RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

DIONIGI GALLETTO

Sulla deduzione del vettore caratteristico della rotazione nei moti rigidi

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 41 (1968), p. 198-209
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1968__41__198_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SULLA DEDUZIONE DEL VETTORE CARATTERISTICO DELLA ROTAZIONE NEI MOTI RIGIDI

DIONIGI GALLETTO *)

In [1] si è stabilito un sistema di equazioni differenziali che ha come incognite le componenti del vettore caratteristico della rotazione, $\mathbf{q}$, sistema che, una volta note le componenti della velocità angolare rispetto a una qualunque terna solidale al sistema rigido mobile, permette di determinare, assegnata che sia la posizione iniziale del sistema mobile rispetto a un assegnato riferimento, la posizione attuale, almeno in un intervallo di tempo non troppo esteso (intervallo dove è definita la corrispondente soluzione del sistema, nel senso abituale del teorema di Cauchy).

Nel presente lavoro si prova la validità di una presunzione contenuta in [1]; più precisamente si prova che per detto sistema l'esistenza e l'unicità delle soluzioni sussiste *in grande*, nel senso che, fissato comunque un intervallo finito di tempo (con la sola condizione che in esso siano definite e continue le suddette componenti della velocità angolare) e comunque fissata la determinazione iniziale del vettore rotazione, esiste una ed una sola soluzione del sistema definita *in senso debole* in tutto detto intervallo. Con ciò si intende dire che, pur potendo esistere istanti in cui il vettore $\mathbf{q}(t)$ non è definito, tuttavia in tali istanti risultano individuati il suo versore e l'ampiezza della rotazione.

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca n. 7 del Comitato per la Matematica del C. N. R.

Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

1. Premessa.

Siano $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ due terne cartesiane trirettangole congruenti, la seconda solidale a un sistema rigido mobile rispetto alla prima. Per quanto verrà esposto nel seguito, si può ritenere, senza venire meno alla generalità, che detto sistema ammetta un punto fisso e che detto punto sia la comune origine delle due terne.

Ciò premesso, sia $\mathbf{q}(t)$ il vettore caratteristico della rotazione, definito da

$$\mathbf{q}(t) = tg\,\frac{\chi(t)}{2}\,\mathbf{u}(t), \tag{1.1}$$

dove $\mathbf{u}(t)$ è il versore dell'asse della rotazione che permette di passare dalla posizione C del sistema in cui le due terne risultano sovrapposte alla posizione attuale, orientato in modo tale che risulti compresa fra 0 e π l'ampiezza $\chi(t)$ della suddetta rotazione, misurata in senso levogiro rispetto ad esso.

Detto vettore risulta in corrispondenza biunivoca con il moto del sistema, nel senso precisato al n. 2 di [1].

Indicato con $\mathbf{q}'$ il derivato temporale di $\mathbf{q}$ rispetto alla terna mobile $\mathcal{T}'$ la velocità angolare del sistema rigido ad esso solidale risulta espressa da [1])

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{2}{1+q^2}\,(\mathbf{q}' - \mathbf{q}\times\mathbf{q}'), \tag{1.2}$$

con q modulo di $\mathbf{q}$.

Da questa relazione si può esplicitare $\mathbf{q}'$, e si ottiene la seguente [2])

$$\mathbf{q}' = \frac{1}{2}\,(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{q} + \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{q}\mathbf{q}), \tag{1.3}$$

che, proiettata sugli assi mobili e note che siano le componenti di $\boldsymbol{\omega}$ rispetto a detti assi (componenti che si supporranno continue) fornisce un sistema di equazioni differenziali ordinarie ed in forma

---

[1]) Cfr. [1], 1, 3.

[2]) Cfr. [1], 1, 4.

normale in cui le funzioni incognite sono le componenti del vettore [3]).

Per tale sistema risultano verificate le condizioni del teorema di esistenza e di unicità nell'enunciato di Cauchy (teorema di esistenza e di unicità *in piccolo*) ma non risultano verificate le condizioni del teorema di esistenza e di unicità *in grande*, in quanto, considerato l'intervallo chiuso, I, di estremi t_0 e b ($b > t_0$), dove le componenti di ω sono definite e continue, nell'iperstrato

$$(1.4) \qquad t_0 \leq t \leq b, \qquad -\infty < q^i < +\infty$$

le derivate parziali prime rispetto a q^i delle funzioni che costituiscono i secondi membri del sistema originato da (1.3) [4]) non sono limitate.

Nonostante ciò si può provare che *esiste in senso debole una ed una sola soluzione del sistema* (1.3) *definita in tutto I e soddisfacente alla condizione*

$$(1.5) \qquad \mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0,$$

con $\mathbf{q}_0$ *arbitrario.*

2. Lemma.

Conviene premettere alla dimostrazione del teorema enunciato al n. precedente il seguente lemma.

Se la funzione $f(x)$, *definita e derivabile nell'intervallo limitato* $a \vdash\!\!\!- x_1$, *aperto a destra, non ammette limite per* $x \to x_1^-$, *allora, indicato con* l *il limite inferiore di* $|f(x)|$ *per* $x \to x_1^-$ *e fissati il numero positivo* N *ad arbitrio e il numero positivo* M *con la sola condizione che risulti* $M > l$, *esiste almeno un punto* $\bar{x}$ *di* $a \vdash\!\!\!- x_1$ *per il quale risulta*

$$(2.1) \qquad |f(\bar{x})| < M, \qquad |f'(\bar{x})| > N.$$

Si fissi ε positivo con le sole condizioni che risulti

$$(2.2) \qquad x_1 - a > \varepsilon, \qquad M - l > \varepsilon, \qquad L - l > 2\varepsilon,$$

---

[3]) Non si precisa rispetto a quale terna in quanto $\mathbf{q}$ ha le stesse componenti rispetto ad entrambe.

[4]) D'ora in poi, per brevità, in luogo di «sistema originato da (1.3)» si dirà semplicemente «sistema (1.3)».

con L limite superiore di $|f(x)|$ (eventualmente dato da $+\infty$, nel qual caso le suddette limitazioni si riducono alle prime due) e si consideri l'intervallo $x_1 - \varepsilon \longrightarrow x_1$. Stante la definizione di l, l'estremo inferiore dei valori assunti da $|f(x)|$ in tale intervallo non supera l e pertanto in esso esistono sicuramente dei punti per i quali risulta $||f(x)| - l| < \varepsilon$. Sia x_α uno di questi. Per esso si ha quindi

$$||f(x_\alpha)| - l| < \varepsilon, \tag{3.2}$$

e, staute la seconda delle diseguaglianze (2.2), è inoltre $|f(x_\alpha)| < M$.

Conviene a questo punto distinguere il caso in cui il limite superiore L di $|f(x)|$ risulti finito dal caso in cui risulti infinito.

I. Supposto L finito, si ha, per la definizione di L, che l'estremo superiore dei valori assunti da $|f(x)|$ in $x_\alpha \vdash\!\!\!- x_1$ non è inferiore a L e pertanto che esistono dei punti di tale intervallo per cui è $||f(x)| - l| < \varepsilon$. Sia x_β uno di tali punti. Per esso si ha quindi

$$||f(x_\beta)| - L| < \varepsilon. \tag{2.3'}$$

A) Si supponga poi, in un primo tempo, che in tutto l'intervallo $x_\alpha \vdash\!\!\dashv x_\beta$ risulti

$$|f(x)| < M. \tag{2.4}$$

Cominciando con l'esaminare il caso in cui in $x_\alpha \!-\!\!\dashv x_\beta$ risulti $|f(x)| > 0$, $|f(x)|$ in tal caso risulta derivabile in $x_\alpha \longrightarrow x_\beta$ e pertanto si può asserire, per il teorema del valor medio, che in esso esiste almeno un punto $\bar{x}$ per il quale risulta

$$|f'(\bar{x})| = \frac{|f(x_\alpha)| - |f(x_\beta)|}{x_\beta - x_\alpha} > \frac{L - l - 2\varepsilon}{\varepsilon}, \tag{2.5}$$

dove si sono tenute presenti le disuguaglianze (2.3), (2.3′) e il fatto che $x_\alpha \vdash\!\!\dashv x_\beta$ è contenuto in $x_1 - \varepsilon \longrightarrow x_1$. Dalla diseguaglianza ora scritta si deduce che, nel caso ora esaminato, la seconda delle diseguaglianze (2.1) risulta verificata non appena si scelga $\varepsilon \leq \dfrac{L-l}{N+2}$. La prima delle (2.1) è poi senz'altro verificata in quanto si è supposto che in $x_\alpha \vdash\!\!\dashv x_\beta$ fosse verificata la (2.4).

Qualora invece accada che $|f(x)|$ si annulli in qualche punto di $x_\alpha \vdash\!\!\dashv x_\beta$, sia x_γ ($\neq x_\beta$, stante la terza delle (2.2)) quello fra tali punti che più è prossimo a x_β. Nell'intervallo $x_\gamma \text{—}\!\!\dashv x_\alpha$ risulta quindi $|f(x)| > 0$ e pertanto $|f(x)|$ è derivabile in $x_\gamma \text{——} x_\beta$ e quindi, sempre per il teorema del valor medio, in esso esiste almeno un punto $\bar{x}$ per il quale risulta

$$|f'(x)| = \frac{f(x_\beta)}{x_\beta - x_\gamma} > \frac{L - \varepsilon}{\varepsilon}, \tag{2.6}$$

da cui segue che, scegliendo $\varepsilon \leq \dfrac{L}{N+1}$, risulta senz'altro verificata la seconda delle (2.1). La prima risulta verificata per la stessa ragione vista sopra.

B) Si supponga ora che la (2.4) non risulti verificata per tutti i punti di $x_\alpha \vdash\!\!\dashv x_\beta$ e sia ora x_γ quello fra i punti di tale intervallo per cui la (2.4) non è verificata che più è prossimo a x_α. Allora nell'intervallo $x_\alpha \vdash\!\text{—} x_\gamma$ è $|f(x)| < M$; inoltre, supposto che in $x_\alpha \text{——} x_\gamma$ risulti $|f(x)| > 0$, $|f(x)|$ risulta derivabile in $x_\alpha \text{——} x_\gamma$ e quindi, per il teorema del valor medio, esiste in esso almeno un punto $\bar{x}$ per cui è

$$|f'(\bar{x})| = \frac{M - |f(x_\alpha)|}{x_\gamma - x_\alpha} > \frac{M - l - \varepsilon}{\varepsilon},$$

ecc. Inoltre risulta ormai ovvio come si deve procedere qualora $|f(x)|$ si annulli in qualche punto di $x_\alpha \text{—}\!\!\dashv x_\gamma$.

II. Resta infine da esaminare il caso in cui risulti $L = +\infty$. È sufficiente però osservare che tale evenienza implica, ovviamente, l'esistenza di punti di $x_\alpha \text{——} x_1$ per i quali è $|f(x)| > M$ e pertanto appare subito evidente che la trattazione del presente caso non differisce da quella esaminata in *B*).

Il Lemma è così completamente dimostrato.

3. Dimostrazione del teorema enunciato al n. 1.

Per il teorema di esistenza e di unicità in piccolo, esiste una e una sola soluzione $\mathbf{q}_1(t)$ di (1.3), definita in un conveniente intorno destro, I_1, di t_0 e soddisfacente a (1.5), ossia a $\mathbf{q}_1(t_0) = \mathbf{q}_0$.

Se accade che l'intervallo I è contenuto in I_1, il teorema enunciato al n. 1 è ovviamente provato. Si supponga quindi che non accada detta evenienza e si cominci col provare che, dal fatto che $\omega(t)$ è continua nell'intervallo chiuso I, e quindi ivi limitata, discende che, indicato con t_1 l'estremo superiore di I_1, *la soluzione* $\mathfrak{q}_1(t)$ *necessariamente ammette limite (finito o infinito) al tendere t a* t_1^-.

E infatti si supponga che per $\mathfrak{q}_1(t)$ non esista il suddetto limite; questo implica che almeno una delle tre componenti $q_1^i(t)$, ad esempio la $q_1^1(t)$, non ammette limite per $t \to t_1^-$. Siano quindi l_1 e L_1 (eventualmente dato da $+\infty$) il limite inferiore e il limite superiore di $|q_1^1(t)|$ al tendere di t a t_1^- e sia M un numero positivo fissato con la sola candizione di essere maggiore di l_1.

Stante il lemma dimostrato al n. precedente, l'ipotesi che la funzione $q_1^1(t)$ non ammetta limite ha come conseguenza che, comunque scelto il numero positivo N, in I_1 esista almeno un punto $\bar{t}$ per il quale risulta

$$|q_1^1(\bar{t})| < M, \qquad |q_1^{1'}(\bar{t})| > N.$$

Si ha quindi, stante (1.2) (che segue facilmente da (1.3))

$$\omega^1(\bar{t}) > \frac{2N}{1+M^2}$$

ossia

$$\omega^1(\bar{t}) > M, \tag{3.1}$$

non appena si scelga $N > \dfrac{M(1+M^2)}{2}$.

Stante l'arbitrarietà di M, da (3.1) si deduce che $\omega^1(t)$ non può essere limitata in I, in contrasto con l'ipotesi fatta su ω. Le stesse considerazioni potendosi ovviamente ripetere, se necessario, per le restanti componenti di $\mathfrak{q}_1(t)$, si ha che, conformemente a quanto si intendeva provare, resta esclusa per $\mathfrak{q}_1(t)$ l'eventualità di non ammettere limite al tendere di t a t_1^-.

* * *

Stante (1.1) e quanto ora visto, è evidente che $\mathfrak{q}_1(t)$, al tendere di t a t_1^-, individua la posizione del versore $\mathfrak{u}(t)$ e il valore di $\chi(t)$

all'istante t_1, con la conseguenza che resta univocamente individuata la posizione C_1 assunta dal sistema rigido mobile all'istante t_1.

Si assuma ora come posizione di riferimento non più C, bensì la posizione C_1. La terna fissa $\mathcal{T}$ andrà quindi sostituita con la posizione assunta dalla terna mobile all'istante t_1. Nonostante tale cambiamento della terna di riferimento, il sistema (1.3) resta immutato, in quanto le funzioni note che in esso compaiono sono date dalle componenti di $\boldsymbol{\omega}$ rispetto alla terna solidale al sistema rigido mobile, terna che rimane immutata.

Ciò premesso, esiste una ed una sola soluzione $\mathbf{q}_2(t)$ del sistema (1.3) definita in un conveniente interno destro, I_2, di t_1 e soddisfacente alla condizione iniziale $\mathbf{q}_2(t_1) = \mathbf{0}$, equivalente alla condizione che all'istante t_1 il sistema rigido si trovi proprio nella posizione C_1.

Si supponga in un primo tempo che l'intervallo I sia contenuto nell'unione $I_1 \cup I_2$ di I_1 con I_2 e si indichi con $\mathbf{R}_1(t_1)$ la rotazione che porta il sistema rigido da C a C_1 e con $\mathbf{R}_2(t)$ la rotazione che, supposto $t \in I_2$, porta il sistema rigido della posizione C_1 alla posizione da esso assunta all'istante t (alla quale corrisponde il vettore $\mathbf{q}_2(t)$). Si consideri poi la funzione $\overline{\mathbf{q}}(t)$ che in I_1 coincide con $\mathbf{q}_1(t)$ e in I_2 con il vettore della rotazione $\mathbf{R}_2(t)\,\mathbf{R}_1(t_1)$, prodotto di $\mathbf{R}_1(t_1)$ con $\mathbf{R}_2(t)$.

Non è difficile provare che $\overline{\mathbf{q}}(t)$ *è soluzione del sistema* (1.3).

E infatti il moto corrispondente a $\overline{\mathbf{q}}(t)$ non differisce dal moto individuato in I_1 da $\mathbf{q}_1(t)$ e in I_2 da $\mathbf{q}_2(t)$ e pertanto la velocità angolare $\overline{\boldsymbol{\omega}}(t)$ corrispondente al moto individuato da $\overline{\mathbf{q}}(t)$ risulta data, in I_1 e I_2 rispettivamente, da

$$\overline{\boldsymbol{\omega}} = \frac{2}{1+q_1^2}(\mathbf{q}_1' - \mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_1'), \qquad \overline{\boldsymbol{\omega}} = \frac{2}{1+q_2^2}(\mathbf{q}_2' - \mathbf{q}_2 \times \mathbf{q}_2'),$$

come subito segue dalla relazione (1.2). D'altra parte, $\mathbf{q}_1$ e $\mathbf{q}_2$ sono soluzioni del sistema (1.3) e poiché tale sistema non differisce da (1.2) (in quanto esso è stato ottenuto dalla relazione (1.2) e da esso si può ricavare, senza difficoltà, la (1.2) stessa) si ha che in I_1 e I_2 valgono rispettivamente le relazioni

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{2}{1+q_1^2}(\mathbf{q}_1' - \mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_1'), \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{2}{1+q_2^2}(\mathbf{q}_2' - \mathbf{q}_2 \times \mathbf{q}_2'),$$

le quali, confrontate con le precedenti, implicano, in tutto $I_1 \cup I_2$ (e quindi in I), la coincidenza della velocità angolare $\overline{\omega}(t)$ con la funzione che compare nel sistema (1.3).

D'altra parte, poiché, per quanto ora visto $\overline{\omega}$ è la velocità angolare del moto corrispondente a $\overline{\mathbf{q}}(t)$, si ha che la relazione (1.2) deve essere verificata per $\mathbf{q} = \overline{\mathbf{q}}(t)$, ossia, stante l'equivalenza di (1.2) con (1.3), che $\overline{\mathbf{q}}(t)$ deve soddisfare al sistema (1.3), conformemente a quanto si intendeva provare.

Inoltre, $\overline{\mathbf{q}}(t)$, coincidendo in I_1 con $\mathbf{q}_1(t)$, *soddisfa alla condizione iniziale* (1.5).

Infine, risultando unico il moto individuato in I_2 da $\mathbf{q}_2(t)$, è sufficiente tener presente che la corrispondenza fra il moto del sistema e il vettore caratteristico della rotazione è biunivoca per avere che *il vettore* $\overline{\mathbf{q}}(t)$ *risulta unico.*

* * *

Nel caso in cui $I_1 \cup I_2$ non esaurisca I, si costruirà ancora la funzione $\overline{\mathbf{q}}(t)$ e si determinerà il limite di essa per $t \longrightarrow t_2^-$, limite che sicuramente esiste per le stesse ragioni viste in precedenza. Una volta determinato tale limite, si determinerà la posizione, C_2, del sistema corrispondente a tale istante e la si assumerà come nuova posizione di riferimento. Come terna $\mathcal{T}$ si assumerà quindi ora la posizione assunta dalla terna mobile all'istante t_2.

Ciò premesso, esiste una e una sola soluzione $\mathbf{q}_3(t)$ definita in un conveniente intorno destro, I_3, di t_2 e soddisfacente alla condizione $\mathbf{q}_3(t_2) = \mathbf{0}$, equivalente alla condizione che all'istante t_2 il sistema si trovi proprio in C_2.

Indicata allora con $\overline{\mathbf{R}}_1(t)$ [5] la rotazione che porta il sistema rigido da C in C_2 e con $\mathbf{R}_3(t)$ la rotazione che supposto $t \in I_3$, porta il sistema da C_2 alla posizione da esso assunta all'istante t (alla quale corrisponde il vettore $\mathbf{q}_3(t)$), si consideri il vettore $\overline{\overline{\mathbf{q}}}(t)$ che in $I_1 \cup I_2$ coincide con $\overline{\mathbf{q}}(t)$ e in I_3 con il vettore della rota-

---

[5]) Essa è ovviamente il limite per $t \to t_2^-$ di $\mathbf{R}_2(t)\,\mathbf{R}_1(t_1)$.

zione prodotto di $\overline{\mathbf{R}}_1(t_2)$ con $\mathbf{R}_3(t)$. Detto vettore è soluzione del sistema, soddisfa alla condizione iniziale (1.5), ecc., risultando ormai ovvio come si deve procedere.

* * *

Adesso si proverà che il punto b può essere raggiunto mediante l'applicazione di un numero finito di volte del procedimento che ha permesso di passare da I_1 a I_2, da $I_1 \cup I_2$ a I_3, ecc..

Infatti, risultando le funzioni a secondo membro del sistema (1.3) lipschitziane rispetto alle q^i in ogni dominio limitato dall'iperstrato definito dalle limitazioni (1.4), si può essere certi che, comunque scelto il dominio rettangolare definito dalle limitazioni

$$|t - \overline{t}| \leq \alpha, \quad |q^i| \leq \frac{Q}{\sqrt{3}}, \tag{3.2}$$

con $Q > 0$ e con α e $\overline{t}$ scelti in modo tale che il dominio stesso cada nell'iperstrato (1.4), esiste una ed una sola soluzione $\mathbf{q}(t)$ del sistema soddisfacente alla condizione $\mathbf{q}(\overline{t}) = \mathbf{0}$ e definita nell'intervallo $\overline{t} - \delta \,|\!\!-\!\!-\!\!|\, \overline{t} + \delta$, dove δ è il più piccolo fra i numeri α e $\dfrac{Q}{\sqrt{3}\,\overline{M}}$, $\overline{M}$ essendo il massimo assunto nel dominio (3.2) dalle funzioni che compaiono a secondo membro del sistema (1.3).

Per tale massimo risulta, qualunque sia il dominio rettangolare definito dalle (3.2),

$$\overline{M} < \frac{1}{2}\,\Omega\,(1 + Q + Q^2),$$

dove con Ω si è indicato il massimo del modulo di ω in I. È sufficiente pertanto osservare che il massimo assoluto di $\dfrac{2Q}{\sqrt{3}\,\Omega(1+Q+Q^2)}$ in $0 \leq Q < +\infty$ è assunto quando è $Q = 1$, ed è dato da $\dfrac{2}{\sqrt{3}\,\Omega}$, per concludere che, assunto $\overline{t} = t_1$, e identificando α con l'ampiezza dell'intervallo I_1, l'ampiezza dell' intervallo I_2 non può essere inferiore al più piccolo fra i due numeri α, $\frac{2}{\sqrt{3}\,\Omega}$ [6]).

Supposto $\alpha < \frac{2}{\sqrt{3}\,\Omega}$, e assunto ora $t = \bar{t}_2$, si deduce poi che l'ampiezza di I_3 non può essere inferiore a α, ecc.. Se è invece $\alpha > \frac{l}{\sqrt{3}\,\Omega}$, l'ampiezza di I_2 non è inferiore a $\frac{2}{\sqrt{3}\,\Omega}$ e pertanto l'ampiezza di I_3 non risulta inferiore a detto numero, ecc.

Si ha quindi, in definitiva, che l'ampiezza di ciascuno degli intervalli I_1, I_2, ..., non è inferiore al più piccolo dei due numeri α, $\frac{2}{\sqrt{3}\,\Omega}$, α esprimendo l'ampiezza di I_1. E questo prova l'asserto.

* * *

Indicata con $\mathbf{q}(t)$ la soluzione determinata con il procedimento visto sopra, per il modo stesso con cui si è ad essa pervenuti è evidente che vi possono essere in I punti in corrispondenza ai quali essa diverge. Ad es., uno di questi può essere t_1. A priori non è anzi da escludere che tali punti siano in numero infinito, addirittura, in casi eccezionali, con infiniti punti di accumulazione. Essi sono dati da quei valori di t in corrispondenza ai quali la funzione $\chi(t)$ assume il valore π.

È sufficiente però osservare che, risultando individuato, tramite il procedimento seguito per il pervenire a $\mathbf{q}(t)$, il moto del sistema per t variabile da t_0 a b, risulta ad ogni istante individuato il versore $\mathbf{u}(t)$, anche nei casi limite in cui l'angolo χ della rotazione risulta uguale a π, casi in cui $\mathbf{u}(t)$ si ottiene tramite passaggi al limite, considerando il limite sinistro ecc..

L'osservazione ora fatta precisa il significato che si deve attribuire all'affermazione che la soluzione $\mathbf{q}(t)$ soddisfacente a (1.4) è definita in tutto I *in senso debole*: con ciò si intende dire che nei punti di I dove essa diverge risultano ancora determinati, come in tutti gli altri punti di I, le funzioni $\mathbf{u}(t)$ e $\chi(t)$, quest'ultima assumendo costantemente in tali punti il valore π.

---

[6]) È quanto si ottiene assumendo $Q = 1$ nelle limitazioni (3.2).

*
* *

Si supponga che il limite per $t \longrightarrow t_1^-$ di $\mathfrak{q}_1(t)$ sia finito e lo si indichi con $\mathfrak{q}_1$. In tal caso una nota formula [7]) fornisce l'espressione di $\bar{\mathfrak{q}}(t)$ per $t \in I_2$, espressione che risulta data da

$$\bar{\mathfrak{q}}(t) = \frac{\mathfrak{q}_1 + \mathfrak{q}_2(t) - \mathfrak{q}_1 \times \mathfrak{q}_2(t)}{1 - \mathfrak{q}_1 \cdot \mathfrak{q}_2(t)} \tag{3.3}$$

e da cui si deduce che gli eventuali valori di t in corrispondenza ai quali $\bar{\mathfrak{q}}(t)$ diverge sono tutti e soli quelli per cui risulta $\mathfrak{q}_1 \cdot \mathfrak{q}_2(t) = 1$.

In modo analogo si otterrà $\bar{\bar{\mathfrak{q}}}(t)$ in I_3, qualora risulti finito il limite per $t \longrightarrow t_2^-$ di $\bar{\mathfrak{q}}(t)$, ecc.

Nel caso in cui non risulti finito il limite di $\mathfrak{q}_1(t)$, oppure di $\mathfrak{q}_2(t)$, ecc., si può egualmente pervenire all'espressione della soluzione definita in senso debole in tutto I. Infatti basta fissare un qualunque punto, $\bar{t}_1$, di I_1 prossimo a t_1 e scegliere come nuova posizione di riferimento la posizione, $\bar{C}_2$, assunta dal sistema in tale istante. Si iudividuerà poi la soluzione $\bar{\mathfrak{q}}_2(t)$ soddisfacente alla condizione $\bar{\mathfrak{q}}_2(\bar{t}) = 0$, ecc.. Si applicherà quindi, come sopra, la formula che ha dato luogo alla (3.3) ecc..

È il caso di osservare che, applicando questo secondo modo di procedere, si evita la necessità di provare che la soluzione $\mathfrak{q}_1(t)$ ammette limite per $t \longrightarrow t_1^-$, ecc., detta proprietà risultando poi evidente « a posteriori ». Si è però preferito non seguire questa via appunto per porre in rilievo tale proprietà del sistema (1.3), proprietà che è indipendente dal particolare significato meccanico attribuito a detto sistema.

---

[7]) Cfr., ad es., [2], I, 11.

BIBLIOGRAFIA

[1] DIONIGI GALLETTO : *Sul vettore caratteristico della rotazione dei moti rigidi,* Rend. Sem. Mat. Univ. di Padova, Vol. XL (1968) pp. 205-218.

[2] A. SIGNORINI : *Trasformazioni termoelastiche finite* (*Mem.* 1ª), Ann. di Mat., S' IV, Vol. XXII (1943), pp. 33-143.

Manoscritto pervenuto in redazione l'8 aprile 1968.