RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ETTORE BENTSIK

Su di un tipo di precessioni regolari per un corpo rigido asimmetrico soggetto a forze newtoniane

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 41 (1968), p. 252-260

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1968__41__252_0>

SU DI UN TIPO DI PRECESSIONI REGOLARI PER UN CORPO RIGIDO ASIMMETRICO SOGGETTO A FORZE NEWTONIANE

ETTORE BENTSIK *)

È noto che un qualunque corpo rigido pesante fissato senza attrito per un suo punto non può muoversi di moto di precessione con asse di precessione verticale [1]).

In questa nota dimostrerò che se, invece, nella valutazione delle forze esplicate dalla terra sul corpo si tiene conto di termini d'ordine superiore rispetto a quelli che comunemente danno luogo al peso, allora sono possibili dei moti di precessione con asse verticale. Naturalmente trattasi di moti molto lenti perchè dovuti al termine correttivo che è piccolo di fronte al peso e che tendono alla quiete quando si faccia tendere a zero il termine correttivo.

Vale la pena di riconoscere che l'asse di figura deve coincidere con una qualunque delle due rette baricentrali ortogonali ai piani delle sezioni circolari dell'ellissoide d'inerzia proprio come nel caso delle precessioni regolari senza termini correttivi.

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito della attività dei gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la Matematica del C. N. R.

Indirizzo dell'Autore: Seminario Matematico — Università — Padova.

[1]) G. GRIOLI — « *Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico* ». Annali di Matematica pura ed applicata. Serie IV — Tomo XXVI - 1947 pag. 1.

Questo è il motivo per cui facendo tendere a zero il termine correttivo il moto tende alla quiete dato che gli assi ciclici baricentrali danno tale soluzione nel caso classico.

Fa eccezione il caso del giroscopio. In tal caso la condizione necessaria e sufficiente affinchè il moto sia una precessione regolare comprende come caso particolare quello del moto in assenza di termine correttivo, il chè è anche naturale, dato che ora le due rette cicliche coincidono con l'asse giroscopico.

Equazioni generali.

Sia $\mathcal{C}$ un corpo rigido asimmetrico con un punto O fisso e soggetto a forze di tipo newtoniano di centro Q.

Indicata con R la distanza di O da Q, M la massa di Q, m la massa del corpo, μ la sua densità e G il suo baricentro, il potenziale delle forze newtoniane agenti sul corpo si può rappresentare mediante una serie di potenze di $\frac{1}{R}$ [2]).

Si indichi con **c** il versore (costante) di OQ, e, con **u** il versore di OG, con δ il modulo di OG e si assuma una terna trirettangola levogira (O, x, y, z) di centro O, assi solidali al sistema rigido e tale che il piano oxz contenga G; detti $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ i versori degli assi di riferimento, c_1, c_2, c_3 i coseni direttori di $\mathbf{c}$, u_1, u_2, u_3 i coseni direttori di **u** e x_0, y_0, z_0 le coordinate di G rispetto alla terna solidale prescelta, arrestando lo sviluppo al 2^0 termine, il potenziale è espresso da [3])

$$(1) \qquad U = mg\,(x_0 c_1 + y_0 c_2 + z_0 c_3) - \frac{3g}{R}(A c_1^2 + B c_2^2 + C c_3^2 - 2A' c_2 c_3 - 2B' c_1 c_3 - 2\,C' c_1 c_2),$$

---

[2]) E. LEIMANIS — « *The General Problem of the Motion of Coupled Rigid Bodies about a Fixed Point* ». Springer-Verlag, Berlin. Heidelberg. New-York 1965 — pagg. 256-262.

[3]) Loc. cit., in nota 2).

dove si è posto

$$g = \frac{hM}{R^2} \tag{2}$$

e A, B, C, A', B', C', sono rispettivamente i momenti d'inerzia e i momenti di deviazione di $\mathcal{C}$ rispetto agli assi di riferimento.

Nell'approssimazione sopra precisata le equazioni del moto del corpo rigido $\mathcal{C}$ assumono la forma [4])

$$\sigma\dot{\omega} + \omega \wedge \sigma\omega = mg\,\delta\,\mathbf{u} \wedge \mathbf{c} + \frac{3g}{R}\,\mathbf{c} \wedge \sigma\mathbf{c} \tag{3}$$

dove $\omega \equiv (p, q, r)$ è la velocità angolare del corpo e σ la omografia d'inerzia:

$$\sigma \equiv \begin{vmatrix} A & -C' & -B' \\ -C' & B & -A' \\ -B' & -A' & C \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Sussistono inoltre gli integrali primi [5])

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2A'\,qr - 2B'\,pr - 2C'\,pq - 2U = 2E_0 \tag{5}$$

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1 \tag{6}$$

$$(Ap - B'\,r - C'\,q)\,c_1 + (Bq - C'\,p - A'\,r)\,c_2 + \\ + (Cr - A'\,q - B'\,p)\,c_3 = \text{cost.} \tag{7}$$

Si noti che se si arresta lo sviluppo al primo termine risulta

$$U = mg\,OG \times \mathbf{c} \tag{8}$$

[4]) Loc. cit., in nota. 2)

[5]) Loc. cit., in nota. 2)

cioè ci si riduce al caso del peso. L'asse di versore **c** verrebbe così ad essere la verticale orientata verso il basso; per analogia indicheremo d'ora in poi l'asse di versore **c** come la verticale.

Equazioni dinamiche nel caso di precessioni regolari con asse di precessione verticale.

Si vogliano ora determinare delle precessioni regolari di $\mathcal{C}$ aventi per asse di figura l'asse di versore **k** e l'asse di precessione parallelo al versore **c**. In tal caso sarà

$$\boldsymbol{\omega} = \mu \mathbf{k} + \nu \mathbf{c} \tag{9}$$

con μ e ν costanti.

Si consideri ora una terna di riferimento fissa O, **e**, **e'**, **c**, di centro O.

Siano ϑ, φ, ψ gli angoli di Eulero relativi alle due terne fissate, dove ϑ è l'angolo formato da **c** e **k**. Ne segue, per la particolare scelta degli assi

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{i} + u_3 \mathbf{k}. \tag{10}$$

Palesamente risulta

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \mathbf{k} + \dot{\psi} \mathbf{c} \qquad \text{con} \qquad \dot{\varphi} = \text{cost}, \ \dot{\psi} = \text{cost}. \tag{11}$$

e quindi le componenti di $\boldsymbol{\omega}$ risultano date da

$$\begin{cases} p = \dot{\psi} \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \varphi \\ q = \dot{\psi} \operatorname{sen} \vartheta \cos \varphi \\ r = \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi} \end{cases} \tag{12}$$

da cui

$$\begin{cases} \dot{p} = \dot{\varphi}\, \dot{\psi} \operatorname{sen} \vartheta \cos \varphi \\ \dot{q} = -\, \dot{\varphi}\, \dot{\psi} \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \varphi \\ \dot{r} = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Le espressioni delle componenti del momento della quantità di moto sono:

$$
(14)\qquad \begin{cases} K_x = (A \operatorname{sen} \varphi - C' \cos \varphi)\, \dot\psi \operatorname{sen} \vartheta - B' (\dot\psi \cos \vartheta + \dot\varphi) \\ K_y = (B \cos \varphi - C' \operatorname{sen} \varphi)\, \dot\psi \operatorname{sen} \vartheta - A' (\dot\psi \cos \vartheta + \dot\varphi) \\ K_z = C (\dot\psi \cos \vartheta + \dot\varphi) - (A' \cos \varphi + B' \operatorname{sen} \varphi)\, \dot\psi \operatorname{sen} \vartheta \end{cases}
$$

e per le loro derivate si ha:

$$
(15)\qquad \begin{cases} \dot K_x = (A \cos \varphi + C' \operatorname{sen} \varphi)\, \dot\varphi\, \dot\psi \operatorname{sen} \vartheta \\ \dot K_y = -(B \operatorname{sen} \varphi + C' \cos \varphi)\, \dot\varphi\, \dot\psi \operatorname{sen} \vartheta \\ \dot K_z = (A' \operatorname{sen} \varphi - B' \cos \varphi)\, \dot\varphi\, \dot\psi \operatorname{sen} \vartheta. \end{cases}
$$

Infine i coseni direttori di **c** sono dati da;

$$
(16)\qquad \begin{cases} c_1 = \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \vartheta \\ c_2 = \cos \varphi \operatorname{sen} \vartheta \\ c_3 = \cos \vartheta. \end{cases}
$$

In base alle posizioni fatte, proiettando la (3) sugli assi solidali, si ha:

$$
(17)\qquad \begin{aligned} & A\, \dot\varphi\dot\psi \cos \varphi \operatorname{sen} \vartheta + C'\dot\varphi\psi \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \vartheta + \psi \operatorname{sen} \vartheta \cos \varphi\, [C\dot\psi \cos \vartheta + \\ & + C\dot\varphi - A'\dot\psi \cos\varphi \operatorname{sen}\vartheta - B'\dot\psi \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\vartheta] - (\dot\psi\cos\vartheta + \dot\varphi)[B\dot\psi\cos\varphi\operatorname{sen}\vartheta - \\ & - C'\dot\psi \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\vartheta - A'(\psi \cos \vartheta + \dot\varphi)] = - mg\, \delta u_3 \cos \varphi \operatorname{sen} \vartheta + \\ & + \frac{3g}{R} [C \cos\varphi \operatorname{sen}\vartheta \cos\vartheta - B' \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \operatorname{sen}^2\vartheta - A' \cos^2\varphi \operatorname{sen}^2\vartheta - \\ & - B \cos \varphi \operatorname{sen} \vartheta \cos \vartheta + A' \cos^2 \vartheta + C' \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \vartheta \cos \vartheta], \end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned} & - B\, \dot\varphi\dot\psi \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\vartheta - C'\dot\varphi\dot\psi \cos\varphi \operatorname{sen}\vartheta - \dot\psi \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\varphi\, [C\dot\psi \cos\vartheta + \\ & + C\dot\varphi - A'\dot\psi\cos\varphi\operatorname{sen}\vartheta - B'\dot\psi\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\vartheta] + (\dot\psi\cos\vartheta + \dot\varphi)[A\dot\psi\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\vartheta - \\ & - C'\dot\psi \cos \varphi \operatorname{sen} \vartheta - B'(\dot\psi \cos \vartheta + \dot\varphi)] = - mg\, \delta u_1 \cos \vartheta + \end{aligned}
$$

$$+ mg\,\delta u_3 \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\vartheta + \frac{3g}{R}[- C \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\vartheta \cos\vartheta +$$

$$+ B' \operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}^2\vartheta + A' \cos\varphi \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}^2\vartheta + A \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\vartheta \cos\vartheta -$$

$$- B' \cos^2\vartheta - C' \cos\varphi \operatorname{sen}\vartheta \cos\vartheta],$$

$$A'\dot{\varphi}\dot{\psi} \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\vartheta - B'\dot{\varphi}\dot{\psi} \cos\varphi \operatorname{sen}\vartheta + \dot{\psi} \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\varphi [- A'\dot{\varphi} -$$

$$- A'\dot{\psi} \cos\vartheta + B\dot{\psi} \cos\varphi \operatorname{sen}\vartheta - C'\dot{\psi} \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\vartheta] -$$

$$- \dot{\psi} \operatorname{sen}\vartheta \cos\varphi [- B'\dot{\varphi} - B'\dot{\psi}\cos\vartheta + A\dot{\psi} \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\vartheta - C'\dot{\psi} \cos\varphi \operatorname{sen}\vartheta] =$$

$$= mg\,\delta u_1 \cos\varphi \operatorname{sen}\vartheta + \frac{3g}{R}[B \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \operatorname{sen}^2\vartheta -$$

$$- A' \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\vartheta \cos\vartheta - C' \operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}^2\vartheta - A \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \operatorname{sen}^2\vartheta +$$

$$+ B' \cos\varphi \operatorname{sen}\vartheta \cos\vartheta + C' \cos^2\varphi \operatorname{sen}^2\vartheta].$$

Determinazione delle precessioni regolari ad asse di precessione verticale.

La terza equazione di Eulero assume la forma sintetica

$$a_1 \operatorname{sen}\varphi + a_2 \cos\varphi + a_3 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi + a_4 \cos 2\varphi = 0 \tag{20}$$

con

$$\left\{\begin{aligned} a_1 &= - A'\dot{\psi}^2 \operatorname{sen}\vartheta \cos\vartheta + A' \frac{3g}{R} \cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta \\ a_2 &= B'\dot{\psi}^2 \operatorname{sen}\vartheta \cos\vartheta - B' \frac{3g}{R} \operatorname{sen}\vartheta \cos\vartheta - mg\,\delta u_1 \operatorname{sen}\vartheta \\ a_3 &= (B - A)\dot{\psi}^2 \operatorname{sen}^2\vartheta - (B - A)\frac{3g}{R} \operatorname{sen}^2\vartheta \\ a_4 &= C'\dot{\psi}^2 \operatorname{sen}^2\vartheta - C' \frac{3g}{R} \operatorname{sen}^2\vartheta. \end{aligned}\right. \tag{21}$$

Dovendo la (20) essere verificata per qualunque valore di φ, dovrà essere

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$$

e quindi

$$(22) \qquad \begin{cases} A' \operatorname{sen} \vartheta \cos \vartheta \left[\dfrac{3g}{R} - \dot{\psi}^2\right] = 0 \\[2ex] B' \operatorname{sen} \vartheta \cos \vartheta \left[\dot{\psi}^2 - \dfrac{3g}{R}\right] - mg\, \delta u_1 \operatorname{sen} \vartheta = 0 \\[2ex] (B - A) \operatorname{sen}^2 \vartheta \left[\dot{\psi}^2 - \dfrac{3g}{R}\right] = 0 \\[2ex] C' \operatorname{sen}^2 \vartheta \left[\dot{\psi}^2 - \dfrac{3g}{R}\right] = 0. \end{cases}$$

Le (22) sono certamente verificate se si suppone

$$(23) \qquad u_1 = 0 \,, \quad \dot{\psi}^2 = \frac{3g}{R} \,.$$

Tenendo presente che si suppone $\operatorname{sen} \vartheta \neq 0$, facili calcoli mostrano che ogni altra condizione sui dati, diversa dalle (23), con la quale si può soddisfare alle (22) porta o ancora alle (23) o alla condizione che il solido sia un giroscopio (caso che per ora si esclude).

L'asse di figura deve, pertanto, essere baricentrale.

Si considerino le prime due equazioni di Eulero.

Dalla prima si ha:

$$(24) \qquad \begin{aligned} &\operatorname{sen} \varphi \left[2C' \dot{\varphi} \dot{\psi} \operatorname{sen} \vartheta\right] + \cos \varphi \left[(A - B)\, \dot{\varphi}\, \dot{\psi} \operatorname{sen} \vartheta + \operatorname{sen} \vartheta\, (C \dot{\varphi} \dot{\psi} + \right. \\ &\left. + mg\, \delta \operatorname{sen} \vartheta)\right] + \left[A' (\dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi})^2 - A' \frac{3g}{R} \cos^2 \vartheta\right] = 0 \end{aligned}$$

per cui dovrà essere

$$(25) \qquad \begin{cases} (A - B)\,\dot\varphi\dot\psi \operatorname{sen}\vartheta + \operatorname{sen}\vartheta\,(C\,\dot\varphi\dot\psi + mg\,\delta) = 0 \\ A'\,(\dot\psi\cos\vartheta + \dot\varphi)^2 - \dfrac{3g}{R}\,A'\cos^2\vartheta = 0 \\ 2C'\dot\varphi\dot\psi \operatorname{sen}\vartheta = 0. \end{cases}$$

Dalla terza delle (25) segue

$$(26) \qquad C' = 0,$$

dalla 2ª delle (25) tenendo conto delle (23), si ha

$$(27) \qquad 2\dot\psi\cos\vartheta + \dot\varphi = 0.$$

Dalla prima delle (25) si ha infine

$$(28) \qquad (A - B + C)\,\dot\varphi\dot\psi + mg\,\delta = 0\,.$$

Analogamente dalla IIª equazione di Eulero si trae la (27) e, anzichè la (28), si ha

$$(29) \qquad (A - B - C)\,\dot\varphi\,\dot\psi - mg\,\delta = 0.$$

Sommando membro a membro le (28), (29) si ha

$$(30) \qquad (A - B)\,\dot\varphi\,\dot\psi = 0$$

da cui segue

$$(31) \qquad A = B$$

$$(32) \qquad C\,\dot\varphi\,\dot\psi + mg\,\delta = 0.$$

Dalle (26), (31) si vede che l'asse di figura non solo è baricentrale ma è, più precisamente, una delle due rette normali alle sezioni circolari dell'ellissoide d'inerzia.

La (23) determina la $\dot\psi = \sqrt{\dfrac{3g}{R}}$, la (32) determina

$$(33) \qquad \dot\varphi = -\frac{mg\,\delta}{C}\sqrt{\frac{R}{3g}}$$

e la (27) fornisce l'angolo di precessione che deve essere tale da risultare

$$\cos\vartheta = -\frac{\dot\varphi}{2\dot\psi} = \frac{m\delta\, R}{6C} \tag{34}$$

purchè sia

$$m\,\delta\, R < 6C. \tag{35}$$

Nel caso delle precessioni ora determinate il potenziale risulta una funzione periodica di periodo $\frac{2\pi}{\dot\varphi}$ e così pure l'energia cinetica. Il sussistere dell'integrale dell'energia non comporta quindi altre limitazioni per $\dot\varphi$ e $\dot\psi$.

Caso giroscopico.

Nel caso che il solido sia un giroscopio, supposto inizialmente che l'asse di figura non sia l'asse giroscopico si possono considerare valide le considerazioni svolte e si arriva quindi a concludere che dovendo essere l'asse di figura una delle rette ortogonali alle sezioni circolari dell'ellissoide, tale retta viene proprio a coincidere con l'asse giroscopico.

Supposto che, come nel caso generale, l'asse di precessione sia la verticale e rilevato che l'asse di figura deve essere l'asse giroscopico, assunta come terna di riferimento una terna solidale coincidente con una terna principale d'inerzia si vede che, dovendo essere $A = B$, $A' = B' = C' = 0$, $u_1 = 0$, la (20), tenuto conto delle (21), è identicamente soddisfatta.

Dalle prime due equazioni di Eulero si trae invece

$$(C - A)\left(\dot\psi^2 - \frac{3g}{R}\right)\cos\vartheta + C\,\dot\varphi\,\dot\psi + mg\,\delta = 0. \tag{36}$$

La (36) risulta essere la condizione cui devono soddisfare $\dot\psi, \dot\varphi$ e $\cos\vartheta$ perchè il moto sia una precessione regolare.

Va notato che per $\frac{3g}{R} = 0$ la (36) si riduce alla ben nota condizione che si ha nel caso classico.

Manoscritto pervenuto in redazione il 20-6-1968.