoriali —

$$\text{Ker } \Phi = \mathcal{C}^k \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^s \text{Ker } \Phi_i \right)$$

e :

$$E_{\infty}(Ker \Phi) = (E_{\infty}(\mathcal{C}))^k \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^s E_{\infty}(Ker \Phi_i) \right).$$

Dalla densità di $(E_{\infty}(\mathcal{C}))^k$ in \mathcal{C}^k e di $E_{\infty}(Ker \Phi_i)$ in $Ker \Phi_i$ per ogni i , si deduce che $E_{\infty}(Ker \Phi)$ è denso in $Ker \Phi$.

6. I funtori ${}_A E_p$ sono stati studiati, nei paragrafi precedenti, come operanti su sotto- \mathcal{A} -moduli dello spazio delle funzioni di classe C^{∞} su \mathbb{R}^n . Anche la definizione di E -algebra è stata data relativamente allo spazio $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$.

Appare però evidente che quasi tutte le considerazioni fatte possono essere estese ad altri spazi di funzioni, in particolare lo spazio $C^0(\mathbb{R}^n)$ delle funzioni continue su \mathbb{R}^n , o lo spazio $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ delle funzioni analitiche sullo spazio complesso n -dimensionale \mathbb{C}^n ; come pure a spazi di distribuzioni su \mathbb{R}^n contenenti $C^0(\mathbb{R}^n)$. Si può provare che l'algebra \mathcal{T} delle traslazioni reali è una E -algebra relativamente a ciascuno degli spazi indicati, e si possono estendere senza difficoltà i teoremi 3, 5, 6, 7, 8.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BOERO P.: *Metodi analogici elementari...* Rend. Sem. Padova, 1967, 37.
- [2] EHRENPREIS, L.: *Mean Periodic Functions, I.* Am. J. of Math., 1955, 77.
- [3] MALGRANGE, B.: *Existence et Approximation des Solutions, ...* Am. Inst. Fourier, 1955-56, VI.
- [4] MALGRANGE, B.: *Colloque sur les eq. aux der. part.*, CNRS, Paris 1962.
- [5] PALAMODOV, V. P., *Doklady Ak. Nauk. SSSR*, 1963, 148 (3).

Manoscritto pervenuto in redazione il 25 luglio 1968.