

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIORGIO CASADEI

**Sul teorema di unicità di De La Vallée Poussin per
equazioni differenziali del terzo ordine**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 41 (1968), p. 300-305

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1968__41__300_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SUL TEOREMA DI UNICITÀ
DI DE LA VALLÉE POUSSIN PER EQUAZIONI
DIFFERENZIALI DEL TERZO ORDINE

GIORGIO CASADEI *)

Sia dato il problema al contorno

$$(1) \quad \begin{cases} y'''(t) = f(t, y, y', y'') \\ y(\alpha_i) = A_i \end{cases} \quad i = 1, 2, 3$$

essendo $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ ed $h = \alpha_3 - \alpha_1$ ¹⁾

De La Vallée Poussin [1] ha dimostrato che, se $f(t, y, y', y'')$ è continua e soddisfa la condizione di Lipschitz

$$(2) \quad |f(t, y_1, y_1', y_1'') - f(t, y_2, y_2', y_2'')| \leq \\ L_1 |y_1'' - y_2''| + L_2 |y_1 - y_2| + L_3 |y_1' - y_2'|,$$

il teorema di unicità per il problema (1) è valido nella ipotesi che h sia minore o uguale alla radice positiva h_0 della equazione

$$(3) \quad L_3 \frac{h^3}{6} + L_2 \frac{h^2}{2} + L_1 \frac{h}{1} - 1 = 0.$$

*) Indirizzo dell'A.: CNEN - Centro di Calcolo, Via Mazzini 2, 40138 Bologna.
Lavoro svolto nell'ambito dei Gruppi di ricerca matematici del C.N.R.

¹⁾ I casi $\alpha_2 = \alpha_1$ e $\alpha_2 = \alpha_3$ sono considerati più avanti con le condizioni al contorno modificate nel modo usuale.

In questa nota, seguendo un suggerimento di U. Richard, si trova una migliore valutazione della quantità h_0 dimostrando che il problema (1) può ammettere due soluzioni solo se la quantità h verifica la disequaglianza

$$(4) \quad L_3 \frac{h^3}{24} + L_2 \frac{h^2}{8} + L_1 \frac{h}{2} - 1 > 0.$$

La (4) rappresenta anche un miglioramento della limitazione trovata da Ph. Hartman e A. Wintner [2], essendo una estensione di un risultato ottenuto da U. Richard [3] per le equazioni del secondo ordine.

Nel corso della dimostrazione si farà uso del seguente

LEMMA. Dati tre numeri α , β e γ , con $\alpha < \beta < \gamma$, vale la seguente disugualianza :

$$(5) \quad \int_{\alpha}^{\beta} dt \int_t^{\beta} (\gamma - x) dx < \int_{\alpha}^{\beta} dt \int_{\alpha}^t (\gamma - x) dx.$$

La (5) può essere provata nel seguente modo. Posto

$$(6) \quad \varphi_1(t) = \int_t^{\beta} (\gamma - x) dx, \quad \varphi_2(t) = \int_{\alpha}^t (\gamma - x) dx,$$

$$c = \frac{1}{2} [(\gamma - \alpha)^2 - (\gamma - \beta)^2],$$

si ha

$$(7) \quad \begin{aligned} \varphi_1(\alpha) &= c, & \varphi_1(\beta) &= 0, & \varphi_1'(t) &> 0, \\ \varphi_2(\alpha) &= 0, & \varphi_2(\beta) &= c, & \varphi_2'(t) &< 0, \end{aligned}$$

e quindi

$$(8) \quad \begin{aligned} \varphi_1(t) &\leq c(\beta - t)/(\beta - \alpha), \\ \varphi_2(t) &\geq c(t - \alpha)/(\beta - \alpha), \end{aligned}$$

nelle (8) il segno di uguaglianza valendo solo per $t = \alpha$ e per $t = \beta$.
Dalle (8) seguono le seguenti

$$(9) \quad \int_{\alpha}^{\beta} \varphi_1(t) dt < \frac{c}{2} (\beta - \alpha)$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi_2(t) dt > \frac{c}{2} (\beta - \alpha),$$

combinando le (9) e le (6) si attiene la (5).

Dimostrazione della (4). Si supponga ora che $y_1(t)$ e $y_2(t)$ siano due soluzioni distinte del problema (1). Posto

$$(10) \quad z(t) = y_1(t) - y_2(t)$$

si ha

$$(11) \quad z(\alpha_i) = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

e per il teorema di Rolle

$$(12) \quad z'(\beta_i) = 0 \quad i = 1, 2$$

$$(13) \quad z''(\gamma) = 0$$

essendo

$$(14) \quad \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \alpha_3$$

e

$$(15) \quad \beta_1 < \gamma < \beta_2.$$

Posto $\bar{\alpha} = (\alpha_1 + \alpha_3)/2$, si supponga $\gamma \leq \bar{\alpha}$ ²⁾ e, per $\alpha_1 \leq t \leq \gamma$.

$$(16) \quad \max |z'''(t)| = \max |f(t, y_1, y_1', y_1'') - f(t, y_2, y_2', y_2'')| = \mu.$$

²⁾ I calcoli che seguono possono ripetersi, sostituendo α_1 con α_3 , β_1 con β_2 , nell'ipotesi simmetrica che riesca $\gamma \geq \bar{\alpha}$.

L'ipotesi che le due soluzioni siano distinte implica che sia $\mu \neq 0$. Se così non fosse, $z(t)$ sarebbe un polinomio di 2° grado non identicamente nullo, ciò che contraddirebbe alle condizioni (11).

Si trovano ora per $z(t)$, $z'(t)$ e $z''(t)$ delle limitazioni valide per $\alpha_1 \leq t \leq \gamma$, limitazioni che permettono di provare la (4).

Dalle (13) e (16) si ottiene infatti

$$(17) \quad |z''(t)| \leq \mu(\gamma - t) \leq \mu(\bar{\alpha} - \alpha_1) = \mu \frac{h}{2},$$

dalle (12) e (17) si ottiene

$$(18) \quad |z'(t)| \leq \left| \mu \int_{\beta_1}^t (\gamma - t_1) dt_1 \right| < \mu \int_{\alpha_1}^{\gamma} (\gamma - t_1) dt_1 \leq \mu \frac{h^2}{8},$$

e dalle (11) e (18) si ottiene

$$(19) \quad |z(t)| \leq \mu \int_{\alpha_1}^t dt_2 \left| \int_{\beta_1}^{t_2} (\gamma - t_1) dt_1 \right| \leq \\ \leq \mu \int_{\alpha_1}^{\gamma} dt_2 \left| \int_{\beta_1}^{t_2} (\gamma - t_1) dt_1 \right| = \\ = \mu \int_{\alpha_1}^{\beta_1} dt_2 \int_{t_2}^{\beta_1} (\gamma - t_1) dt_1 + \mu \int_{\beta_1}^{\gamma} dt_2 \int_{\beta_1}^{t_2} (\gamma - t_1) dt_1.$$

Poichè si ha

$$\int_{\beta_1}^{\gamma} dt_2 \int_{\beta_1}^{t_2} (\gamma - t_1) dt_1 < \int_{\beta_1}^{\gamma} dt_2 \int_{\alpha_1}^{t_2} (\gamma - t_1) dt_1$$

e, per la (5),

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} dt_2 \int_{t_2}^{\beta_1} (\gamma - t_1) dt_1 < \int_{\alpha_1}^{\beta_1} dt_2 \int_{\alpha_1}^{t_2} (\gamma - t_1) dt_1,$$

si ottiene

$$(19) \quad |z(t)| < \mu \int_{\alpha_1}^{\beta_1} dt_2 \int_{\alpha_1}^{t_2} (\gamma - t_1) dt_1 + \mu \int_{\beta_1}^{\gamma} dt_2 \int_{\alpha_1}^{t_2} (\gamma - t_1) dt_1 = \\ = \int_{\alpha_1}^{\gamma} dt_2 \int_{\alpha_1}^{t_2} (\gamma - t_1) dt_1 \leq \mu \frac{h^3}{24}.$$

Si osservi ora che possiamo trascurare il caso $L_2 = L_3 = 0$, caso in cui il teorema di unicità vale senza limitazioni per la grandezza $h = \alpha_3 - \alpha_1$.

Ricordando le (2) e (10), facendo uso delle maggiorazioni (17), (18) e (19), del fatto che le ultime due sono strette e che possiamo escludere $L_2 = L_3 = 0$, otteniamo

$$(20) \quad |z'''(t)| < \mu \left[L_3 \frac{h_3}{24} + L_2 \frac{h^2}{8} + L_1 \frac{h}{2} \right],$$

per ogni $t \in [\alpha_1, \gamma]$, e quindi anche per il valore di t in cui $|z'''(t)|$ è massimo. Sostituendo quindi $|z'''(t)|$ con μ , la (20) si può scrivere

$$(20_1) \quad L_3 \frac{h^3}{24} + L_2 \frac{h^2}{8} + L_1 \frac{h}{2} - 1 > 0.$$

Se dunque il problema (1) ammette due soluzioni distinte la quantità $h = \alpha_3 - \alpha_1$ è maggiore della radice positiva della (4); la dimostrazione del caso generale $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ è determinata.

Casi Limite. Sia $\alpha_2 = \alpha_3$ oppure $\alpha_1 = \alpha_2$. Le disuguaglianze (17) (18) (19) restano vere almeno col segno « \leq ».

Poichè i dubbi sulla possibilità di restringersi al segno « $<$ » nella (20) riguardano soltanto il caso $\gamma = \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{2}$, possiamo limitare la nostra indagine a questo caso.

Ciò significa che, se $\alpha_2 = \alpha_3$, possiamo prendere in considerazione l'intervallo (α, γ) , e, se $\alpha_2 = \alpha_1$, possiamo prendere in consi-

derazione l'intervallo (γ, α_3) , e applicare rispettivamente le (17), (18) e (19) o le loro analoghe per l'altro semintervallo.

In ogni eventualità possiamo dunque contare su due disuguaglianze strette, del tipo (18) e (19), e salvare la disuguaglianza stretta nella (20).

In questo modo la dimostrazione della (20_1) è completa.

BIBLIOGRAFIA

- [1] C. DE LA VALLÉE POUSSIN: *Sur l'équation différentielle linéaire du second ordre. Détermination d'une intégrale par deux valeurs assignées. Extension aux équations d'ordre n.* Journ. de Math. pur. et appl. (9), 8 (1929) pp.125-144.
- [2] PH. HARTMAN, A. WINTNER: *On an oscillation criterion of De La Vallée Poussin.* Quart. Applied. Math. (13), 3 (1955), pp. 330-332.
- [3] U. RICHARD: *Sur un théorème d'unicité de M. C. De La Vallée Poussin pour l'équation différentielle du second ordre.* Résumés 6 (Equations différentielles ordinaires) pp. 14-15. Congresso Internazionale dei Matematici — Mosca, 16-26 Agosto 1966.

Manoscritto pervenuto in redazione il 2-5-68.