Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Franca Busulini

Alcuni nuovi aspetti del teorema fondamentale della geometria proiettiva in un piano desarguesiano

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 41 (1968), p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1968__41__1_0>

ALCUNI NUOVI ASPETTI DEL TEOREMA FONDAMENTALE DELLA GEOMETRIA PROIETTIVA IN UN PIANO DESARGUESIANO

FRANCA BUSULINI *)

Chiamata proiettività π tra due rette distinte S, S_2 di un piano grafico desarguesiano e non pascaliano un prodotto di prospettività, è noto che π si può ottenere come prodotto di due prospettività soltanto: $\pi = \lambda\lambda_1$ [6, 3, 5, 7, 1].

In questa Nota la retta A congiungente i centri s, s_1 delle λ, λ_1 (centri di proiezione della π) verrà chiamata *asse proiettante* e la coppia (a, a_2) in cui A sega le due rette S, S_2, se $a \neq a_2$, si dirà *coppia proiettante.* Si dimostra allora che (P. 6):

Ogni proiettività fra due rette distinte è individuata da due coppie di punti corrispondenti e da un asse proiettante non contenente alcuna di queste coppie; in quanto si può scegliere come centri di proiezione della π una coppia di punti generici dell'asse proiettante A, in particolare se $a \neq a_2$ la coppia proiettante (a, a_2), (cfr. PP. 7, 8, 9).

Con riferimento alle coppie proiettanti si verifica che:

In una proiettività π tra due rette distinte S, S_2

a) se $S \cap S_2$ è unito: ogni coppia di punti corrispondenti distinti è proiettante oppure non vi è alcuna coppia proiettante a seconda che la π è oppure non è una prospettività (cfr. PP. 1, 10);

b) se $S \cap S_2$ non è unito, la π è dotata di coppie proiettanti; precisamente, detto K il corpo (non commutativo) delle coordinate affini e H il gruppo moltiplicativo del centro di K, l'insieme delle

*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca matematici del C. N. R..

Indirizzo dell'Autore: Seminario Matematico, Università, Padova.

ascisse delle prime componenti delle coppie proiettanti è un sistema laterale di H rispetto al gruppo moltiplicativo di K (cfr. PP. 11, 12).

Vengono infine enunciate diverse proprietà equivalenti al teorema di PASCAL tra cui

Una prospettività fra due rette incidenti in un punto di una retta fissata A (e centro di prospettiva $s \notin A$) è una affinità rispetto alla retta A.

1. Sia Σ un piano grafico desarguesiano. Ricordiamo che:

Due punteggiate di Σ riferite come *sezioni* di uno stesso fascio di rette di centro s si corrispondono nella *prospettività* λ, di *centro* di prospettività s.

Diremo *proiettività* π tra due rette di Σ una corrispondenza

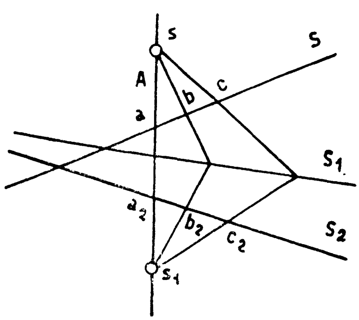

Fig. 1

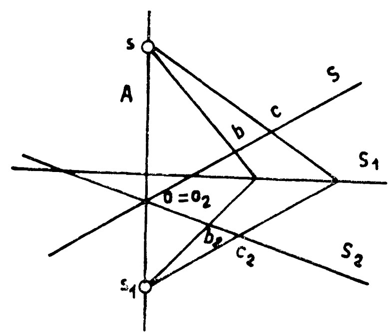

Fig. 2

che sia una prospettività o il prodotto di un numero finito qualsiasi di prospettività.

Data una proiettività $\pi = \lambda\lambda_1$ fra due rette S, S_2, di « retta intermediaria » S_1 chiameremo (figg. 1, 2, 3):

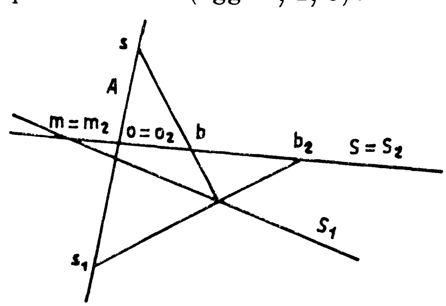

Fig. 3

1) i punti s, s_1 centri delle λ, λ_1 *centri di proiezione*: ovviamente $s, s_1 \notin S_1$, $s \notin S$, $s_1 \notin S_2$;

2) la retta $A = s\, s_1$ *asse proiettante.*

Rileviamo che l'asse proiettante A sega le rette S, S_2 in una coppia di punti corrispondenti della π. Se in particolare i centri di proiezione sono $s = a_2 \in S_2$ e $s_1 = a \in S$ (quindi $S \neq S_2$) la coppia (a, a_2), dicesi una *coppia proiettante* della π.

Si noti che in tal caso la retta intermediaria S_1 sega S e S_2

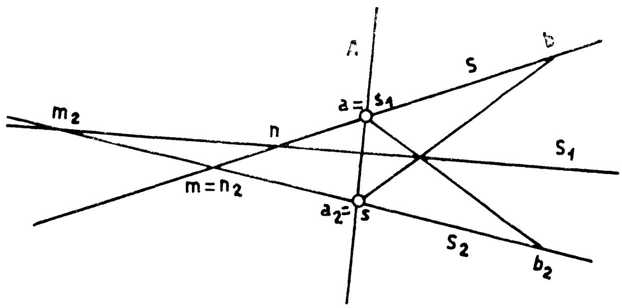

Fig. 4

nei corrispondenti del punto $S \cap S_2$ (figg. 4, 5).

Si osservi che:

P.1. *In una prospettività fra due rette distinte ogni coppia di punti corrispondenti distinti è proiettante.*

Infatti (fig. 5), data una prospettività fra le rette S, S_2 di centro $\bar{s}$, se (a, a_2) e $(\varkappa, \varkappa_2)$ sono due sue coppie qualsiansi (diverse dal punto $S \cap S_2$), detta S_1 la polare armonica di $\bar{s}$ rispetto ad S, S_2, $a_2 \varkappa \cap a \varkappa_2 = p \in S_1$; c. v. d..

Vedremo nel seguito (nn. 4, 5) che in un piano non pascaliano

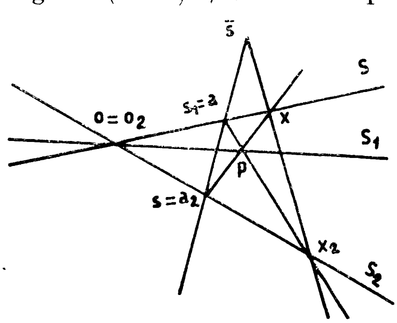

Fig. 5

questa proprietà è vera *soltanto* per le prospettività, anzi vedremo che esistono proiettività addirittura prive di coppie proiettanti.

2. Enunciamo i seguenti lemmi:

LEMMA I. *La proiettività* $\pi = \lambda \lambda_1$ *tra* S, S_2 *con* $S \neq S_2$ *e retta intermediaria* $S_1 \ni S \cap S_2$ *è una prospettività,* (fig. 6).

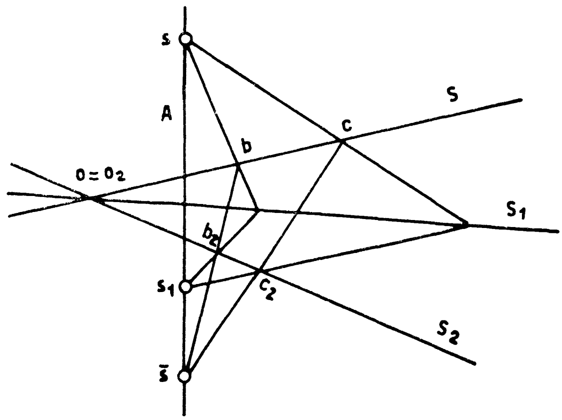

Fig. 6

Esso è una immediata conseguenza del teorema di DESARGUES. Si noti che il centro di prospettività $\bar{s}$ appartiene all'asse proiettante, (fig. 6).

Da questo lemma e dalla P.1 segue ovviamente che:

P.2. *Condizione necessaria e sufficiente affinché una proiettività* $\pi = \lambda \lambda_1$ *fra due rette distinte con il punto comune unito sia una prospettività è che essa sia dotata di coppia proiettante.*

Per la sufficienza si osservi infatti che la retta intermediaria S_1 deve passare per il punto comune.

Come risulterà dalla P.3 la condizione $\pi = \lambda\lambda_1$ non è restrittiva.

Passiamo ora al

LEMMA II, *a) La proiettività* $\pi = \lambda \lambda_1$ *tra* S, S_2 *si può ottenere come prodotto di altre due prospettività tali che la nuova retta intermediaria sia una qualsivoglia retta non congiungente una coppia di* *punti corrispondenti della* π, *né passante per il punto* $S \cap S_2$ [6, 3, 5, 7, 1];

b) *L'asse proiettante della* π *rimane invariato.* (Il comma *b*) è contenuto implicitamente nella dimostrazione di *a*)).

Sussistono inoltre i seguenti lemmi:

LEMMA III. *Ogni proiettività fra due rette distinte che sia il prodotto di tre prospettività si può ottenere come prodotto di due prospettività soltanto* [6, 3, 5, 7, 1].

LEMMA IV. *Ogni prospettività fra due rette distinte si può anche esprimere come prodotto di due prospettività.*

Infatti, detto $\bar{s}$ il centro di prospettiva della prospettività data fra S, S_2, basta assumere come centri di prospettività s, s_1, due punti generici di una retta per $\bar{s}$ e applicare il teorema di DESARGUES.

Dai lemmi III, IV si deduce il teorema fondamentale

P.3. *Ogni proiettività fra due rette distinte si può ottenere come prodotto di due prospettività.*

Come notevole corollario

P.4. *Ogni proiettività fra due rette distinte è dotata di asse proiettante.*

Ha interesse, per il seguito, mettere in evidenza la seguente proprietà che si collega al comma *b*) del lemma II e al lemma III:

P.5. *Se, con riferimento al lemma III, i centri delle tre prospettività date appartengono ad una medesima retta* A, *i centri delle due prospettività dedotte appartengono alla medesima retta* A [8, 1].

Essa è pertanto un asse proiettante della proiettività data.

Orbene possiamo considerare la famiglia Φ_A delle proiettività tra coppie di rette generate come prodotti di prospettività i cui centri appartengono ad una medesima retta A. Esse si possono interpretare come *affinità fra rette* riferite alla « retta impropria A ».

In tal caso la P.3 sussiste anche per proiettività fra due rette *coincidenti* [1]. Pertanto

Osservazione. Φ_A è la famiglia delle proiettività tra coppie di rette (distinte o coincidenti) di asse proiettante A.

3. Osserviamo che (cfr. P.3):

Lemma V. *Una proiettività π fra due rette S, S_2 distinte con il punto comune* o *unito e un asse proiettante A non passante per esso è una prospettività.*

Infatti, poichè $o \notin A$ ed è unito nella π, dovrà la retta intermediaria $S_1 \ni o$; e quindi, in base al lemma I, π è una prospettività.

Mediante il lemma V possiamo ora dimostrare il seguente enunciato del teorema fondamentale della geometria proiettiva in un piano desarguesiano

P.6. *Una proiettività π fra due rette distinte S, S_2 è individuata da due coppie di punti corrispondenti e da un asse proiettante non contenente alcuna di queste coppie.*

Infatti, l'esistenza è banale, per l'unicità siano π e π^* due proiettività fra le rette distinte S, S_2 aventi in comune un asse proiettante A e le coppie di punti corrispondenti (b, b_2) e (c, c_2) non appartenenti ad A.

Se in particolare $b = b_2$ e quindi $c \neq c_2$, in base al lemma V la π è una prospettività, di centro $A \cap c\,c_2$. Lo stesso accade per la π^*, quindi $\pi = \pi^*$. Analogamente per $c = c_2$.

Supposto allora $b \neq b_2$ e $c \neq c_2$, osservato che una almeno delle $b \neq c_2$, $c \neq b_2$ è vera: ad es. $b \neq c_2$, consideriamo la retta $S_1 = bc_2$ e la prospettività λ tra S_2, S_1 di centro $\bar{s}_1 = A \cap bb_2$ (fig. 7).

Ne segue che la $\pi\lambda$ è una proiettività tra S, S_1 avente, in base alla P.5, asse proiettante A. Osservato inoltre che il punto $b = S \cap S_1$ è unito si può per il lemma V concludere che la $\pi\lambda$ è una prospettività.

In essa al punto c corrisponde c_2, pertanto ha come centro $\bar{s} = A \cap c\,c_2$ (fig. 7).

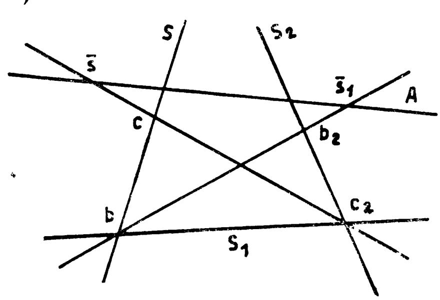

Fig. 7

Alla stessa conclusione si perviene per la $\pi^*\lambda$, quindi $\pi\lambda = \pi^*\lambda$, da cui $\pi = \pi^*$; c. v. d..

Dalle PP.3,6 segue direttamente che

P.7. *I due distinti centri di proiezione* s, s_1 *della* π *si possono scegliere ad arbitrio sull'asse proiettante* A (naturalmente con $s \notin S$ e $s_1 \notin S_2$).

Pertanto se $A \not\ni o = S \cap S_2$ (circostanza che certamente si verifica se o non è unito) la π è dotata di coppia proiettante $s = a_2$, $s_1 = a$ (cfr. n. 1); e quindi:

P.8. *Ogni proiettività fra due rette distinte, con il punto comune non unito, si può individuare con tre coppie di punti corrispondenti; di cui una almeno proiettante.*

Più in generale, tenendo conto della P.1:

P.9. *Ogni proiettività fra due rette distinte, dotata di coppie proiettanti, si può individuare con tre coppie di punti corrispondenti di cui una almeno proiettante.*

4. Abbiamo visto al n. 2, P. 4 che: ogni proiettività tra due rette distinte è dotata di asse proiettante.

È naturale chiederci se analoga proprietà sussista per la coppia proiettante. La risposta sarà negativa, precisamente verificheremo che:

P.10. *Le uniche proiettività tra due rette distinte non dotate di coppie proiettanti sono quelle con il punto comune unito, che non siano prospettività.*

Infatti sappiamo che

1) Ogni proiettività tra due rette distinte con il punto comune non unito è dotata di coppia proiettante. L'asse proiettante non potendo in tal caso passare per il punto comune alle due rette dà luogo ad una coppia proiettante;

2) Ogni prospettività fra due rette distinte è dotata di coppie proiettanti. Sono tali tutte le coppie della prospettività, tranne il punto unito.

3) Consideriamo infine una proiettività fra due rette distinte con il punto comune unito e che non sia una prospettività. Come noto [6, 5] esse esistono in un piano desarguesiano e non pascaliano quale è il nostro. Ma una tale proiettività non può essere dotata di coppia proiettante giacchè allora (cfr. P.2) sarebbe una prospettività, in contrasto con l'ipotesi.

5. Dalla dimostrazione della P.10 segue che, rispetto al problema dell'esistenza di coppie proiettanti, le proiettività tra due rette distinte si possono distinguere nei tre diversi tipi ivi presi in esame. Ci proponiamo in questo numero di completare lo studio dell'insieme delle coppie proiettanti relativo alle proiettività del tipo 1).

Una proiettività π fra due rette (distinte) S, S_2 venga assegnata mediante una coppia proiettante (a, a_2) e la retta intermediaria $S_1 \not\ni S \cap S_2$.

È allora evidente che (cfr. fig. 8):

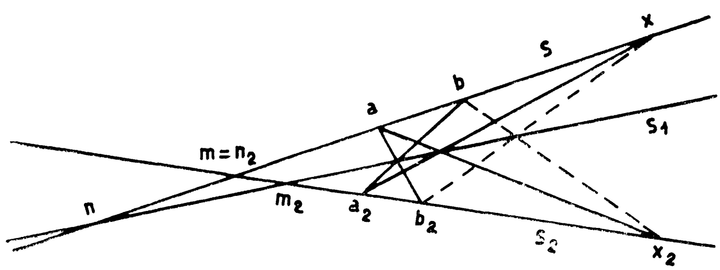

Fig. 8

Lemma VI. *Se (a, a_2) è coppia proiettante di una data proiettività π, che non sia una prospettività, condizione necessaria e sufficiente affinchè un'altra sua coppia (b, b_2) sia proiettante è che, detta (x, x_2) una generica coppia della π, l'esagono $a\, b_2\, x\, a_2\, b\, x_2$ sia pascaliano.*

Da questa condizione geometrica andiamo a dedurre, con ricorso alla geometria analitica, una più espressiva condizione algebrica.

Allo scopo identifichiamo in un corpo (non commutativo) K i corpi delle coordinate del nostro piano desarguesiano Σ, fra di loro isomorfi, e indichiamo con H il gruppo moltiplicativo del centro di K.

Consideriamo ora un sistema cartesiano avente le rette S, S_2 rispettivamente come assi X, Y, la S_1 come retta impropria e b come

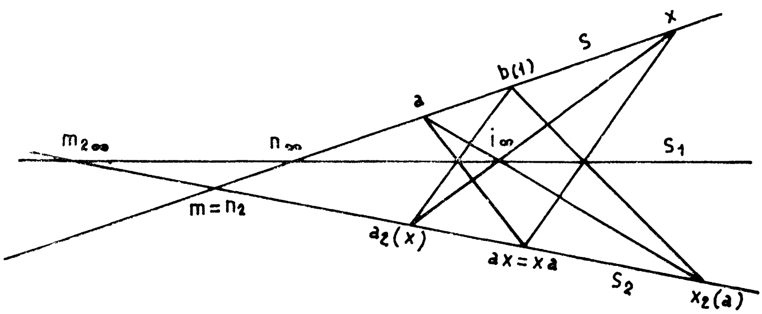

Fig. 9

punto unità dell'asse X, (figg. 9, 8).

Inoltre, scegliamo il punto $a\varkappa_2 \cap \varkappa a_2 = i_\infty$ per il trasporto delle coordinate da un asse all'altro; per cui denotate le coordinate dei punti a e $\varkappa$ ancora con a e $\varkappa$, le coordinate dei punti a_2 e $\varkappa_2 \in Y$ sono rispettivamente $\varkappa$ e a: cioè $a_2(\varkappa)$, $\varkappa_2(a)$.

Orbene, nell'ipotesi che l'esagono $a\, b_2\, \varkappa\, a_2\, b\, \varkappa_2$ sia pascaliano con $(\varkappa, \varkappa_2)$ coppia generica della π, la coordinata del punto b_2 risulta [4]

$$a\varkappa = \varkappa a.$$

Ne segue che $a \in H$. Effettuando la trasformazione di coordinate $\varkappa' = r\varkappa$, si ha: $a(r\,a)$, $b(r)$, pertanto le coordinate dei punti a e b sono congrue rispetto ad H.

Viceversa, se le coordinate $\bar{a}$ e $\bar{b}$ dei punti a e b sono congrue rispetto ad H, cioè: $\bar{b}^{-1}\bar{a} = a \in H$; effettuando la trasformazione di coordinate $\varkappa' = \bar{b}^{-1}\varkappa$, si ottiene: $a(a)$, $b(1)$ con $a \in H$; c. v. d.

Tenuto conto del lemma VI si può dunque concludere che

P.11. *Se (a, a_2) è coppia proiettante di una proiettività tra due rette S, S_2 che non sia una prospettività, un'altra sua coppia (b, b_2) sarà pure proiettante se e soltanto se le ascisse dei punti a e b sono congrue rispetto ad H* [con riferimento ad un sistema di ascisse sull'asse S di origine $S \cap S_2$ e punto improprio $S \cap S_1$, essendo S_1 la retta intermediaria].

Poichè (cfr. n. precedente) ogni proiettività fra due rette distinte con il punto comune non unito è dotata di coppia proiettante si ha pure

P.12. *In ogni proiettività tra due rette distinte S, S_2, con $S \cap S_2$ non unito, l'insieme delle ascisse delle prime componenti delle coppie proiettanti è un sistema laterale di H rispetto al gruppo moltiplicativo di K.*

6. Si integrano le dodici proprietà equivalenti al teorema di PASCAL enunciate da PICKERT [5, pp. 136, 139] con le seguenti

a) Ogni proiettività tra due rette distinte è dotata di coppie proiettanti.

b) In una proiettività fra due rette distinte ogni coppia di punti corrispondenti, che non contiene il punto comune, è proiettante.

c) In una proiettività fra due rette distinte S, S_2 ogni retta congiungente due punti corrispondenti, diversa da S, S_2, è asse proiettante.

Consideriamo infine la famiglia Φ della proiettività, tra le coppie di rette del piano, che hanno come coppia di punti corrispondenti le rispettive intersezioni con una *retta fissa* A; quelle generate come prodotti di prospettività con i centri su A verranno dette *affinità rispetto alla retta* A [1,2]. Abbiamo già indicato la rispettiva famiglia con Φ_A (n. 2).

Rilevato che una prospettività λ tra due rette incidenti in un punto di A e centro di prospettiva $\bar{s} \notin A$ è pure un elemento di Φ, ci si chiede: $\lambda \in \Phi_A$? Cioè (cfr. Oss. n. 2) si può esprimere come prodotto di due prospettività con i centri su A?

La risposta è data dalla [1, p. 381].

P.13. *Una prospettività fra due rette incidenti in un punto di una retta fissata A e centro di prospettiva $\bar{s} \notin A$ è una affinità rispetto alla retta A se e soltanto se vale il teorema di* PASCAL.

BIBLIOGRAFIA

[1] F. BUSULINI, *Geometria dello spazio basata sul concetto di affinità fra rette,* Atti Ist. Ven., t. 121 (1962-63), pp. 341-383.

[2] H. LEVI, *Plane geometries in terms of projections,* Proc. Amer. Math Soc., t. 16 (1965), pp. 503-511.

[3] G. HESSENBERG, *Grundlagen der Geometrie,* Berlin (1930).

[4] D. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie,* 9^ ed., Teubner, Stuttgart (1962).

[5] G. PICKERT, *Projektive Ebenen,* Springer, Berlin (1955).

[6] F. SCHUR, *Grundlagen der Geometrie,* Teubner, Leipzig (1909).

[7] G. ROBINSON, *The foundations of Geometry,* Toronto (1959).

[8] K. WEIERSTRASS, *Rein Geometrischer Beweis des Hauptsatzes des Projectivischen Geometrie,* Mathematische Werke, t. 3, Berlin (1903), pp. 161-174.

Manoscritto pervenuto in redazione il 16-2-1968.