RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

HERMANN HEINEKEN

Regelmässige Vielecke und ihre Diagonalen II

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 41 (1968), p. 332-344

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1968__41__332_0>

REGELMÄSSIGE VIELECKE UND IHRE DIAGONALEN II

HERMANN HEINEKEN *)

In früheren Arbeiten ist gezeigt worden [1,2], dass ein regelmässiges Vieleck mit ungerader Eckenzahl keine drei Diagonalen besitzt, die durch einen Punkt gehen. Bei Vielecken mit gerader Eckenzahl gibt es bekanntlich Tripel von Diagonalen, die sich in einem Punkt schneiden, zum Beispiel bilden zwei zu einer Mittelpunktsdiagonale symmetrische Diagonalen zusammen mit ihrer Symmetrieachse ein solches Tripel. Dass es im Allgemeinen auch nichtsymmetrische Tripel gibt, werden wir in einem Beispiel am Ende der Arbeit sehen. Ziel dieser Arbeit ist es, eine Schranke anzugeben für die Anzahl der Vielecksdiagonalen, die durch einen Punkt gehen, wenn die Eckenzahl des Vielecks teilerfremd zu drei ist. Wir erhalten in diesem Fall (Satz 2), dass nur der Mittelpunkt des Vielecks auf mehr als drei verschiedenen Diagonalen liegen kann. Der Beweis dieser Aussage in Abschnitt 2 macht Gebrauch von einfachen Tatsachen der Galoistheorie, insbesondere von den Möglichkeiten, bestimmte lineare Gleichungen in 12 Einheitswurzeln zu lösen (Satz 1), die in Abschnitt 1 gesammelt sind und sicher weitgehend bekannt sind.

---

*) Der Verfasser ist dem Department of Pure Mathematics and Mathematical Statistics der University of Cambridge dankbar für die Gastfreundschaft und Unterstützung, die er während der Entstehung dieser Arbeit genoss: ebenso dankt er der Metallgesellschaft.

Indirizzo nuovo dell'A.: Mathematisches Institut de Universität, 852 Erlangen, Bismarckstr. 1 $^1/_2$, Germania.

Eckpunkte des Vielecks werden grundsätzlich nicht als Diagonalenschnittpunkte betrachtet.

Diese Arbeit ist Professor F. Bachmann zum 60. Geburstag gewidment.

1. Zerfallende Gleichungen.

Wir sagen, dass die Gleichung $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$ zerfällt, wenn bei passender Indizierung und für ein k mit $1 < k < n$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{i=k+1}^{n} a_i = 0.$$

Entsprechend bedeutet « die Gleichung $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$ zerfällt in Paare », wenn bei passender Indizierung gilt: $a_{2k-1} + a_{2k} = 0$ für alle k mit $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$.

In diesem Abschnitt wollen wir eine Aussage darüber gewinnen, wann die Summe von 12 Einheitswurzeln verschwinden kann. Wir beginnen mit drei Hilfssätzen. Die Grösses a_j und b_j sind in diesem Abschnitt Einheitswurzeln.

Lemma 1: Ist die Gleichung $1 + \sum_{j=2}^{t} a_j = 0$ erfüllt, wobei nicht alle a_j quadratfreie Ordunug haben, so zerfällt die Gleichung.

Beweis: Sei p^s mit $s > 2$ der grösste p-Potenz-Teiler, der in den Ordnungen der a_j auftritt, und sei die Ordnung von a_2 durch p^s teilbar. Ist z eine primitive p^s-te Einheitswurzel, so kann man bekanntlich jedes a_j als Produkt $b_j z^{m_j}$ schreiben, sodass die Ordnung von b_j teilerfremd zu p ist. In dem von den Summanden a_j erzeugten Körper über den rationalen Zahlen gibt es einen Automorphismus, der alle b_j festlässt und z auf $z^{1+p^{s-1}}$ abbildet. Dies folgt aus der Tatsache, dass es zu zwei beliebigen n-ten primitiven Einheitswurzeln einen Automorphismus gibt, der die eine auf die andere abbildet (siehe [3; S. 172]). Die in Lemma 1 angegebene Gleichung bleibt richtig bei Anwendung von Potenzen dieses Automorphismus, und indem wir alle p dadurch auftretenden Gleichungen aufsummieren, erhalten wir

$$p + \sum_{j=2}^{t} e_j b_j = 0,$$

wobei $e_j = 0$ falls $m_j \not\equiv 0 \mod p$ und $e_j = p$ für $m_j \equiv 0 \mod p$. Nun ist $e_2 = 0$ und die Gleichung zerfällt.

LEMMA 2: Die Gleichung $1 + \sum_{j=2}^{t} a_j = 0$ sei erfüllt; sei $a_j = b_j z^{m_j}$, z eine primitive p-te Einheitswurzel, b_j Einheitswurzeln von zu p primer Ordnung und seien die m_j nicht negativ und kleiner als p gewählt. Treten für m_j einige, aber nicht alle positiven Zahlen kleiner als p auf, so zerfällt die Gleichung. Insbesondere zerfällt die Gleichung, wenn eine Primzahl $p > t$ eine der Ordnungen der a_j teilt.

Beweis: Die zweite Behauptung ist direkte Folge der ersten. — Zum Beweis der ersten Behauptung ordnen wir nach Potenzen von z und erhalten

$$\sum_{i=0}^{p-1} B_i z^i = 0, \quad \text{wobei} \quad B_i = \sum_{m_j=1} b_j .$$

Nach Voraussetzung ist $B_i = 0$ für mindestens ein i. Es gibt nun Automorphismen, die z in jede beliebige von 1 verschiedene Potenz erheben und alle b_j (und damit alle B_i) festlassen. Dadurch erhält man $p - 1$ Gleichungen für die (höchstens) $p - 1$ Grössen B_i, und die dabei entstehende Koeffizientendeterminante verschwindet nicht; sie ist das Produkt aller Differenzen von Potenzen z^i mit $B_i \neq 0$. Daher verschwinden alle B_i, und die Gleichung zerfällt.

Treten als m_j alle nichtnegativen Zahlen kleiner als p auf, so erhält man entsprechend $B_0 = B_1 = \dots = B_{p-1}$, da die Summe aller p-ten Einheitswurzeln für jedes p verschwindet.

Wir werden jetzt folgende Voraussetzung verwenden:

(T) Alle a_j sind Einheitswurzeln von zu 3 teilerfremder Ordnung.

Das folgende Lemma sammelt die (sicherlich bekannten) Tatsachen, die wir für Satz 1 benötigen.

Lemma 3: Gilt die Gleichung $1 + \sum_{j=2}^{t} a_j = 0$ unter der Voraussetzung (T), so ergibt sich.

(1) Für $t = 3$ ist die Gleichung unlösbar.

(2) Für $t = 4$ zerfällt die Gleichung (in Paare).

(3) Für $t = 5$ durchlaufen die a_j alle von 1 verschiedenen fünften Einheitswurzeln.

(4) Für $t = 6$ zerfällt die Gleichung (in Paare)

(5) Für $t = 7$ durchlaufen die a_j alle von 1 verschiedenen siebten Einheitswurzeln oder die Gleichung zerfällt.

(6) Für $t = 8$ zerfällt die Gleichung (in Paare).

Beweis: Zerfällt die Gleichung in den Fällen (1) und (2) nicht so sind die a_j identisch mit 1 oder -1, und dies führt in beiden Fällen zum Widerspruch. Wegen Fall (1) kann die Gleichung im Fall (3) nicht zerfallen, und darum müssen die a_j zehnte Einheitswurzeln sein. Der angegebene Fall ist der einzig mögliche. Würde die Gleichung im Fall (4) nicht zerfallen, so wären die a_j zehnte Einheitswurzeln, und Lemma 2 oder Fall (1) ergeben einen Widerspruch. Treten im Fall (5) Einheitswurzeln auf, die durch sieben teilbare Ordnung haben, und zerfällt die Gleichung nicht, so bleibt nur der angegebene Fall. Zerfällt im Fall (6) die Gleichung nicht, so sind die a_j 70 te Einheitswurzeln. Treten überhaupt a_j auf deren Ordnung durch sieben teilbar ist, so erhält man durch Ordnung nach Potenzen der siebten Einheitswurzeln (wie in Lemma 2 beschrieben) für jede Potenz mindestens einen Summanden, für eine Potenz zwei Summanden. Dies ergibt einen Widerspruch zu Fall (1). Sind alle a_j nur zehnte Einheitswurzeln, so ordnen wir diesmal nach den Potenzen der fünften Einheitswurzeln uud erhalten, dass mindestens zwei dieser Potenzen in nur einem Summanden auftreten. Wegen (1) kann dann auch keine Potenz genau zweimal in Summanden auftreten. Daher treten vier Potenzen einmal und eine Potenz viermal auf. Die Summanden, die zur gleichen Potenz der fünften Einheitswurzel gehören, unterschiden sich jedoch höchstens um einen Faktor -1, und man sieht, dass man zu einem Widerspruch zu Lemma 2 geführt wird. Die Gleichung zerfällt daher im Fall (6). Da alle Einheitswurzeln von 0 verschieden sind, zerfällt die Gleichung im Fall (2) in Paare, das entsprechende folgt im Fall (4) aus (1) und (2) und im Fall (6) aus (4) und (1).

Satz 1: Gilt die Gleichung $\sum_{j=1}^{6}(a_j - a_j^{-1}) = 0$ und die Voraussetzung (T); zerfällt die Gleichung nicht in Paare, so hat sie eine der folgenden Formen:

$$(A) \qquad i\sum_{j=0}^{6} z^j + i\sum_{j=0}^{4} y^j = 0,$$

$$(B) \qquad (d - d^{-1})\sum_{j=0}^{4} y^j + 1 - 1 = 0,$$

$$(C) \qquad i\sum_{j=1}^{6} z^j - i\sum_{j=1}^{4} y^j + 1 - 1 = 0,$$

wobei $i^2, d^2, y, z \neq 1$; $i^4 = y^5 = z^7 = 1$
und d eine Einheitswurzel von zu fünf teilerfremder Ordnung ist.

Beweis: Hat eines der a_j eine durch p^2 $(p \neq 2)$ teilbare Ordnung und ist z eine p^k-te Einheitswurzel, wobei p^k die höchst p-Potenz ist, die mindestens eine der Ordnungen der a_j teilt, so lässt sich jedes a_j schreiben als Produkt $b_j z^{m_j}$ mit $0 \leq m_j < p$, sodass die Ordnung von b_j höchstens durch p^{k-1} teilbar ist, und wir betrachten die Summen B_i wie in Lemma 2.

Hat eines der a_j eine durch 8 teilbare Ordnung und ist 2^n die höchste Potenz von 2, die in der Ordnung eines a_j aufgeht, so schreiben wir die Elemente a_j als Produkte $b_j z^{m_j}$, wobei z eine primitive 2^n-te Einheitswurzel ist und die Ordnung von b_j höchstens durch 2^{n-2} teilbar ist; $0 \leq m_j < 4$. Wieder bilden wir die Summen B_i entsprechend zu Lemma 2.

Hat nun eines der a_j eine durch $p \neq 2$ teilbare Ordnung, keines der a_j eine durch p^2 teilbare Ordnung, und bei der Zusammenfassung nach Potenzen der p-ten Einheitswurzel (wie in Lemma 2 beschrieben) treten einige Potenzen nicht auf, so bilden wir wiederum die Summen B_i wie in Lemma 2.

In allen diesen Fällen müssen die Summen B_i verschwinden, in den ersten beiden Fällen folgt dies aus Lemma 1, im letzten Fall aus Lemma 2. Durch die spezielle Form unserer Gleichung können wir in jedem Fall Aussagen über die Anzahl von Summanden in den Summen B_j machen, und es ergeben sich die folgenden Systeme von Summandenanzahlen der einzelnen B_i (die in diesem Fall zugleich Zerlegungen angeben):

(a) 6 ; 6	(e) 2 ; 2 ; 8
(b) 5 ; 5 ; 2	(f) 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 4
(c) 4 ; 4 ; 4	(g) 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2
(d) 4 ; 4 ; 2 ; 2	(h) 2 ; 2 ; 2 ; 6 (nur im 2. Fall)

Fall (g) ist in Satz 1 schon ausgesehlossen nach Voraussetzung, in den Fällen (a), (c), (d), (e), (f) und (h) zerfällt die Gleichung nach Lemma 3 weiter in Paare, un aus (b) ergibt sich nach Lemma 3 die Form (B) des Satzes.

Nun nehmen wir an, dass alle Potenzen einer p-ten Einheitswurzel auftreten, wenn ein a_j eine durch p teilbare Ordnung hat. Ist $p = 11$ eine solche Primzahl, so lautet das System der Summanden zur gleichen Potenz

$$1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 2$$

und eine solche Anordnung ist unmöglich nach Lemma 3 (1). Ist $p = 7$ eine solche Primzahl, so ergeben sich die Möglichkeiten

$$1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 6$$
$$1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 4$$
und
$$1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2.$$

Die letzten beiden Fälle sind dabei wegen Lemma 3 (1) unmöglich. Der erste Fall verlangt sieben Einheitswurzeln (von zu sieben teilerfremder Ordnung), deren Summe verschwindet. Die entsprechende Gleichung zerfällt daher nach Lemma 3 (5), und sie kann nur in ein Paar und den Rest zerfallen wegen Lemma 3 (1). Gehört der von den einzeln auftretenden Potenzen der siebten Einheitswurzel herrührende Summand zu dem Paar, so ergibt sich Form (A), sonst ergibt sich Form (C).

Treten nur fünfte (und vierte) Einheitswurzeln auf, so ergibt das System der Summanden geordnet nach Potenzen der fünften

Einheitswurzel

$$1\,;1\,;1\,;1\,;8$$
$$1\,;1\,;2\,;2\,;6,$$
$$2\,;2\,;2\,;2\,;4.$$

Die erste und zweite Fall ist unmöglih, da es keine Summe ungerade vieler 2^n-ter Einheitswurzeln gibt, die verschwindet. Der letzte Fall führt zu Form (*B*). Treten nur 2^n-te Einheitswurzeln auf, so zerfällt die Gleichung paarweise. Satz 1 ist damit bewiesen.

2. Diagonalen im Vieleck.

Es its bekannt, dass man zu einem gegebenen regelmässigen Vieleck eine Gauss-sche Zahlenebene so anordnen kann, dass alle Ecken Einheitswurzeln entsprechen und eine Ecke der Zahl 1 entspricht. Ist die Anzahl der Ecken n, so entspricht dann jeder Ecke eine Potenz z^a der primitiven n-ten Einheitswurzel z; und entsprechen sich nun Q, R, S, T, U, V und $z^q, z^r, z^s, z^t, z^u, z^v$ gegenseitig, so gehen die drei Diagonalen QR, ST und UV dann und nur dann durch einen Punkt, wenn gilt:

$$(*)\quad \begin{aligned} & z^{q+r+u}+z^{q+r+v}+z^{u+v+t}+z^{u+v+s}+z^{s+t+q}+z^{s+t+r} \\ & -z^{s+t+v}-z^{s+t+u}-z^{q+r+s}-z^{q+r+t}-z^{u+v+r}-z^{u+v+q}=0, \end{aligned}$$

wie man aus [1; S. 686] erhält und aus [2; Gleichung (5)] entwikkeln kann. Dividiert man die Gleichung (*) durch die Quadratwurzel von $z^{q+r+s+t+u+v}$, so erhält man eine Gleichung der in Satz 1 behandelten Form (man betrachte die in (*) untereinanderstehenden Glieder), und zusätzlich gilt sogar, dass das Produkt aller a_j genau 1 ist (man multipliziere alle Glieder der neuen Gleichung, die aus den Gliedern der ersten Zeile von (*) entstanden sind). Um zu sehen, dass die Formen (*A*), (*B*) und (*C*) des Satzes 1 nicht auftreten können, betrachten wir im Fall (*A*) und (*C*) die auftretende Potenz von i, und bei (*B*) die Potenz von d. Im Fall (*A*) ist das Produkt aller a_j von der Gestalt $i^6 z^m y^n \neq 1$, im Fall (*C*) ist das gleiche Produkt $\pm i^5 z^m y^n \neq 1$, und im Fall (*B*) ergibt sich $\pm d^k y^n$, wobei k eine der Zahlen $-5, -3, -1, 1, 3$ oder 5 ist. Da d eine zu fünf teilerfremde Ordnung hat, wäre dies nur möglich, wenn die Ordnung von d durch drei teilbar ist (und dann wäre unsere Liste in Satz 1 unvollständig). Durch Beschränkung auf Vielecke mit zu drei teilerfremder Eckenzahl erhalten wir daher

LEMMA 4: Treffen sich drei Diagonalen eines regelmässigen Vielecks, dessen Eckenzahl nicht durch drei teilbar ist, in einem Punkt, so zerfällt die dazugehörige Gleichung $(*)$ in Paare.

Wir wollen nun die Punkte, die auf drei Diagonalen liegen, klassifizieren. Zunächst gibt es solche Punkte auf Mittelpunktsdiagonalen. Wir erhalten:

LEMMA 5: In einem regelmässigen Vieleck mit zu drei teilerfremder Eckenzahl gibt es ausser dem Mittelpunkt keinen Punkt auf einer Mittelpunktsdiagonalen, der auf mehr als drei Diagonalen liegt.

Beweis: Wir nehmen an, dass die Gleichung $(*)$ gilt mit $z^q = -z^r$ und $z^u \neq -z^v$, und wir wollen zeigen, dass damit das Paar s, t bestimmt ist. Die Gleichung $(*)$ reduziert sich zu

$$(1) \qquad -z^{2r+u} - z^{2r+v} + z^{2r+t} + z^{2r+s} - z^{s+t+v} - z^{s+t+u} + \\ + z^{u+v+t} + z^{u+v+s} = 0.$$

Diese Gleichung zerfällt in Paare; wir suchen zunächst das Paar, in dem z^{2r+u} vorkommt. Zunächst sei

$$(2) \qquad -z^{2r+u} - z^{s+t+v} = 0$$

angenommen. Wegen $z^v \neq z^u \neq -z^v$ kann nicht gleichzeitig

$$-z^{2r+v} - z^{s+t+u} = 0$$

gelten. Für das Paar, in dem z^{2r+v} auftritt, gibt es nun noch zwei Möglichkeiten, die durch Vertauschen von S und T ineinander übergehen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir daher annehmen:

$$(3) \qquad -z^{2r+v} + z^{u+v+t} = 0$$

Dann folgt aber

(4) $$z^{2r} = z^{u+t}\,;\; z^{2r+s} - z^{s+t+u} = 0,$$

und

(5) $$z^{2r+}{}_t + z^{u+v+s} = 0.$$

Aus (2) und (5) erhält man

(6) $$z^u = -z^t;\; z^{2r} = z^{s+v};\; -z^{2r+u} + z^{u+v+s} = 0\,;\; z^{2r+t} - z^{s+t+v} = 0.$$

Wenn mann also wie in (1) ein Paar annimmt, dessen Exponenten sich zu $2r + s + t + u + v$ ergänzen, so kann man die Anordnung der Paare abändern, so dass dies nicht mehr so ist.

Vermeidet man Paare von Elementen, deren Exponenten sich ergänzen, so erhält man bei entsprechender Wahl von S, T, U und V

(7) $$-z^{2r+u} + z^{u+v+s} = 0$$

und

(8) $$-z^{2r+v} + z^{u+v+t} = 0,$$

und daraus ergibt sich $z^{u+t} = z^{v+s}$ und

(9) $$z^{u-v} = z^{s-t}.$$

Die Gleichungen (7) und (8) bestimmen nun S und T.

Gilt umgekehrt bei einem Diagonalentripel die Gleichung (9), so muss die dritte Diagonale (solange die Eckenzahl des Vielecks zu drei teilerfremd ist) eine Mittelpunktsdiagonale sein, denn die Diagonalen UV und ST liegen symmetrisch bezüglich der Geraden, die durch die Quadratwurzeln von $z^{v+s} = z^{u+t}$ geht, und diese Gerade tritt als Diagonale des Vielecks mit doppelt so vielen Ecken auf, das mit dem gegebenen die Hälfte der Ecken gemeinsam hat. Auf dies neue Vieleck kann man dann Lemma 5 anwenden, und erhält diese Feststellung.

Wir wollen nun die Tripel von Diagonalen durch einen Punkt betrachten, zu denen keine Mittelpunktsdiagonale gehört. Ausser Gleichung (*) haben wir dann noch vier Klassen von Ungleichungen zu erfüllen. Von jeder Klasse wird hier nur eine Ungleichung angegeben; die anderen Ungleichungen der gleichen Klasse entstehen durch Vertauschen der Diagonalen und durch Vertauschen der Eckpunkte auf einer Diagonalen.

(I) $$z^q \neq z^s$$

(II) $$z^q \neq - z^r \neq - z^q$$

(III) $$z^{q+r} \neq z^{s+t}$$

(IV) $$z^{q-r} \neq z^{s-t}.$$

Unter Benutzung dieser Einschränkungen kann man zwei Fälle für das Zerfallen von (*) unterscheiden; Entweder verschwindet schon die oberste Zeile von (*) und zerfällt also in Paare, oder (*) zerfällt so, dass nur zwei Paare vollständing in der obrsten Zeile liegen. Verschwindet die erste Zeile von (*), so kann man durch passende Wahl der Punktebezeichnung erreichen, dass gilt

(10) $$z^{q+r+u} + z^{u+v+t} = 0.$$

Für das Paar mit z^{q+r+v} ergeben sich dann noch zwei Möglichkeiten, die durch Vertauschen von Q und R ineinander übergehen. Wir wählen

(11) $$z^{q+r+v} + z^{s+t+q} = 0,$$

und dann bleibt nur noch

(12) $$z^{u+v+s} + z^{s+t+r} = 0.$$

Aus (10), (11) und (12) ergibt sich

$$z^{q+r+s+t+u+v} = - z^{v+t+r+v+t+r}$$

und daher

(13) $$z^{q+s+u} = - z^{r+t+v}.$$

Verschwindet dagegen die obere Zeile von (*) nicht, so können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass z^{q+r+u} und z^{u+v+t} die zwei Summanden aus der oberen Zeile von (*) sind, die sich mit Summanden der unteren Zeile zu 0 ergänzen. Dann erhalten wir

$$z^{q+r+u} - z^{s+t+v} = 0 \tag{14}$$

und

$$z^{u+v+t} - z^{q+r+s} = 0. \tag{15}$$

($z^{q+r+v} - z^{s+t+u} = 0$ ist unmöglich wegen $z^{2u} \neq z^{2v}$).

Aus (14) und (15) folgt

$$z^s = - z^u \,; \qquad z^{q+r} = - z^{t+v} \tag{16}$$

wegen $z^s \neq z^u$. Diese Gleichungen sind symmetrisch in q und r, und durch eventuelles Vertauschen von Q und R können wir erreichen, dass die Gleichungen

$$z^{q+r+v} + z^{s+t+q} = 0 \tag{17}$$

und

$$z^{u+v+s} + z^{s+t+r} = 0 \tag{18}$$

gelten. Aus (16), (17) und (18) folgt dann

$$z^{q+r+s+t+u+v} = - z^{t+v+r+v+t+r} \,,$$

und daraus folgt Gleichung (13). In beiden Fällen ergibt sich also eine Gleichung der Form (13). Diese Tatsache macht den Beweis des folgenden Salzes nun einfach.

Satz 2: In einem regelmässigen Vieleck mit zu drei teilerfremder Eckenzahl gehen nur durch den Mittelpunkt mehr als drei Diagonalen.

Beweis: Ist P ein vom Mittelpunkt verschiedener Punkt, durch den die vier verschiedenen Diagonalen AB, QR, ST, UV gehen, so liegt P nach Lemma 5 nicht auf einer Mittelpunktsdiagonale. Für jedes Tripel von Diagonalen erhalten wir eine Gleichung der Form von (13). Für das Tripel AB, QR, ST gilt ohne Peschränkung der Allgemeinheit

$$z^{a+q+s} = - z^{b+r+t} \,. \tag{19}$$

Wegen $z^{s-u} \neq z^{t-v}$ kann dann $z^{a+q+u} = - z^{b+r+v}$ nicht gleichzeitig gelten, und für das Tripel AB, QR, UV gilt ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$z^{a+r+u} = - z^{b+q+v} , \tag{20}$$

und für das Tripel AB, ST, UV bleibt dann nur noch

$$z^{a+t+v} = - z^{b+s+u} . \tag{21}$$

Multipliziert man nun die rechten und die linken Seiten der Gleichungen (19)-(21), so erhält man

$$z^{3a+q+r+s+t+u+v} = - z^{3b+q+r+s+t+u+v}$$

und daher

$$z^{3a} = - z^{3b} ,$$

und aus der Teilerfremdheit zu drei folgt nun

$$z^{a} = - z^{b}, \tag{22}$$

in Widerspruch zu Lemma 5. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Beispiele. Sei $P_0 P_1 \dots P_{2n-1}$ ein regelmässiges $2n$-Eck. Die folgenden drei Diagonalen gehen durch einen Punkt:

$$P_0 P_{n-1} , P_{2n-2} P_2 , P_{2n-1} P_4 .$$

Ist n grösser als 6, so liegt der Schnittpunkt auf keiner Symmetrieachse des Vielecks.

Die vier Diagonalen $P_0 P_6$, $P_2 P_{10}$, $P_3 P_{15}$ und $P_4 P_{20}$ des regelmässigen 24-Ecks $P_0 P_1 \dots P_{23}$ gehen durch einen Punkt. Die Teilerfremdheit zu 3 ist daher keine überflüssige Voraussetzung in Satz 2 und Lemma 5.

LITERATUR

[1] H. T. CROFT und M. FOWLER, *On a problem of Steinhaus about polygons.* Proc. Cambridge Phil. Soc. **57**, 686-688 (1961).

[2] H. HEINEKEN, *Regelmässige Vielecke und ihre Diagonalen.* L'Enseigment Mathématique VIII, 275-278 (1962).

[3] B. van der WAERDEN, *Algebra I, fünfte Auflage.* Berlin-Göttingen-Heidelberg 1960.

Manoscritto pervenuto in redazione il 27-5-68.

Zusatz bei der Korrektur (30-1-69) :

Inzwischen erfuhr ich, dass H. Harborth ähnliche Resultate erchielt, er hat u. a. Satz 2 bewiesen. Sein Arbeit wird in « Elemente der Mathematik » erscheinen.