RENDICONTI
*del*
SEMINARIO MATEMATICO
*della*
UNIVERSITÀ DI PADOVA

VINICIO VILLANI

**Sulla nozione di $q$-convessità per gli spazi complessi non ridotti**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 41 (1968), p. 326-331

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1968__41__326_0>

# SULLA NOZIONE DI $q$-CONVESSITÀ PER GLI SPAZI COMPLESSI NON RIDOTTI

VINICIO VILLANI *)

## 1. Introduzione.

Sia $X$ uno spazio complesso (ridotto). Dato un intero positivo $q$, si dice che $X$ è (*fortemente*) *$q$-convesso* se esiste su $X$ una funzione $\varphi$ a valori reali, differenziabile di classe $\mathcal{C}^\infty$, tale che:

(I) per ogni $c \in \mathbf{R}$, l'insieme $B_c = \{p \in X ; \varphi(p) < c\}$ è relativamente compatto in $X$;

(II) esiste un compatto $K \subset X$, tale che nei punti $p \in X - K$ la funzione $\varphi$ è *fortemente $q$-plurisubarmonica* (per la definizione di funzione fortemente $q$-plurisubarmonica, cfr. ad es. [4], § 4).

Se poi nella definizione precedente è possibile prendere $K = \emptyset$, lo spazio $X$ si dice *$q$-completo* [1]).

Andreotti e Grauert hanno provato in [1] che:

*Se $X$ è $q$-convesso, sussiste la seguente proprietà:*

($A_q$) *Dato un arbitrario fascio coerente $\mathcal{F}$ su $X$, si ha* $\dim_{\mathbf{C}} H^j(X, \mathcal{F}) < +\infty$, *per ogni intero $j \geq q$.*

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche per l'anno 1967-68.

Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica, Via Alberti, 4 16132 Genova.

[1]) Per omogeneità con la terminologia usata nei lavori citati nella bibliografia, si è mantenuta qui la definizione di spazio $q$-convesso e di spazio $q$-completo, quale era stata introdotta originariamente in [1]. Nei lavori più recenti, gli stessi spazi sono detti abitualmente $(q-1)$-convessi e $(q-1)$-completi.

*Se $X$ è $q$-completo, sussiste la seguente proprietà:*

($B_q$) *Dato un arbitrario fascio coerente $\mathcal{F}$ su $X$, si ha $H^j(X, \mathcal{F}) = 0$, per ogni intero $j \geq q$.*

Sia ora $(X, \mathcal{H})$ uno *spazio complesso generale* (non necessariamente ridotto); sia $(X, \mathcal{O})$ il corrispondente spazio complesso ridotto (cfr. ad es. [2]). Per definizione si dirà che $(X, \mathcal{H})$ è *$q$-convesso*, rispettivamente *$q$-completo*, se $(X, \mathcal{O})$ è $q$-convesso, rispettivamente $q$-completo, nel senso detto sopra.

Scopo di questo lavoro è dimostrare che i teoremi di Andreotti e Grauert sussistono più in generale anche per gli spazi complessi non ridotti. Precisamente:

Teorema. *Sia $(X, \mathcal{H})$ uno spazio complesso generale. Se $(X, \mathcal{H})$ è $q$-convesso, per $(X, \mathcal{H})$ sussiste la proprietà* ($A_q$). *Se $(X, \mathcal{H})$ è $q$-completo, per $(X, \mathcal{H})$ sussiste la proprietà* ($B_q$).

Osservazione: Naturalmente i fasci $\mathcal{F}$ che intervengono nelle proprietà ($A_q$) e ($B_q$) si intendono coerenti rispetto al fascio strutturale $\mathcal{H}$, e non necessariamente rispetto al fascio strutturale $\mathcal{O}$ della corrispondente struttura ridotta di $X$.

## 2. Dimostrazione del teorema.

La dimostrazione per il caso $q$-completo è un'estensione banale del teorema 3 di [2], § 2; del resto la tesi relativa al caso $q$-completo seguirà come caso particolare della dimostrazione che andiamo a dare per il caso $q$-convesso. Ricordiamo preliminarmente che se $X$ è uno spazio (ridotto) $q$-convesso, si ha:

Lemma 1 (cfr. [1], Teorema 14). *Esiste un aperto $B_0$ relativamente compatto in $X$, tale che l'omomorfismo naturale*

$$H^j(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^j(B_0, \mathcal{F})$$

*è bigettivo per ogni fascio coerente $\mathcal{F}$ su $X$, e per ogni $j \geq q$.*

Tenuto conto di questo lemma, possiamo provare il teorema per il caso $q$-convesso, estendendo opportunamente la dimostrazione del già citato teorema 3 di [2], § 2. Seguendo le notazioni di [2], indicheremo con red : $\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{O}$ l'applicazione naturale del fascio strutturale di $(X, \mathcal{H})$ sul fascio strutturale del corrispondente spazio ridotto. Sia $\mathcal{H}^{(1)}$ il fascio nucleo dell'applicazione red : $\mathcal{H} \to \mathcal{O}$; quindi $\mathcal{H}^{(1)}$ è un sottofascio di ideali di $\mathcal{H}$. Siano poi $\mathcal{H}^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ i sottofasci di ideali di $\mathcal{H}$, generati dagli elementi della forma $\vartheta_1 \cdot \ldots \cdot \vartheta_\nu$ con $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_\nu \in \mathcal{H}^{(1)}$. Si ha:

$$\mathcal{H} \underset{\text{def.}}{=} \mathcal{H}^{(0)} \supset \mathcal{H}^{(1)} \supset \mathcal{H}^{(2)} \supset \ldots .$$

Sussiste il

Teorema (cfr. [2], § 1, Teorema 4). *In corrispondenza ad ogni sottoinsieme relativamente compatto $B$ di $X$ esiste un (minimo) intero $k$, tale che* $\mathcal{H}^{(k)} \mid B = 0$.

Sia ora $\mathcal{F}$ un fascio $\mathcal{H}$-coerente arbitrario su $X$; poniamo $\mathcal{F}^{(\nu)} = \mathcal{F} \cdot \mathcal{H}^{(\nu)}$; risulta quindi $\mathcal{F}^{(0)} = \mathcal{F}$. Si hanno le successioni esatte (per $\nu = 0, 1, 2, \ldots$):

$$(1_\nu) \qquad 0 \to \mathcal{F}^{(\nu+1)} \to \mathcal{F}^{(\nu)} \to \mathcal{F}^{(\nu)}/\mathcal{F}^{(\nu+1)} \to 0.$$

I fasci $\mathcal{F}^{(\nu)}/\mathcal{F}^{(\nu+1)}$ si possono interpretare come fasci analitici relativamente alla struttura ridotta $(X, \mathcal{O})$ e inoltre dal fatto che $\mathcal{F}$ era $\mathcal{H}$-coerente segue che i fasci $\mathcal{F}^{(\nu)}/\mathcal{F}^{(\nu+1)}$ sono $\mathcal{O}$-coerenti.

Si considerino le successioni esatte di coomologia, associate alla successione esatta $(1_\nu)$, nelle dimensioni $j \geq q$:

$$(2_\nu) \qquad H^j(X, \mathcal{F}^{(\nu+1)}) \xrightarrow{\alpha_\nu} H^j(X, \mathcal{F}^{(\nu)}) \xrightarrow{\beta_\nu} H^j(X, \mathcal{F}^{(\nu)}/\mathcal{F}^{(\nu+1)}).$$

Dai risultati di [1], valevoli per la struttura ridotta $(X, \mathcal{O})$, risulta che gli $H^j(X, \mathcal{F}^{(\nu)}/\mathcal{F}^{(\nu+1)})$ sono spazi vettoriali di dimensione finita su $\mathbf{C}$. Esiste quindi un numero finito di elementi $\sigma_1^{(\nu)}, \ldots, \sigma_{t_\nu}^{(\nu)} \in H^j(X, \mathcal{F}^{(\nu)})$, le cui immagini nell'applicazione $\beta_\nu$ generano tutto $\beta_\nu(H^j(X, \mathcal{F}^{(\nu)}))$, e pertanto ogni elemento $\xi_\nu \in H^j(X, \mathcal{F}^{(\nu)})$ si potrà scrivere nella forma

$$(3_\nu) \qquad \xi_\nu = \Sigma\, c_i^{(\nu)} \sigma_i^{(\nu)} + \xi_{\nu, 0},$$

con $c_i^{(\nu)} \in \mathbf{C}$, e con $\xi_{\nu, 0} \in \operatorname{Ker} \beta_\nu = \operatorname{Im} \alpha_\nu$.

Sia $B_0$ l'aperto relativamente compatto di cui al lemma 1, e sia $k$ il minimo intero tale che $\mathcal{F}^{(k)} \mid B_0 = 0$. Si considerino i seguenti elementi di $H^j(X, \mathcal{F}))$:

$$\begin{array}{ll} & \sigma_1^{(0)}, \dots, \sigma_{t_0}^{(0)}, \\ & \alpha_0\, \sigma_1^{(1)}, \dots, \alpha_0\, \sigma_{t_1}^{(1)}, \\ (4) & \alpha_0\, \alpha_1\, \sigma_1^{(2)}, \dots, \alpha_0\, \alpha_1\, \sigma_{t_2}^{(2)}, \\ & \dots\dots\dots\dots \\ & \alpha_0\, \alpha_1 \dots \alpha_{k-2}\, \sigma_1^{(k-1)}, \dots, \alpha_0\, \alpha_1 \dots \alpha_{k-2}\, \sigma_{t_{k-1}}^{(k-1)}. \end{array}$$

Proveremo ora che questi elementi generano $H^j(X, \mathcal{F})$ come spazio vettoriale su $\mathbf{C}$, onde $H^j(X, \mathcal{F})$ ha dimensione finita su $\mathbf{C}$, il che è precisamente la tesi del teorema per il caso $q$-convesso. Sia dunque $\xi_0 \in H^j(X, \mathcal{F})$ un elemento arbitrario. A norma della $(3_0)$ si può scrivere

$$\xi_0 = \Sigma\, c_i^{(0)}\, \sigma_i^{(0)} + \xi_{0,0},$$

con $\xi_{0,0} = \alpha_0\, \xi_1$, ove $\xi_1$ è un opportuno elemento di $H^j(X, \mathcal{F}^{(1)})$. Iterando il procedimento, si vede che si può scrivere

$$\xi_1 = \Sigma\, c_i^{(1)}\, \sigma_i^{(1)} + \xi_{1,0},$$

con $\xi_{1,0} = \alpha_1\, \xi_2$, ove $\xi_2$ è un opportuno elemento di $H^j(X, \mathcal{F}^{(2)}), \dots,$ e finalmente:

$$\xi_{k-1} = \Sigma\, c_i^{(k-1)}\, \sigma_i^{(k-1)} + \xi_{k-1,0},$$

con

$$\xi_{k-1,0} = \alpha_{k-1}\, \xi_k, \quad \text{ove} \quad \xi_k \in H^j(X, \mathcal{F}^{(k)}).$$

Consideriamo le immagini di queste uguaglianze in $H^j(X, \mathcal{F})$ (mediante successiva applicazione degli omomorfismi $\alpha_r$) e sommiamo membro a membro. Si ottiene:

$$\xi_0 = \{\text{combinazione lineare a coefficienti complessi degli elementi di (4)}\} + \alpha_0\, \alpha_1 \dots \alpha_{k-1}\, \xi_k,$$

ove $\xi_k \in H^j(X, \mathcal{F}^{(k)})$. Si tratta di far vedere che $\alpha_0\, \alpha_1 \dots \alpha_{k-1}\, \xi_k$ è la classe nulla di $H^j(X, \mathcal{F})$; a tal fine basta far vedere che $\xi_k$ è lo zero di $H^j(X, \mathcal{F}^{(k)})$; proveremo in realtà che si ha $H^j(X, \mathcal{F}^{(k)}) = 0$.

Infatti per $\nu \geq k$ la successione $(2_\nu)$ diviene semplicemente

$$(5) \qquad H^j(X, \mathcal{F}^{(\nu+1)}) \xrightarrow{\alpha_\nu} H^j(X, \mathcal{F}^{(\nu)}) \to 0,$$

in quanto per costruzione $\mathcal{F}^{(\nu)}/\mathcal{F}^{(\nu+1)}$ è un fascio $\mathcal{O}$-coerente che è nullo su $B_0$ (per come è stato scelto $k$) e quindi (per il lemma 1):

$$H^j(X, \mathcal{F}^{(\nu)}/\mathcal{F}^{(\nu+1)}) \simeq H^j(B_0, \mathcal{F}^{(\nu)}/\mathcal{F}^{(\nu+1)}) = H^j(B_0, 0) = 0.$$

A questo punto, per provare che $H^j(X, \mathcal{F}^{(k)}) = 0$, si può ripetere il ragionamento di Grauert [2], loc. cit., sfruttando le (5). A grandi linee, il ragionamento di Grauert è il seguente: si ricopre $X$ mediante una successione crescente di aperti relativamente compatti $B_0 (\Subset B_1 (\Subset B_2 (\Subset \dots$; dato un elemento arbitrario $\xi_k \in H^j(X, \mathcal{F}^{(k)})$, tale $\xi_k$ è rappresentabile su un opportuno ricoprimento $\mathcal{U}$ di $X$ mediante un cociclo, elemento di $Z^j(\mathcal{U}, \mathcal{F}^{(k)})$; servendosi della surgettività delle (5) si vede che, su un opportuno raffinamento $\mathcal{V}_1$ di $\mathcal{U}$ tale cociclo è, a meno di un cobordo $\delta\eta_1$, l'immagine di un cociclo, elemento di $Z^j(\mathcal{V}_1, \mathcal{F}^{(k+1)})$; .... Si ottiene così una successione di ricoprimenti $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \mathcal{V}_3, \dots$, ognuno raffinamento del precedente, e una successione di cobordi $\delta\eta_1, \delta\eta_2, \delta\eta_3, \dots$. I ricoprimenti $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \mathcal{V}_3, \dots$ si possono scegliere in modo tale che esista un ricoprimento $\mathcal{V}$, raffinamento comune di tutti i ricoprimenti $\mathcal{V}_i$; le $(j-1)$-cocatene $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots$ si possono interpretare come elementi di $C^{j-1}(\mathcal{V}, \mathcal{F}^{(k)})$. Ora in corrispondenza a ciascun $B_i$ esiste un intero $k_i$, tale che per $\nu \geq k_i$ si ha $\mathcal{F}^{(\nu)} \mid B_i = 0$ (conseguenza del citato teorema 4 di [2], § 1) e quindi $\eta_\nu \mid B_i = 0$ per $\nu \geq k_i$. Pertanto è ben definita la $(j-1)$-cocatena somma $\eta = \sum_1^\infty \eta_i \in C^{j-1}(\mathcal{V}, \mathcal{F}^{(k)})$, e la classe $\xi_k$ è rappresentata, sul ricoprimento $\mathcal{V}$, da $\delta\eta$, cioè si tratta della classe nulla. Ciò prova precisamente che $H^j(X, \mathcal{F}^{(k)}) = 0$. Abbiamo così provato il teorema, relativamente al caso $q$-convesso. Il caso $q$-completo si deduce subito da quanto precede, osservando che in quest'ultimo caso le (5) sussistono per ogni $k$, e quindi risulta, prendendo $k = 0$:

$$H^j(X, \mathcal{F}) = H^j(X, \mathcal{F}^{(0)}) = 0 \qquad \text{per ogni } j \geq q.$$

## BIBLIOGRAFIA

[1] A. Andreotti-H. Grauert, *Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes*. Bull. Soc. Math. de France, **90** (1962), 193-259.

[2] H. Grauert, *Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen*. Publications mathématiques de l'Inst. des Hautes Etudes Scient., Paris, N. 5 (1960).

[3] J. P. Serre, *Faisceaux algébriques cohérents*. Annals of Math. **61** (1955), 197-278

[4] V. Villani, *Cohomological properties of complex spaces which carry over to normalizations*. Am. Journ. of Math. **88** (1966), 636-645.

Manoscritto pervenuto in redazione il 12 agosto 1968.