

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

TOMASO MILLEVOI

Sulle estensioni degli anelli di Gorenstein

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 41 (1968), p. 319-325

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1968__41__319_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SULLE ESTENSIONI DEGLI ANELLI DI GORENSTEIN

di TOMASO MILLEVOI *)

È noto che se un anello R è di Macaulay, allora lo sono pure gli anelli $R[x]$, \widehat{R} (completato di R rispetto ad una topologia \mathfrak{u} adica) e di conseguenza $R[[x]]$ (anello delle serie formali) ed $R\{x\}$ (anello delle serie formali ristrette).

In questo lavoro si mostra che proprietà analoghe di permanenza valgono per gli anelli di Gorenstein che sono particolari anelli di Macaulay.

1. Un anello R commutativo noetheriano si dice di Gorenstein se soddisfa alle seguenti condizioni equivalenti:

(a) Per ogni ideale \mathfrak{p} , $R_{\mathfrak{p}}$ è un anello di Macaulay in cui qualche sistema di parametri genera un ideale irriducibile.

(b) Per ogni ideale primo \mathfrak{p} ogni sistema di parametri in $R_{\mathfrak{p}}$ genera un ideale irriducibile.

(c) Per ogni ideale massimale \mathfrak{m} , $R_{\mathfrak{m}}$ è un anello di Macaulay in cui qualche sistema di parametri genera un ideale irriducibile.

(d) Per ogni ideale massimale \mathfrak{m} ogni sistema di parametri in $R_{\mathfrak{m}}$ genera un ideale irriducibile.

(e) Ogni ideale di classe principale di R è puro e tutte le sue componenti primarie sono irriducibili.

*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

Indirizzo dell'Autore: Seminario Matematico Università, Padova.

Per la dimostrazione dell'equivalenza di tali condizioni cfr. ad es. [1] § 1 pag. 9.

OSSERVAZIONE. Dalla condizione (c) segue subito che un anello R è di Gorenstein se e solo se per ogni ideale massimale \mathfrak{m} di R l'anello locale $R_{\mathfrak{m}}$ è di Gorenstein.

Dimostriamo ora il seguente

TEOREMA 1. *Se R è un anello di Gorenstein, lo è anche $R[x]$, dove x è una indeterminata.*

Poichè $R[x]$ è un anello di Macaulay, basterà verificare, in base alla condizione (c), che, se \mathfrak{M} è un ideale massimale di $R[x]$, nell'anello locale $R[x]_{\mathfrak{M}}$ c'è un sistema di parametri che genera un ideale irriducibile.

Poniamo $\mathfrak{p} = \mathfrak{M} \cap R$. \mathfrak{p} risulta un ideale primo di R ed $R_{\mathfrak{p}}$ un anello di Gorenstein (condizione (a)).

Si verifica facilmente che $R[x]_{\mathfrak{M}} \simeq R_{\mathfrak{p}}[x]_{\mathfrak{M}'}$, dove \mathfrak{M}' è l'ideale massimale generato in $R_{\mathfrak{p}}[x]$ dall'immagine di \mathfrak{M} nell'omomorfismo naturale $R[x] \rightarrow R_{\mathfrak{p}}[x]$.

Per dimostrare l'asserto potremo dunque supporre che R sia un anello locale di ideale massimale $\mathfrak{p} = \mathfrak{M} \cap R$.

$\mathfrak{M}/\mathfrak{p}R[x]$ è un ideale massimale di $(R/\mathfrak{p})[x]$, e dunque è generato da un polinomio \bar{F} , dove $F \in \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} = (\mathfrak{p}, F)$ (cfr. [4] th. (14.7) pag. 46). Si può supporre inoltre che F sia monico.

Sia q_1, q_2, \dots, q_r un sistema di parametri di R , con $(q_1, \dots, q_r) = \mathfrak{q}$ = irriducibile (= \mathfrak{p} -primario); si ha che $\mathfrak{q} R[x]$ è $\mathfrak{p} R[x]$ -primario (cfr. [4] (6.15) pag. 18), e dunque $(q_1, \dots, q_r): F = (q_1, \dots, q_r)$ in $R[x]$ poichè $F \notin \mathfrak{p} R[x]$, d'altra parte q_1, \dots, q_r formano una R -successione (cfr. [3] Teor. 3.1 cond. 10 pag. 12) e dunque una $R[x]$ -successione (cfr. [4] (6.13) pag. 17): si conclude che q_1, \dots, q_r, F formano una $R[x]$ -successione. Inoltre ogni ideale primo che contenga \mathfrak{q} ed F contiene \mathfrak{p} ed F , cioè \mathfrak{M} ; \mathfrak{M} è dunque un primo minimale di (\mathfrak{q}, F) ; ne segue che, in $R[x]_{\mathfrak{M}}$, (\mathfrak{q}, F) è $\mathfrak{M} R[x]_{\mathfrak{M}}$ -primario. Di conseguenza q_1, \dots, q_r, F costituiscono un sistema di parametri di $R[x]_{\mathfrak{M}}$.

Dimostriamo ora che l'ideale (\mathfrak{q}, F) è irriducibile in $R[x]_{\mathfrak{M}}$, o, il che è lo stesso, passando al quoziente rispetto all'ideale generato

da \mathfrak{q} , che (F) modulo $\mathfrak{q} R[x]_{\mathfrak{M}}$ è irriducibile in $R[x]_{\mathfrak{M}}/\mathfrak{q} R[x]_{\mathfrak{M}}$. Facili considerazioni mostrano che quest'ultimo anello è isomorfo a $(R[x]/\mathfrak{q} R[x])_{\mathfrak{M}/\mathfrak{q}R[x]}$.

Si ha d'altra parte $R[x]/\mathfrak{q} R[x] \simeq (R/\mathfrak{q})[x]$, e l'anello R/\mathfrak{q} risulta ancora di Gorenstein (cfr. oss. alla Prop. 5.1 pag. 17 in [1]); così il problema è ricondotto al seguente¹⁾:

Dato un anello locale R di dimensione zero, con ideale massimale \mathfrak{p} , in cui l'ideale (0) sia irriducibile, considerato un ideale massimale \mathfrak{M} di $R[x]$, con $\mathfrak{M} = (\mathfrak{p}, F)$, $\mathfrak{M} \cap R = \mathfrak{p}$ ed F polinomio monico, l'ideale (F) risulta irriducibile in $R[x]_{\mathfrak{M}}$.

Per provare che (F) è irriducibile basta mostrare che ogni ideale \mathfrak{A} di $R[x]_{\mathfrak{M}}$ contenente propriamente (F) contiene una costante non nulla di R e dunque (cfr. [7] cond. 3 Th. 34 pag. 248) l'ideale $0 : \mathfrak{p}$ di R . Ciò implica infatti che anche l'intersezione di due ideali contenenti propriamente (F) contiene $0 : \mathfrak{p}$; ma (F) non può contenere costanti non nulle (essendo F monico), quindi (F) risulta irriducibile.

Sia dunque \mathfrak{A} un ideale di $R[x]_{\mathfrak{M}}$ contenente propriamente (F) ; \mathfrak{A} contiene quindi un polinomio A a coefficienti in R non multiplo di F . Sia n il grado di F ; essendo F monico si può dividere A per F e risulta $A = LF + P$, con P polinomio non nullo di \mathfrak{A} , di grado $m < n$:

$$P = p_0 + p_1 x + \dots + p_m x^m.$$

Se tutti i coefficienti di P appartengono all'ideale $0 : \mathfrak{p}$, si ha che, essendo questo il più piccolo ideale diverso da zero di R , $(p_m) = 0 : \mathfrak{p}$ e dunque $p_i \in (p_m) \forall i$; si ha quindi

$$P = p_m (x^m + t_{m-1} x^{m-1} + \dots + t_0).$$

Il polinomio $Q = x^m + t_{m-1} x^{m-1} + \dots + t_0$ non appartiene ad $\mathfrak{M} = (\mathfrak{p}, F)$ poichè, come si vede facilmente, i polinomi monici di \mathfrak{M} han grado $\geq n$; Q è dunque invertibile in $R[x]_{\mathfrak{M}}$, per cui $p_m \in \mathfrak{A}$, ciò che si voleva dimostrare.

¹⁾ Il ragionamento sin qui svolto è standard in situazioni di questo tipo; cfr., ad es. [4] Th. 25.10 pag. 86.

Se poi non tutti i coefficienti di P appartengono a $0 : \mathfrak{p}$, possiamo trovare un polinomio non nullo di \mathfrak{A} , di grado $< n$, con tutti i coefficienti in $0 : \mathfrak{p}$, e riportarci così al caso precedente. Sia infatti i il più grande intero per cui $p_i \notin 0 : \mathfrak{p}$ ($0 \leq i \leq m$); se p è un elemento non nullo di $0 : \mathfrak{p}$ si ha $(p) = (0 : \mathfrak{p}) \subset (p_i)$ onde $p = rp_i$ (per un opportuno $r \in R$) ed il polinomio $rP = rp_mx^m + \dots + px^i + \dots + rp_0$ è ancora un polinomio non nullo (p è $\neq 0$) di \mathfrak{A} , di grado al più m ($< n$) con i coefficienti delle potenze di x dalla i -esima in poi tutti in $0 : \mathfrak{p}$.

Si ha quindi, per induzione, l'asserto.

COROLLARIO 2. *Siano x_1, x_2, \dots, x_n elementi algebricamente indipendenti sopra un anello R ; se R è di Gorenstein, lo è pure l'anello di polinomi $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$.*

Dimostrazione: banale.

2. Sia R un anello ed \mathfrak{u} un ideale di R ; consideriamo su R la topologia \mathfrak{u} -adica. Se R è un anello locale di ideale massimale \mathfrak{m} , la topologia \mathfrak{m} -adica sarà chiamata anche topologia naturale di R (cfr. [4] pag. 52).

Sussiste (cfr. [2] Cap. III, § 3 n. 4 prop. 8) la seguente

PROPOSIZIONE 3. *Sia R un anello noetheriano e sia \mathfrak{u} un ideale di R . Sia \widehat{R} il completato (separato) di R per la topologia \mathfrak{u} -adica, j l'applicazione canonica di R in \widehat{R} . Allora:*

(i) *La topologia di \widehat{R} è $j(\mathfrak{u})\widehat{R}$ -adica.*

(ii) *L'applicazione $\mathfrak{n} \rightarrow j(\mathfrak{n})\widehat{R}$ è una biiezione dell'insieme degli ideali massimali di R contenenti \mathfrak{u} sull'insieme degli ideali massimali di \widehat{R} , e $\mathfrak{M} \rightarrow j^{-1}(\mathfrak{M})$ è la biiezione reciproca.*

(iii) *Sia \mathfrak{m} un ideale massimale di R contenente \mathfrak{u} , e sia $\mathfrak{M} = j(\mathfrak{m})\widehat{R}$; j induce un omomorfismo iniettivo $j' : R_{\mathfrak{m}} \rightarrow \widehat{R}_{\mathfrak{M}}$, e, identificando $R_{\mathfrak{m}}$ con la sua immagine tramite j' , risulta che la topologia naturale di $\widehat{R}_{\mathfrak{M}}$ induce quella naturale in $R_{\mathfrak{m}}$ ed $R_{\mathfrak{m}}$ risulta denso in $\widehat{R}_{\mathfrak{M}}$ per questa topologia.*

Dimostriamo ora il seguente

TEOREMA 4. *Sia R un anello noetheriano, \mathfrak{u} un ideale di R , \widehat{R} il completato di R per la topologia \mathfrak{u} -adica. Si ha allora:*

(i) *Se R è di Gorenstein, \widehat{R} è di Gorenstein.*

(ii) *Se $\mathfrak{u} \subseteq \text{rad } R$ ed \widehat{R} è di Gorenstein, anche R è di Gorenstein.*

Supponiamo dapprima che R sia un anello locale di ideale massimale \mathfrak{m} e che la topologia sia quella naturale; in questo caso $\mathfrak{m} = \text{rad } R$ e dunque dobbiamo provare che R è di Gorenstein se e solo se lo è \widehat{R} .

\widehat{R} è locale ([4] cap. II coroll. (17.6) pag. 55); sia \mathfrak{M} il suo ideale massimale. Si ha che \widehat{R} è un anello di Macaulay se e solo se lo è R [cfr. [4] cap. III (25.8) pag. 86]; inoltre se identifichiamo R con il sottoanello $i(R)$ di \widehat{R} , essendo $i: R \rightarrow \widehat{R}$ l'omomorfismo canonico (iniettivo) di R nel suo completato, ogni sistema di parametri in R risulta anche un sistema di parametri in \widehat{R} (cfr. [5] cap. V Th. 8 pag. 98). Basterà quindi dimostrare che se t_1, t_2, \dots, t_s è un sistema di parametri in R che genera dunque un ideale \mathfrak{m} -primario \mathfrak{q} , \mathfrak{q} è irriducibile se e solo se l'ideale \mathfrak{M} -primario $\mathfrak{q}\widehat{R}$ generato da t_1, t_2, \dots, t_s in \widehat{R} è irriducibile.

Poichè \mathfrak{q} è \mathfrak{m} -primario, la topologia \mathfrak{q} -adica di R coincide con quella naturale, in particolare \widehat{R} è il completato di R per la topologia \mathfrak{q} -adica. Ne segue l'isomorfismo $\widehat{R}/\mathfrak{q}\widehat{R} \simeq R/\mathfrak{q}$ per cui $\mathfrak{q}\widehat{R}$ è irriducibile se e solo se lo è \mathfrak{q} . Ciò prova l'asserto nel caso locale.

Passiamo ora al caso generale.

(i): Basterà verificare che, se \mathfrak{M} è un ideale massimale di \widehat{R} , l'anello $\widehat{R}_{\mathfrak{M}}$ è di Gorenstein. Con riferimento alla proposizione 3 poniamo $\mathfrak{m} = j^{-1}(\mathfrak{M})$; il completato \overline{R} di $R_{\mathfrak{m}}$ coincide, per la (iii), con quello di $\widehat{R}_{\mathfrak{M}}$. Poichè $R_{\mathfrak{m}}$ è di Gorenstein per ipotesi, segue dal caso locale che \overline{R} è di Gorenstein e quindi, sempre per il caso locale, anche $\widehat{R}_{\mathfrak{M}}$ è di Gorenstein.

(ii): Sia ora \widehat{R} di Gorenstein con $\mathfrak{u} \subseteq \text{rad } R$. Sia \mathfrak{m} un ideale massimale di R ; da $\mathfrak{u} \subseteq \text{rad } R$ segue $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{m}$. Allora, colle notazioni della proposizione 3, l'ideale $\mathfrak{M} = j(\mathfrak{m})$ è un ideale massimale di \widehat{R} .

Ne segue, per il caso locale, che il completato \bar{R} di $\widehat{R}_{\mathfrak{m}}$ è di Gorenstein, e lo è pure $R_{\mathfrak{m}}$ di cui \bar{R} è il completato.

Il teorema è così completamente acquisito.

OSSERVAZIONE: La proprietà (ii) del teorema 4 inverte soltanto parzialmente la (i). Ciò è dovuto al fatto che se $\mathfrak{u} \not\subseteq \text{rad } R$, \widehat{R} può essere di Gorenstein senza che lo sia R , come mostra il seguente esempio:

Consideriamo in $R = k[X, Y, Z]$ l'ideale $\mathfrak{u} = (XY, YZ, ZX)$. L'anello $A = R/\mathfrak{u} = k[x, y, z]$ non è di Gorenstein (è però di Macaulay, essendo \mathfrak{u} perfetto): infatti in A l'elemento $x + y + z$, non nullifico, genera un ideale primario il cui radicale è l'ideale (x, y, z) , che risulta massimale; si ha inoltre $(x + y + z) = (x + y + z, x) \cap (x + y + z, y)$ ed essendo dunque l'ideale $(x + y + z)$ riducibile, l'anello A non è di Gorenstein.

Consideriamo ora il completato \widehat{A} di A rispetto alla topologia \mathfrak{b} -adica, con $\mathfrak{b} = (x + y + z - 1)$. Gli unici ideali massimali di A che contengono \mathfrak{b} sono:

$$\mathfrak{m}_1 = (x, y, z - 1) = (z - 1), \quad \mathfrak{m}_2 = (x, y - 1, z) = (y - 1)$$

$$\mathfrak{m}_3 = (x - 1, y, z) = (x - 1),$$

$A_{\mathfrak{m}_1}, A_{\mathfrak{m}_2}, A_{\mathfrak{m}_3}$ risultano anelli di Gorenstein (locali regolari) e dunque per la condizione (c) \widehat{A} risulta di Gorenstein (pur non essendo A).

COROLLARIO 5. *Se R è un anello di Gorenstein, lo è anche l'anello delle serie formali $R[[X_1, \dots, X_n]]$.*

Infatti $R[X_1, \dots, X_n]$ è di Gorenstein (Coroll. 2) ed $R[[X_1, \dots, X_n]]$ ne è il completato per la topologia (X_1, \dots, X_n) -adica.

COROLLARIO 6. *Sia R un anello, \mathfrak{u} un ideale di R . Dotiamo R della topologia \mathfrak{a} -adica. Se R è di Gorenstein, lo è pure l'anello delle serie formali ristrette $R\{X_1, \dots, X_n\}$.*

Infatti $R\{X_1, \dots, X_n\}$ è il completato di $R[X_1, \dots, X_n]$ per la topologia $\mathfrak{u}(X_1, \dots, X_n)$ -adica (cfr. [6] Coroll. pag. 389).

BIBLIOGRAFIA

- [1] H. BASS: *On the ubiquity of Gorenstein rings*; Math. Zeitschr. 87, 8-28 (1963).
- [2] N. BOURBAKI: *Algèbre Commutative*, Chap. 3, Chap. 4; Hermann Paris 1961.
- [3] S. GRECO - P. SALMON: *Anelli di Macaulay*; Pubblicazioni dell'Ist. Mat. dell'Università di Genova, 1965.
- [4] M. NAGATA: *Local Rings*; Interscience Publishers 1962.
- [5] D. G. NORTHCOTT: *Ideal Theory*; Cambridge University Press. 1960.
- [6] P. SALMON: *Sur les séries formelles restreintes*; Bull. Soc. math. France, 92, 1964, p. 385-410.
- [7] O. ZARISKI - P. SAMUEL: *Commutative Algebra*, vol. I Van Nostrand, 1958.

Manoscritto pervenuto in redazione il 31 Agosto 1968.