

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

SANTUZZA BALDASSARRI-GHEZZO

Proprietà di fasci algebrici coerenti e lisci su varietà algebriche affini normali

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 41 (1968), p. 31-42

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1968__41__31_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

PROPRIETÀ DI FASCI ALGEBRICI COERENTI E LISCI SU VARIETÀ ALGEBRICHE AFFINI NORMALI

SANTUZZA BALDASSARRI-GHEZZO *)

In una precedente nota ho dimostrato, ([4], n° 12, teor. 3), che se k è un corpo commutativo algebricamente chiuso, ed S^n lo spazio affine n -dimensionale su k dotato della topologia di Zariski, ogni fascio algebrico $\mathcal{M}^{(r)}$ coerente e liscio di rango $r > 1$, su di una varietà algebrica affine $V = (V, \mathcal{A}_V)$ di dimensione maggiore di 1 ad algebra fattoriale, può esser identificato con un sottofascio di \mathcal{A}_V avente qualche sezione globale con chiuso di cdm. minima maggiore di 1 in V ; e che ([4] n° 15-17, teoremi 4, 5, 6) per ogni fascio algebrico coerente e liscio $\mathcal{M}^{(r)}$ di rango $r > 1$ su di una varietà algebrica affine (V, \mathcal{A}_V) di dimensione maggiore di 1, ad algebra fattoriale, esistono $r - 1$ sequenze esatte del tipo

$$0 \rightarrow \mathcal{A}_V^h \rightarrow \mathcal{M}^{(r)} \rightarrow \mathcal{M}^{(r-h)} \rightarrow 0 \quad 1 \leq h \leq r - 1,$$

di fasci lisci tali che il chiuso di $\mathcal{M}^{(r)}$ sia contenuto nel chiuso di $\mathcal{M}^{(r-h)}$.

In questa nota dimostro che i medesimi risultati sussistono anche per i fasci algebrici coerenti e lisci sulle varietà algebriche affini normali.

In [4], per arrivare alla dimostrazione del teorema 3, ho fatto vedere che se i chiusi di tutte le sezioni globali di $\mathcal{M}^{(r)}$ ammettono

*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico Università di Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito della attività del gruppo di ricerca matematica n. 33 del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

divisori di V , questi coincidono tutti con un unico divisore Δ di V . Ebbene le considerazioni qui svolte ai n° 3 e 4, mostrano che la stessa conclusione vale anche se V è una qualunque varietà algebrica affine normale dello S^n ; inoltre in tal caso il suo luogo singolare H ha notoriamente $\text{cdm.} > 1$ in V , e si possono determinare, (n° 5), dei divisori dello spazio che contengano H e non contengano un fissato divisore Δ di V . Di qui segue che sulla varietà algebrica affine normale V esistono degli aperti affini (che intersecano Δ ma) che non intersecano H , e che perciò, dotati della struttura indotta, sono (isomorfi a) varietà algebriche affini ad algebra localmente fattoriale, sulle quali il teor. 3 della nota [4] è valido (per il suo carattere locale).

Mediante il teorema d'incollamento di fasci, e la costruzione d'un opportuno prefascio su V , si riesce allora a provare (n° 6) l'esistenza di un sottofascio di \mathcal{A}_V isomorfo ad $\mathcal{M}^{(r)}$ che ammette sezioni globali con il chiuso di cdm. minima maggiore di 1 in V , definendolo dapprima su $V - H$ e prolungandolo poi a tutta V , indiciamolo ancora con $\mathcal{M}^{(r)}$. Resta così affermata la validità del teorema 3 della nota [4] anche per i fasci algebrici coerenti e lisci sopra varietà algebriche affini normali.

L'effettiva costruzione di una sezione globale di $\mathcal{M}^{(r)}$ con la proprietà voluta è illustrata con un esempio al n° 7. La presenza in $\mathcal{M}^{(r)}$ di una siffatta sezione globale, ed il fatto che ogni varietà algebrica affine normale « appartiene alla proprietà di estensione », permettono di trasportare le dimostrazioni date in [4] per i teoremi 4, 5, 6, in guisa da far vedere che questi teoremi sussistono appunto anche per i fasci algebrici coerenti e lisci su varietà algebriche affini normali, come mi ero proposta.

1. Indicheremo con k un corpo commutativo algebricamente chiuso di caratteristica p , e con S^n lo spazio affine di dimensione $n > 1$ su k , dotato della topologia di Zariski. Se $V = (V, \mathcal{A}_V)$ è una varietà algebrica affine dello S^n , (cioè V è una porzione chiusa irriducibile dello S^n ed \mathcal{A}_V è il suo associato fascio degli anelli locali), ed $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ un suo punto generico, l'anello $A[V] = k[X]/I(V)$, isomorfo all'anello $k[x]$ delle coordinate di V , ed anche all'anello $\Gamma(V, \mathcal{A}_V)$ delle sezioni globali di \mathcal{A}_V , risulta un dominio d'integrità

noetheriano, anzi una k -algebra affine di tipo finito priva di divisori dello zero. Ricordiamo che per « varietà algebrica affine » s'intenderà, pur continuando ad indicarla con lo stesso simbolo, ogni spazio anellato isomorfo a (V, \mathcal{A}_V) ([5], III, (2.5.6)); isomorfismo $\Psi : (V, \mathcal{A}_V) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ di spazi anellati essendo un omeomorfismo $\Psi : V \rightarrow Y$ tale che gli omomorfismi $\Psi_x : \widehat{\mathcal{O}}_{Y, \psi(x)} \rightarrow \mathcal{A}_{V, x}$, definiti per ogni $(x) \in V$ associando ad ogni germe $f_{\psi(x)} \in \widehat{\mathcal{O}}_{Y, \psi(x)}$, rappresentato in un intorno \mathcal{U} di $\psi(x)$ da un'applicazione $f : \mathcal{U} \rightarrow k$, il germe di $\mathcal{A}_{V, x}$ rappresentato dall'applicazione composta $f \circ (\psi/\psi(\mathcal{U}))$, siano degli isomorfismi per ogni $(x) \in V$.

Indichiamo ancora con $\Gamma(\)$ il funtore covariante esatto sulla categoria dei fasci algebrici coerenti su varietà algebriche affini (V, \mathcal{A}_V) , con valori nella categoria degli $A[V]$ -moduli di tipo finito; e con $\mathcal{E}(\)$ il funtore covariante esatto sulla categoria degli $A[V]$ -moduli di tipo finito con valori nella categoria dei fasci algebrici coerenti su varietà algebriche affini.

2. Sia V una varietà algebrica affine normale di dimensione maggiore di 1, $\mathcal{M}^{(r)}$ un fascio algebrico coerente e liscio di rango $r > 1$ su V , ed $M = \Gamma(V, \mathcal{M}^{(r)})$ l' $A[V]$ -modulo delle sezioni globali di $\mathcal{M}^{(r)}$.

Consideriamo un'iniezione

$$(1) \quad 0 \rightarrow M \rightarrow A[V]^r$$

(certo esistente [6] pag. 131) che ci permetta d'identificare M con un sottomodulo di $A[V]^r$, e la sua trasformata funtoriale, (mediante l'operatore $\mathcal{E}(\)$)

$$(1') \quad 0 \rightarrow \mathcal{M}^{(r)} \rightarrow \mathcal{A}_V^r,$$

la quale fuori di un chiuso proprio (« chiuso di $\mathcal{M}^{(r)}$ ») è anche surriettiva ¹⁾.

Per la (1), ogni elemento s di M può esser identificato con una r -pla

$$s = (\lambda\sigma_1, \lambda\sigma_2, \dots, \lambda\sigma_r)$$

¹⁾ L'apice (r) apposto ad $\mathcal{M}^{(r)}$ ha il solo scopo di mettere in evidenza il rango r del fascio, mentre l'apice r di \mathcal{A}_V^r indica che trattasi di somma diretta di r fasci \mathcal{A}_V .

di elementi di $k[x] \simeq A[V]$, dove, se h è il numero dei generatori $s^j = (s_1^j, s_2^j, \dots, s_r^j)$ ($j = 1, 2, \dots, h$) di M , si è posto

$$(2) \quad \lambda \sigma_i = \sum_1^h \lambda_j s_i^j$$

con $\lambda_j \in k[x]$.

Sia m_i^j il grado di s_i^j ($i = 1, 2, \dots, r; j = 1, 2, \dots, h$) in $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$.

Immergendo lo S^n nello spazio proiettivo P^n , si possono considerare (come in [4] n° 6 e 7) le immagini canoniche s_i^{0j} delle funzioni $s_i^j \in k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ nell'anello $k[x_0, x_1, \dots, x_n]$, delle coordinate omogenee dell'immagine di V in P^n , e considerare gli elementi omogenei di grado $m > m_i^j$ per ogni j

$$\lambda_i^0 \sigma_i^0 = \sum_1^h \lambda_{i,j}^0 s_i^{0j}$$

con le $\lambda_{i,j}^0$ omogenee di grado $m - m_i^j$ in $k[x_0, x_1, \dots, x_n]$.

3. Mediante le forme $\lambda_i^0 \sigma_i^0$ possiamo definire, nel corpo delle funzioni su V , un sottospazio vettoriale $L^{(m)}$ di dimensione finita e quindi ottenere un sistema lineare $\Delta_i^{(m)}$ di divisori di V , ([11] pag. 270).

Per m abbastanza grande, si vede subito, ([4], n° 12), che vale anche qui il teorema 1 dimostrato al n° 8 della nota [4], cioè che il divisore generico del sistema lineare $\Delta_i^{(m)}$ non è composto di varietà appartenenti ad un sistema algebrico di dimensione 1 e indice 1; e vale inoltre il 1° teorema di Bertini ([4], n° 9), per cui si può affermare anche che:

Per m abbastanza grande il divisore generico $\Delta_i^{(m)}$ del sistema lineare $\Delta_i^{(m)}$, privato delle componenti fisse, è una varietà.

4. Con procedimento analogo a quello seguito in [4] al n° 10 possiamo scegliere in M gli elementi

$$s = (\lambda' \sigma'_1, \dots, \lambda' \sigma'_r)$$

che hanno le componenti $\lambda' \sigma'_i$ che descrivono r sistemi lineari $\Delta_i^{(m)}$ ($i = 1, 2, \dots, r$) di divisori di V , tutti di uno stesso grado m .

Indichiamo con $H(s)$ il chiuso in V di un elemento s di M , cioè il chiuso di V definito da

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda' \sigma'_1 = 0 \\ \lambda' \sigma'_2 = 0 \\ \lambda' \sigma'_r = 0. \end{array} \right.$$

Se $H(s)$ ha componenti di cdm. I in V per ogni s , il divisore generico $\Delta_i^{(m)}$ di $\Delta_i^{(m)}$ ($i = 1, 2, \dots, r$), sarà del tipo $\Delta_i^{(m)} = \Delta_{\lambda'} + \Delta_{i, \lambda'}$, ma se $\Delta_{\lambda'}$ non è intersezione completa di V con forme dello spazio ambiente, le (3) non potranno qui scriversi: $\lambda' \sigma'_i \equiv \psi_{\lambda'} \mu_{i\lambda'}$ ($i = 1, 2, \dots, r$), come in [4], n° 11.

In ogni caso però i sistemi lineari $\Delta_i^{(m)}$, per m abbastanza grande, sono riducibili solo se ammettono componenti fisse (n° 3) le quali, per un fissato i ($1 \leq i \leq r$), apparterranno ovviamente anche ai divisori di tutte le funzioni $\lambda \sigma_i$ ((2), n° 2) indipendentemente da λ , ed anzi ai divisori di tutte le i -esime componenti degli elementi s di M . Ne risulta che nelle nostre ipotesi ci si potrà sempre ridurre a pensare $\Delta_i^{(m)}$ in una delle possibili decomposizioni:

$$\Delta + (\Delta_{i, \lambda'} + \Delta_i) \text{ ovvero } (\Delta + \Delta_{\lambda'}) + \Delta_i$$

dove $\Delta_{i, \lambda'}$ o, rispettivamente $\Delta_{\lambda'}$ sono sottovarietà di V , e Δ e Δ_i sono divisori fissi di $\Delta_i^{(m)}$, anzi Δ_i appartiene al divisore generico di tutti i sistemi lineari $\Delta_i^{(m)}$ per ogni possibile m , e Δ appartiene al divisore generico di tutti i sistemi lineari $\Delta_i^{(m)}$ per ogni i e per ogni possibile m . Quindi ne risulta che il chiuso di ciascun elemento s di M , nel primo caso contiene il divisore Δ oltre a componenti in cdm. > 1 variabili con s ed (eventualmente) anche componenti fisse in cdm. > 1 ; mentre nel secondo caso esso contiene una componente irriducibile in cdm. 1 variabile con s , oltre alle componenti fisse.

5. Osserviamo che nella situazione descritta al n° precedente, solo se tutte le componenti fisse di ciascun sistema lineare $\Delta_i^{(m)}$

sono intersezioni complete di V con divisori dello spazio, le forme $\lambda' \sigma'_i$, che definiscono i $\Delta_i^{(m)}$ ammettono una decomposizione in fattori del tipo

$$\varphi \varphi_i f_{i, \lambda'} \text{ oppure del tipo } \varphi \varphi_i f_{\lambda'}$$

con $\varphi \varphi_i \in k[x]$ ($i = 1, 2, \dots, r$). In tal caso sarà possibile reiniettare M in $k[x]^r$ come in [4] n° 11, con i risultati ivi dedotti, e cioè in modo che se $r > 1$, il chiuso di qualche elemento $s \in M$ sia privo di componenti di cdm. 1.

6. Dimostriamo ora un lemma che ci sarà utile nel seguito.

LEMMA 1. *Se V è una sottovarietà chiusa dello spazio affine S^n , esistono divisori dello spazio contenenti un fissato chiuso H di cdm. > 1 in V e non contenenti nessun divisore primo appartenente ad un fissato divisore $\Delta = \sum_{i=1}^t n_i W_i$ di V .*

Infatti, siano $I(H)$ e $I(W_i)$ ($i = 1, 2, \dots, t$) gli ideali dell'anello di polinomi $k[X_1, X_2, \dots, X_n]$ associati ai rispettivi chiusi H e W_i ($i = 1, 2, \dots, t$) pensati in S^n . Si tratta di trovare un elemento $\Phi(X) \in I(H)$ tale che sia $\Phi(X) \notin I(W_i)$ per ogni i ($1 \leq i \leq t$), cioè $\Phi(X) \notin \bigcup_{i=1}^t I(W_i)$.

Poichè $I(H) \not\subseteq I(W_i)$, per ogni i ($1 \leq i \leq t$), esiste qualche polinomio $F_i(X) \in I(H)$ tale che $F_i(X) \notin I(W_i)$ ($i = 1, 2, \dots, t$); quindi, per ogni i , esiste qualche punto $(x^{(i)}) \in W_i$ tale che $F_i((x^{(i)})) \neq 0$ (ogni punto della porzione localmente chiusa $W_i \cap D(F_i)$ con $D(F_i)$ complementare del chiuso di F_i in S^n). In questa situazione possiamo scegliere $h \leq t$ punti distinti $(x^{(1)}), (x^{(2)}), \dots, (x^{(h)})$ tali che la relazione $(x^{(j)}) \in W_i$ con $1 \leq j \leq h$, e $1 \leq i \leq t$, definisca una applicazione $j = \gamma(i)$ di $(1, 2, \dots, t)$ su $(1, 2, \dots, h)$, e tali che sia $F_i(x^{\gamma(i)}) \neq 0$. Allora scelto per ogni j un $i_j \in \gamma^{-1}(j)$, consideriamo i polinomi $F_{i_1}(X), \dots, F_{i_h}(X)$; (i quali non sono necessariamente distinti), e poichè non è restrittivo supporre che i numeri $1, 2, \dots, h$ appartengano rispettivamente a $\gamma^{-1}(1), \gamma^{-1}(2), \dots, \gamma^{-1}(h)$, indichiamoli con $F_1(X), \dots, F_h(X)$. Osserviamo inoltre che essendo gli h punti $(x^{(1)}), \dots, (x^{(h)})$ a due a due distinti, per ogni coppia di interi $i \neq m$, $1 \leq i \leq h$ e $1 \leq m \leq h$, esisterà qualche intero s , $1 \leq s \leq n$, tale

che sia $x_s^{(i)} \neq x_s^{(m)}$. Posto perciò

$$\Phi_m(X) = \prod_{i, s} (X_s - x_s^{(i)}) \quad m = 1, 2, \dots, h$$

i prodotti essendo estesi a tutte le coppie (i, s) tali che sia :

$$1 \leq i \leq h, 1 \leq s \leq n, i \neq m, \text{ ed } x_s^{(i)} \neq x_s^{(m)},$$

risulterà

$$\Phi_m(x^{(i)}) = 0 \text{ per ogni } i \neq m \text{ e } \Phi_m(x^{(m)}) \neq 0.$$

Consideriamo allora il polinomio

$$\Phi(X) = \sum_{m=1}^h \Phi_m(X_1, X_2, \dots, X_n) F_m(X_1, X_2, \dots, X_n),$$

esso appartiene all'ideale $I(H)$, ed è tale che

$$\Phi((x^{(m)})) = \prod_{i, s} (x_s^{(m)} - x_s^{(i)}) F_m((x^{(m)}))$$

e quindi esso non si annulla in nessun punto $((x^{(m)}))$, $1 \leq m \leq h$, perciò, come volevasi, esso non appartiene a nessuno degli ideali $I(W_i)$ ($i = 1, 2, \dots, t$).

7. Supponiamo ora che V sia una varietà algebrica affine normale dello S^n , che $\mathcal{H}^{(r)}$ sia un fascio algebrico di rango $r > 1$ coerente e liscio su V e consideriamo quì, come al n° 4, i sistemi lineari $\Delta_i^{(m)}$ di divisori di V . Le componenti fisse $\Delta + \Delta_i$ ($i = 1, 2, \dots, r$) dei sistemi lineari $\Delta_i^{(m)}$ siano ora intersezione non completa di V con divisori dello spazio; poichè nelle attuali ipotesi il chiuso singolare H di V è certo di $\text{cdm.} > 1$ in V ([11], pag. 337), è possibile determinare (lemma 1, n° 6) un divisore dello spazio il quale seghi la varietà, (pensata quì come sottovarietà chiusa dello S^n), secondo un chiuso contenente il luogo singolare H di V e non contenente alcun divisore primo di V appartenente al chiuso $\Delta + \sum_{i=1}^r \Delta_i$ (di $\text{cdm.} 1$ in V).

Inoltre l'applicazione $\varphi: V \rightarrow k$, restrizione a V dell'applicazione $\Phi: k^n \rightarrow k$, rappresentata dal polinomio $\Phi(X)$ costruito come al lemma del n° precedente, è dovunque regolare (su V), e quindi l'aperto V_φ di V , dove $\Phi((x)) \neq 0$, è un aperto affine di V ([5], III, (3, 2. 5)), cioè, dotato della struttura indotta, esso dà una varietà algebrica affine (v. n° 1).

Ora essendo, nelle nostre ipotesi, la varietà V affine normale e V_φ disgiunto dal luogo singolare H di V , in ogni punto (x) di V appartenente a V_φ l'anello locale è regolare e quindi a fattorizzazione unica. Ne segue che l'aperto affine V_φ è qui (isomorfo ad) una varietà algebrica affine $W = (W, \mathcal{A}_W)$ ad algebra localmente fattoriale, per cui sugli aperti di siffatta varietà vale il teorema 3 ([4], n° 12) ricordato in prefazione; e questo teorema, per il carattere locale della proprietà in esso affermata, risulta di conseguenza, valido su W .

Si può perciò intanto affermare che $\mathcal{M}^{(r)}/V_\varphi$ è isomorfo ad un sottofascio di $(\mathcal{A}_V/V_\varphi)^r$ che possiede sezioni (su V_φ) con chiuso di $\text{cdm.} > 1$ in V .

Ma gli aperti affini di V formano una base \mathcal{B} d'aperti per la topologia di V , perciò, usando il teorema d'incollamento di fasci ([5], II, (1. 4. 7) e (2. 5. 2)), si deduce intanto subito l'esistenza di un sottofascio, indichiamolo con $\overline{\mathcal{M}}$, di $\mathcal{A}_V^r/(V - H)$ isomorfo ad $\mathcal{M}^{(r)}/(V - H)$, che possiede qualche sezione (su $V - H$) con chiuso di $\text{cdm.} > 1$ in V .

Costruiamo ora un prefascio su \mathcal{B} nel seguente modo:

Indichiamo con $\{U_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ gli aperti affini di V che intersecano il chiuso H , associamo a ciascun $U_i (i \in \mathcal{I})$ il modulo $\Gamma(U_i, \mathcal{M}^{(r)})$ delle sezioni di $\mathcal{M}^{(r)}$ su U_i , e per ogni coppia $U_i \subseteq U_j (i, j \in \mathcal{I})$ indichiamo con

$$\varrho_{U_i}^{U_j}: \Gamma(U_j, \mathcal{M}^{(r)}) \rightarrow \Gamma(U_i, \mathcal{M}^{(r)})$$

gli omorfismi ottenuti per restrizione. Indichiamo inoltre con $\{W_i\}_{i \in \mathcal{J}}$ gli aperti affini di V che non intersecano H , associamo a ciascun $W_i (i \in \mathcal{J})$ il modulo $\Gamma(W_i, \overline{\mathcal{M}})$ delle sezioni di $\overline{\mathcal{M}}$ su W_i , e per ogni coppia $W_i \subseteq W_j (i, j \in \mathcal{J})$ siano

$$\varrho_{W_i}^{W_j}: \Gamma(W_j, \overline{\mathcal{M}}) \rightarrow \Gamma(W_i, \overline{\mathcal{M}})$$

gli omomorfismi, di restrizione. Infine per ogni coppia $W_j \subseteq U_i$ ($j \in J$, $i \in \mathcal{I}$) siano

$$\varrho_{W_j}^{U_i}: \Gamma(U_i, \mathcal{M}^{(r)}) \rightarrow \Gamma(W_j, \overline{\mathcal{M}})$$

gli omomorfismi ottenuti come prodotti delle restrizioni a W_j delle sezioni di $\mathcal{M}^{(r)}$ su U_i per gli omomorfismi, esistenti per ipotesi,

$$\chi_{W_i}: \Gamma(W_i, \mathcal{M}^{(r)}) \rightarrow \Gamma(W_i, \overline{\mathcal{M}}).$$

Osserviamo che gli insiemi $\{U_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ e $\{W_i\}_{i \in J}$ formano evidentemente una partizione di \mathcal{B} , e inoltre nessun aperto U_i di V è contenuto in qualche W_i . Abbiamo perciò costruito un prefascio sulla base d'aperti di \mathcal{B} di V ([5], II, (1.4.1.)) al quale resta associato un fascio su V che è isomorfo ad $\mathcal{M}^{(r)}$ e che ristretto a $V - H$ è eguale ad $\overline{\mathcal{M}}$; questo fascio possiede dunque qualche sezione globale il cui chiuso è privo di componenti di cdm. 1 in V .

Resta così dimostrato il seguente

TEOREMA 1. *Ogni fascio algebrico $\mathcal{M}^{(r)}$ coerente e liscio di rango $r > 1$ su di una varietà algebrica affine normale $V = (V, \mathcal{A}_V)$ di dimensione maggiore di 1, è isomorfo ad un sottofascio di \mathcal{A}_V^r che ammette sezioni con chiuso di codimensione minima maggiore di 1 in V .*

8. Illustriamo quanto sopra con un esempio:

Consideriamo la varietà (V, \mathcal{A}_V) con $V = V(x^2 - yz)$ in S^3 , ed il sottofascio \mathcal{M} di \mathcal{A}_V^2 generato dalle sezioni globali rappresentate in $A^2 = (k[xyz]/(x^2 - yz))^2 \simeq (\Gamma(V, \mathcal{A}_V))^2$ dagli elementi

$$s^1 = (y - x, y - z), \quad s^2 = (y - z, x^2 + y^2 - 2z^2), \quad s^3 = (x - z, y^2 - x^2).$$

Ogni sezione s di \mathcal{M} su V sarà allora del tipo

$$s = (\lambda_1(y - x) + \lambda_2(y - z) + \lambda_3(x - z), \\ \lambda_1(y - z) + \lambda_2(x^2 + y^2 - 2z^2) + \lambda_3(y^2 - x^2))$$

con $\lambda_i \in A$, e quindi avrà nel chiuso $H(s)$ una componente di cdm. 1 in V : $\Delta = (x = y = z)$. Poichè l'applicazione φ rappresentata dal

polinomio z è dovunque regolare su V , e non nulla su Δ , l'aperto $D(z) = V_z$ di V interseca Δ ed è isomorfo alla varietà (W, \mathcal{A}_W) con $W = W(X^2 - YZ; ZT - 1)$ in S^4 , nell'isomorfismo

$$\psi: X = x, Y = y, Z = z, T = 1/z,$$

e l'immagine di ogni sezione di \mathcal{M}/V_z in \mathcal{A}_W^2 si potrà anche scrivere nella forma

$$\begin{aligned} \psi(s) &= \bar{\lambda}_1(X^2 - ZX)T + \bar{\lambda}_2(X^2 - Z^2)T + \bar{\lambda}_3(X - Z), \\ \bar{\lambda}_1(X^2 - Z^2)T + \bar{\lambda}_2(X^2 Z^2 + X^4 - 2Z^4)T^2 + \bar{\lambda}_3(X^4 - X^2 Z^2)T^2 &= \\ &= (X - Z)[\bar{\lambda}_1 XT + \bar{\lambda}_2(X + Z)T + \bar{\lambda}_3, \\ &\quad (X + Z)(\bar{\lambda}_1 T + \bar{\lambda}_2(X^2 + 2Z^2)T^2 + \bar{\lambda}_3 X^2 T^2)] \end{aligned}$$

e quindi in \mathcal{M}/V_z

$$s = (x - z)[\lambda_1 x/z + \lambda_2(x + z)/z + \lambda_3,$$

$$(x + z)(\lambda_1 1/z + \lambda_2(x^2 + 2z^2)/z^2 + \lambda_3 x^2/z^2)] = (x - z)\bar{s}.$$

(La fattorizzazione qui è unica su tutto V_z in virtù della scelta dell'aperto $D(z)$, nel quale $\Delta \cap D(z)$ si presenta come intersezione completa di V_z con $x - z = 0$).

Ne segue che mediante l'isomorfismo

$$\chi: s \rightarrow \bar{s}$$

si ottiene un (\mathcal{A}_V/V_z) -fascio \mathcal{M}' che ammette evidentemente qualche sezione con chiuso di cdm. > 1 , per es. la $(1, (x + z)x^2/z^2)$.

In particolare sull'aperto U intersezione di $D(z)$ con il complementare $D(\Delta)$ di Δ in V , è $\mathcal{M}/U \simeq \mathcal{M}'/U$ nell'isomorfismo χ ottenuto mediante divisione per $(x - z)$, considerando quindi su $D(\Delta)$ lo $(\mathcal{A}_V/D(\Delta))$ -fascio $\mathcal{M}/D(\Delta)$, è qui applicabile a $V - 0$, con il ricoprimento aperto $\{D(z), D(\Delta)\}$, il teorema d'incollamento ([5], II, (2.5.2)) che ci permette di definire un fascio $\bar{\mathcal{M}}$ di $\mathcal{A}_V/(V - 0)$ -moduli che

sarà isomorfo allo $\mathcal{A}_V/(V - 0)$ -fascio $\mathcal{M}/(V - 0)$, e che qui si potrà prolungare in modo naturale ad un fascio algebrico su V , il quale ammetterà qualche sezione con chiuso di $\text{cdm.} > 1$, per es. la sezione rappresentata da $(1; (x+z)x^2/z^2)$ su $D(z)$ e da $(x-z, y^2-x^2)$ su $D(\Delta)$ e su 0 .

9. Ricordiamo ora che se V è una varietà algebrica affine, si dice « ammissibile » (in V) un suo aperto U complementare di un chiuso di $\text{cdm.} > 1$ in V , e un fascio \mathcal{M} su V privo di torsione si dice che « appartiene alla proprietà di estensione », $\mathcal{M} \in P \cdot E \cdot$, ([3] n° 4) se è privo di sezioni definite sopra aperti U ammissibili, ma non su tutta V ; cioè se l'omomorfismo iniettivo $\Gamma(V, \mathcal{M}) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{M})$ ottenuto per restrizione, è anche suriettivo.

Poiché il fascio degli anelli locali di una varietà algebrica affine normale appartiene alla proprietà di estensione ([3] teor. 2), tenuto conto del teor. 1 del n° 7, risultano dunque valide, anche nel caso di varietà normali, le dimostrazioni dei teoremi 4, 5, e 6 della nota [4].

Possiamo dunque affermare che valgono i seguenti teoremi:

TEOREMA 2. *Per ogni fascio algebrico $\mathcal{M}^{(r)}$ di rango $r > 1$, coerente e liscio su di una varietà algebrica affine normale $V = (V, \mathcal{A}_V)$ di dimensione maggiore di 1 esiste una sequenza esatta del tipo*

$$0 \rightarrow \mathcal{A}_V \rightarrow \mathcal{M}^{(r)} \rightarrow \mathcal{M}^{(r-1)} \rightarrow 0$$

di fasci lisci.

E anche

TEOREMA 3. *Per ogni fascio algebrico $\mathcal{M}^{(r)}$ di rango $r > 1$, coerente e liscio sulla varietà algebrica affine normale $V = (V, \mathcal{A}_V)$ di dimensione maggiore di 1, sussistono $r - 1$ sequenze esatte di fasci lisci del tipo*

$$0 \rightarrow \mathcal{A}_V^h \rightarrow \mathcal{M}^{(r)} \rightarrow \mathcal{M}^{(r-h)} \rightarrow 0, \quad 1 \leq h \leq r - 1,$$

tali che il chiuso di $\mathcal{M}^{(r)}$ sia contenuto nel chiuso di $\mathcal{M}^{(r-h)}$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Y. AKIZUKI, *Theorems of Bertini on linear systems*, J. Math. Soc. Japan, vol. 3 n° 1, pp. 170-180, (1951).
- [2] M. BALDASSARRI, *Algebraic varieties*, Ergeb. der Math., Springer-Verlag, Berlin, (1956).
- [3] M. BALDASSARRI, *Osservazioni sulla struttura dei fasci lisci*, Atti del Conv. Internaz. di geometria algebrica di Torino del 1961.
- [4] S. BALDASSARRI-GHEZZO, *Proprietà di fasci algebrici coerenti e lisci, su varietà algebriche affini ad algebra fattoriale* Sem. Mat. Univ. di Padova in corso di stampa.
- [5] S. BALDASSARRI-GHEZZO, C. MARGAGLIO; T. MILLEVOI, *Introduzione ai metodi della geometria algebrica*, Ed. Cremonese, Roma, (1967).
- [6] H. CARTAN and S. EILENBERG, *Homological algebra*, Princeton Univ. Press, (1956).
- [7] S. LANG, *Introduction to algebraic geometry*, Tracts in Math. 5, Intersc. Publ. Inc., New York, (1958).
- [8] T. MATSUSAKA, *The theorem of Bertini on linear systems in modular fields*, Mem. Coll. of Sci., Univ. Kyoto, Ser. A, XXVI, pp. 51-62, (1950).
- [9] J. P. SERRE, *Faisceaux algébriques cohérents*, Ann. of Math., vol. 61 n° 2, pp. 197-278, (1955).
- [10] A. WEIL, *Foundations of algebraic geometry*, Amer. Math. Soc., Coll. Publ., XXIX, (1962).
- [11] O. ZARISKI, *Pencils on an algebraic variety and a new proof of a theorem of Bertini*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 50, pp. 40-70, (1941).

Manoscritto pervenuto in redazione il 29 maggio 1968