Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

Carmelo Totaro

Il problema delle precessioni generalizzate regolari ellittiche per un solido pesante asimmetrico

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 41 (1968), p. 181-197

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1968__41__181_0>

IL PROBLEMA DELLE PRECESSIONI GENERALIZZATE REGOLARI ELLITTICHE PER UN SOLIDO PESANTE ASIMMETRICO

CARMELO TOTARO *)

In una memoria [1]) del 1963, G. Grioli ha introdotto il concetto di *precessione generalizzata.*

Si può allora porre il problema della ricerca di precessioni generalizzate, dinamicamente possibili, per un *solido pesante asimmetrico* $\mathcal{C}$.

Nel presente lavoro, sviluppo un metodo che conduce alla caratterizzazione dinamica di una speciale classe di precessioni generalizzate che ho chiamato *precessioni generalizzate regolari ellittiche*, o brevemente, *moti* $\mathcal{P}_e$.

Determino così un nuovo insieme di moti $\mathcal{P}_e$ e ritrovo altri movimenti, dello stesso tipo, già segnalati e studiati in una mia precedente nota [2]).

1. Seguendo G. Grioli [1]), si indichi con $\varepsilon = \| \varepsilon_{rs} \|$ $(r, s = 1, 2, 3)$ una matrice di ordine tre ad elementi indipendenti dal tempo.

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di ricerca n. 7.

Indirizzo dell'Autore: Istituto Matematico della Università di Messina.

[1]) G. GRIOLI, *Qualche teorema di cinematica dei moti rigidi,* « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », ser. VIII, vol. XXXIV, fasc. 6 (1963).

[2]) C. TOTARO, *Precessioni generalizzate regolari ellittiche per un solido pesante asimmetrico,* « Rend. del Sem. Mat. dell'Università di Padova », vol. XL (1968).

Si dicono moti di *precessione generalizzata* tutti e solo quelli per i quali

$$\varepsilon \boldsymbol{\omega} = \nu \mathbf{c} + \mu \mathbf{k}, \tag{1}$$

ove $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare di un corpo $\mathcal{C}$ nel suo moto intorno ad un punto 0 di un riferimento $\mathcal{S}$, ν e μ due quantità scalari dipendenti, eventualmente, dal tempo, $\mathbf{c}$ un versore solidale con $\mathcal{S}$ e $\mathbf{k}$ un versore solidale con $\mathcal{C}$.

Se, in particolare, ν e μ sono indipendenti dal tempo si parlerà di *precessioni generalizzate regolari.*

In quest'ultimo caso la (1) può sostituirsi con la

$$\varepsilon \boldsymbol{\omega} = \mathbf{c} + \mathbf{K}, \tag{2}$$

ove $\mathbf{K}$ è un vettore, in generale non unitario, solidale con $\mathcal{C}$.

Basta, a tale scopo, dividere la (1) per ν e mutare $(1/\nu)\,\varepsilon$ in ε e $(\mu/\nu)\,\mathbf{k}$ in $\mathbf{K}$.

Nella ricerca di tutte le precessioni generalizzate regolari per un corpo asimmetrico pesante si è condotti a considerare il sottoinsieme di moti che si ottengono da (2) imponendo ad $\boldsymbol{\omega}$ questa altra condizione

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^* + \mathbf{a} \cos \chi + \mathbf{b} \sin \chi, \tag{3}$$

ove $\boldsymbol{\omega}^*, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ sono vettori arbitrari solidali con $\mathcal{C}$ e χ è un parametro dipendente dal tempo.

Si vede subito che l'estremo P di $0, \boldsymbol{\omega}$ descrive, rispetto a $\mathcal{C}$, una ellisse ed $0, \boldsymbol{\omega}^*$ ne individua il centro; $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, vettori non paralleli, costituiscono una possibile coppia di *semidiametri coniugati.* In particolare, se si verifica la condizione $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$, i detti vettori costituiscono una coppia di *semiassi.*

Con la trasformazione $\cos \chi = (1 - \tau^2)/(1 + \tau^2)$, $\sin \chi = 2\tau/(1 + \tau^2)$ si può pure scrivere

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{A}_2 \tau^2 + \mathbf{A}_1 \tau + \mathbf{A}_0}{\tau^2 + 1}, \tag{3'}$$

ove

$$\mathbf{A}_2 = \boldsymbol{\omega}^* - \mathbf{a}, \quad \mathbf{A}_1 = 2\mathbf{b}, \quad \mathbf{A}_0 = \boldsymbol{\omega}^* + \mathbf{a} \tag{4}$$

e con τ funzione del tempo.

Dirò *precessioni generalizzate regolari ellittiche* o brevemente *moti* $\mathcal{P}_e$ tutti i movimenti di un solido $\mathcal{C}$ che soddisfano simultaneamente alla (2) e alla (3).

2. Le equazioni fondamentali per la determinazione dei movimenti, intorno ad 0, di un solido pesante $\mathcal{C}$ sono

$$(5) \qquad \begin{cases} \sigma\dot{\omega} + \omega \wedge \sigma\omega = OG^* \wedge \mathbf{c} \\ \dot{\mathbf{c}} + \omega \wedge \mathbf{c} = 0, \end{cases}$$

per le quali valgono questi due integrali primi

$$(6) \qquad \begin{cases} \sigma\omega \times \mathbf{c} = k_z \\ \sigma\omega \times \omega - 2\mathbf{c} \times OG^* = 2E. \end{cases}$$

In (5) ed in tutto il seguito, $\mathbf{c}$ ha ormai il significato di *versore della verticale discendente*; σ è l'omografia d'inerzia; OG^* il prodotto del modulo del peso per la coordinata vettoriale OG del baricentro G di $\mathcal{C}$; k_z la componente costante del momento delle quantità di moto secondo $\mathbf{c}$; E la costante dell'energia.

Con lo scopo di determinare movimenti $\mathcal{P}_e$ per il solido pesante $\mathcal{C}$ si cominci col sostituire la (2) in (5) e (6):

$$(5') \qquad \begin{cases} \sigma\dot{\omega} + \omega \wedge \sigma\omega = OG^* \wedge (\varepsilon\omega - \mathbf{K}) \\ \varepsilon\dot{\omega} + \omega \wedge (\varepsilon\omega - \mathbf{K}) = 0 \end{cases}$$

$$(6') \qquad \begin{cases} \sigma\omega \times (\varepsilon\omega - \mathbf{K}) = k_z \\ \sigma\omega \times \omega - 2(\varepsilon\omega - \mathbf{K}) \times OG^* = 2E. \end{cases}$$

Dalle (5'), con la sostituzione di (3') e la moltiplicazione per due *vettori arbitrari* $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ diversi da zero, si ottiene

$$(7) \qquad \dot{\tau} = \frac{\mathcal{P}_4\tau^4 + \mathcal{P}_3\tau^3 + \mathcal{P}_2\tau^2 + \mathcal{P}_1\tau + \mathcal{P}_0}{Q_2\tau^2 + Q_1\tau + Q_0} =$$

$$= \frac{\mathcal{R}_4\tau^4 + \mathcal{R}_3\tau^3 + \mathcal{R}_2\tau^2 + \mathcal{R}_1\tau + \mathcal{R}_0}{\mathcal{S}_2\tau^2 + \mathcal{S}_1\tau + \mathcal{S}_0},$$

avendo posto

$$(8)\quad \begin{cases} \mathbf{M}_4 = \sigma\mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{A}_2 + OG^* \wedge (\varepsilon\mathbf{A}_2 - \mathbf{K}) \\ \mathbf{M}_3 = \sigma\mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{A}_1 + \sigma\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2 + OG^* \wedge \varepsilon\mathbf{A}_1 \\ \mathbf{M}_2 = \sigma\mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{A}_0 + \sigma\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_1 + \sigma\mathbf{A}_0 \wedge \mathbf{A}_2 + OG^* \wedge [\varepsilon(\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_0) - 2\mathbf{K}] \\ \mathbf{M}_1 = \sigma\mathbf{A}_0 \wedge \mathbf{A}_1 + \sigma\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_0 + OG^* \wedge \varepsilon\mathbf{A}_1 \\ \mathbf{M}_0 = \sigma\mathbf{A}_0 \wedge \mathbf{A}_0 + OG^* \wedge (\varepsilon\mathbf{A}_0 - \mathbf{K}) \end{cases}$$

$$(9)\quad \begin{cases} \boldsymbol{M}_4 = (\varepsilon\mathbf{A}_2 - \mathbf{K}) \wedge \mathbf{A}_2 \\ \boldsymbol{M}_3 = (\varepsilon\mathbf{A}_2 - \mathbf{K}) \wedge \mathbf{A}_1 + \varepsilon\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2 \\ \boldsymbol{M}_2 = (\varepsilon\mathbf{A}_2 - \mathbf{K}) \wedge \mathbf{A}_0 + (\varepsilon\mathbf{A}_0 - \mathbf{K}) \wedge \mathbf{A}_2 + \varepsilon\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_1 \\ \boldsymbol{M}_1 = (\varepsilon\mathbf{A}_0 - \mathbf{K}) \wedge \mathbf{A}_1 + \varepsilon\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_0 \\ \boldsymbol{M}_0 = (\varepsilon\mathbf{A}_0 - \mathbf{K}) \wedge \mathbf{A}_0 \end{cases}$$

$$(10)\quad \begin{cases} \mathbf{N}_2 = -\sigma\mathbf{A}_1 = -2\sigma\mathbf{b} \\ \mathbf{N}_1 = 2\sigma(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_0) = -4\sigma\mathbf{a} \\ \mathbf{N}_0 = \sigma\mathbf{A}_1 = 2\sigma\mathbf{b} \end{cases}$$

$$(11)\quad \begin{cases} \boldsymbol{N}_2 = -\varepsilon\mathbf{A}_1 = -2\varepsilon\mathbf{b} \\ \boldsymbol{N}_1 = 2\varepsilon(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_0) = -4\varepsilon\mathbf{a} \\ \boldsymbol{N}_0 = \varepsilon\mathbf{A}_1 = 2\varepsilon\mathbf{b} \end{cases}$$

e successivamente

$$(12)\quad \mathbf{u} \times \mathbf{M}_i = \mathcal{P}_i, \quad \mathbf{u} \times \mathbf{N}_J = \mathcal{Q}_J, \quad \mathbf{v} \times \boldsymbol{M}_i = \mathcal{R}_i, \quad \mathbf{v} \times \boldsymbol{N}_J = \mathcal{S}_J$$

$$(i = 0, 1, 2, 3, 4) \qquad (J = 0, 1, 2).$$

Da (7) e da (6′), per l'arbitrarietà di τ, segue

$$
(13)\qquad \begin{cases}
\mathcal{P}_4 \mathcal{S}_2 - \mathcal{R}_4 Q_2 = 0 \\
\mathcal{P}_4 \mathcal{S}_1 + \mathcal{P}_3 \mathcal{S}_2 - (\mathcal{R}_4 Q_1 + \mathcal{R}_3 Q_2) = 0 \\
\mathcal{P}_4 \mathcal{S}_0 + \mathcal{P}_3 \mathcal{S}_1 + \mathcal{P}_2 \mathcal{S}_2 - (\mathcal{R}_4 Q_0 + \mathcal{R}_3 Q_1 + \mathcal{R}_2 Q_2) = 0 \\
\mathcal{P}_3 \mathcal{S}_0 + \mathcal{P}_2 \mathcal{S}_1 + \mathcal{P}_1 \mathcal{S}_2 - (\mathcal{R}_3 Q_0 + \mathcal{R}_2 Q_1 + \mathcal{R}_1 Q_2) = 0 \\
\mathcal{P}_2 \mathcal{S}_0 + \mathcal{P}_1 \mathcal{S}_1 + \mathcal{P}_0 \mathcal{S}_2 - (\mathcal{R}_2 Q_0 + \mathcal{R}_1 Q_1 + \mathcal{R}_0 Q_2) = 0 \\
\mathcal{P}_1 \mathcal{S}_0 + \mathcal{P}_0 \mathcal{S}_1 - (\mathcal{R}_1 Q_0 + \mathcal{R}_0 Q_1) = 0 \\
\mathcal{P}_0 \mathcal{S}_0 - \mathcal{R}_0 Q_0 = 0
\end{cases}
$$

$$
(14)\qquad \begin{cases}
\sigma\boldsymbol{\omega}^* \times (\varepsilon\boldsymbol{\omega}^* - \mathbf{K}) + \sigma\mathbf{a} \times \varepsilon\mathbf{a} = k_z \\
\sigma\mathbf{a} \times (\varepsilon\boldsymbol{\omega}^* - \mathbf{K}) + \sigma\boldsymbol{\omega}^* \times \varepsilon\mathbf{a} = 0 \\
\sigma\mathbf{b} \times (\varepsilon\boldsymbol{\omega}^* - \mathbf{K}) + \sigma\boldsymbol{\omega}^* \times \varepsilon\mathbf{b} = 0 \\
\sigma\mathbf{b} \times \varepsilon\mathbf{a} + \sigma\mathbf{a} \times \varepsilon\mathbf{b} = 0 \\
\sigma\mathbf{a} \times \varepsilon\mathbf{a} = \sigma\mathbf{b} \times \varepsilon\mathbf{b}
\end{cases}
$$

$$
(15)\qquad \begin{cases}
\sigma\boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{\omega}^* + \sigma\mathbf{a} \times \mathbf{a} - 2(\varepsilon\boldsymbol{\omega}^* - \mathbf{K}) \times OG^* = 2E \\
\sigma\boldsymbol{\omega}^* \times \mathbf{a} - \varepsilon\mathbf{a} \times OG^* = 0 \\
\sigma\boldsymbol{\omega}^* \times \mathbf{b} - \varepsilon\mathbf{b} \times OG^* = 0 \\
\sigma\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \sigma\mathbf{b} \times \mathbf{b} \\
\sigma\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0.
\end{cases}
$$

Approfittando dell'arbitrarietà di u e v, conviene trasformare le (13) per sostituirle con più semplici condizioni di compatibilità.

La (13_1) si può scrivere in questi due modi

$$(16)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathbf{v} \times [(\mathbf{u} \times \mathbf{N}_0)\, \boldsymbol{M}_4 - (\mathbf{u} \times \mathbf{M}_4)\, \boldsymbol{N}_0] = 0 \\ \mathbf{u} \times [(\mathbf{v} \times \boldsymbol{N}_0)\, \mathbf{M}_4 - (\mathbf{v} \times \boldsymbol{M}_4)\, \mathbf{N}_0] = 0, \end{array}\right.$$

da cui segue

$$(17)\qquad \left\{\begin{array}{l} (\mathbf{u} \times \mathbf{N}_0)\, \boldsymbol{M}_4 - (\mathbf{u} \times \mathbf{M}_4)\, \boldsymbol{N}_0 = 0 \\ (\mathbf{v} \times \boldsymbol{N}_0)\, \mathbf{M}_4 - (\mathbf{v} \times \boldsymbol{M}_4)\, \mathbf{N}_0 = 0. \end{array}\right.$$

Poichè è sempre $\mathbf{N}_0 \equiv 2\sigma\mathbf{b} \neq 0$, da (17_1) si ha

$$(18)\qquad \boldsymbol{M}_4 = m\, \boldsymbol{N}_0\,,$$

ove m è un coefficiente di proporzionalità.

Dopo ciò, da (17_2) si ottiene

$$(19)\qquad \mathbf{v} \times \boldsymbol{N}_0\, (\mathbf{M}_4 - m\, \mathbf{N}_0) = 0.$$

Supposto $\boldsymbol{N}_0 \equiv 2\varepsilon\mathbf{b} \neq 0$, si ha

$$(20)\qquad \mathbf{M}_4 = m\, \mathbf{N}_0\,.$$

Procedendo analogamente da (13_7) si ottiene

$$(21)\qquad \left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{M}_0 = m'\, \boldsymbol{N}_0 \\ \mathbf{M}_0 = m'\, \mathbf{N}_0\,, \end{array}\right.$$

ove m' è un coefficiente di proporzionalità.

Da (13_2), mettendo in evidenza prima $\mathbf{u}$ e poi $\mathbf{v}$, si ottengono queste due equazioni

$$(22)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathbf{v} \times \boldsymbol{N}_0\, (\mathbf{M}_3 + m\, \mathbf{N}_1) - \mathbf{v} \times (\boldsymbol{M}_3 + m\, \boldsymbol{N}_1)\, \mathbf{N}_0 = 0 \\ \mathbf{u} \times \mathbf{N}_0\, (\boldsymbol{M}_3 + m\, \boldsymbol{N}_1) - \mathbf{u} \times (\mathbf{M}_3 + m\, \mathbf{N}_1)\, \boldsymbol{N}_0 = 0. \end{array}\right.$$

Da (22_1), supposte non nulle le parentesi rotonde, si ha

$$(23)\qquad \mathbf{M}_3 = m''\, \mathbf{N}_0 - m\, \mathbf{N}_1\,,$$

ove m'' è un terzo coefficiente di proporzionalità.

Sostituendo in (22_2), si ottiene [3])

$$\boldsymbol{M}_3 = m'' \boldsymbol{N}_0 - m \boldsymbol{N}_1 . \tag{24}$$

Da (13_6), con procedimento analogo, si ha

$$\begin{cases} \mathbf{v} \times \boldsymbol{N}_0 (\mathbf{M}_1 - m' \mathbf{N}_1) - \mathbf{v} \times (\boldsymbol{M}_1 - m' \boldsymbol{N}_1) \mathbf{N}_0 = 0 \\ \mathbf{u} \times \mathbf{N}_0 (\boldsymbol{M}_1 - m' \boldsymbol{N}_1) - \mathbf{u} \times (\mathbf{M}_1 - m' \mathbf{N}_1) \boldsymbol{N}_0 = 0. \end{cases} \tag{25}$$

Dalla prima, supposte non nulle le parentesi rotonde, segue

$$\mathbf{M}_1 = m''' \mathbf{N}_0 + m' \mathbf{N}_1 , \tag{26}$$

con m''' coefficiente di proporzionalità.

Sostituendo in (25_2), si ha

$$\boldsymbol{M}_1 = m''' \boldsymbol{N}_0 + m' \boldsymbol{N}_1 . \tag{27}$$

Da (13_3), segue

$$\begin{cases} \mathbf{v} \times \boldsymbol{N}_0 (\mathbf{M}_2 + m'' \mathbf{N}_1) - \mathbf{v} \times (\boldsymbol{M}_2 + m'' \boldsymbol{N}_1) \mathbf{N}_0 = 0 \\ \mathbf{u} \times \mathbf{N}_0 (\boldsymbol{M}_2 + m'' \boldsymbol{N}_1) - \mathbf{u} \times (\mathbf{M}_2 + m'' \mathbf{N}_1) \boldsymbol{N}_0 = 0. \end{cases} \tag{28}$$

Come prima, si trova

$$\begin{cases} \mathbf{M}_2 = m^{\mathrm{IV}} \mathbf{N}_0 - m'' \mathbf{N}_1 \\ \boldsymbol{M}_2 = m^{\mathrm{IV}} \boldsymbol{N}_0 - m'' \boldsymbol{N}_1 . \end{cases} \tag{29}$$

Da (13_5), segue

$$(m''' + m'') \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{N}_1 \cdot \mathbf{N}_0 - \mathbf{v} \times \boldsymbol{N}_0 \cdot \mathbf{N}_1) = 0 . \tag{30}$$

Poichè *non* può essere $\mathbf{N}_0 \parallel \mathbf{N}_1$ segue

$$m''' = - m''. \tag{31}$$

---

[3]) È quasi superfluo osservare che il caso escluso delle parentesi rotonde uguali a zero risulta compreso in (23) e (24) e si ottiene per $m'' = 0$. Analoga osservazione si può fare nel seguito.

Da (13_4) segue

$$(m^{\text{IV}} + m' + m)\,\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{N}_1 \cdot \mathrm{N}_0 - \mathbf{v} \times \boldsymbol{N}_0 \cdot \mathrm{N}_1) = 0 \tag{32}$$

e quindi

$$m^{\text{IV}} = -(m + m')\,. \tag{33}$$

Riassumendo, si hanno le seguenti condizioni di compatibilità

$$\left\{\begin{array}{ll} \boldsymbol{M}_4 = m\,\boldsymbol{N}_0 & \mathrm{M}_4 = m\,\mathrm{N}_0 \\ \boldsymbol{M}_3 = m''\,\boldsymbol{N}_0 - m\,\boldsymbol{N}_1 & \mathrm{M}_3 = m''\,\mathrm{N}_0 - m\,\mathrm{N}_1 \\ \boldsymbol{M}_2 = -(m + m')\,\boldsymbol{N}_0 - m''\,\boldsymbol{N}_1 & \mathrm{M}_2 = -(m + m')\,\mathrm{N}_0 - m''\,\mathrm{N}_1 \\ \boldsymbol{M}_1 = -m''\,\boldsymbol{N}_0 + m'\,\boldsymbol{N}_1 & \mathrm{M}_1 = -m''\,\mathrm{N}_0 + m'\,\mathrm{N}_1 \\ \boldsymbol{M}_0 = m'\,\boldsymbol{N}_0 & \mathrm{M}_0 = m'\,\mathrm{N}_0\,. \end{array}\right. \tag{34}$$

Per mezzo di queste condizioni, da (7), segue

$$\dot{\tau} = -m\tau^2 - m''\,\tau + m'. \tag{35}$$

Conviene sostituire le condizioni di compatibilità (34) con le seguenti del tutto equivalenti

$$\left\{\begin{array}{ll} \boldsymbol{M}_2 = -(m + m')\,\boldsymbol{N}_0 - m''\,\boldsymbol{N}_1 & \mathrm{M}_2 = -(m + m')\,\mathrm{N}_0 - m''\,\mathrm{N}_1 \\ \boldsymbol{M}_4 + \boldsymbol{M}_0 = (m + m')\,\boldsymbol{N}_0 & \mathrm{M}_4 + \mathrm{M}_0 = (m + m')\,\mathrm{N}_0 \\ \boldsymbol{M}_4 - \boldsymbol{M}_0 = (m - m')\,\boldsymbol{N}_0 & \mathrm{M}_4 - \mathrm{M}_0 = (m - m')\,\mathrm{N}_0 \\ \boldsymbol{M}_3 + \boldsymbol{M}_1 = -(m - m')\,\boldsymbol{N}_1 & \mathrm{M}_3 + \mathrm{M}_1 = -(m - m')\,\mathrm{N}_1 \\ \boldsymbol{M}_3 - \boldsymbol{M}_1 = 2m''\,\boldsymbol{N}_0 - (m + m')\,\boldsymbol{N}_1 & \mathrm{M}_3 - \mathrm{M}_1 = 2m''\,\mathrm{N}_0 - (m + m')\,\mathrm{N}_1\,. \end{array}\right. \tag{36}$$

Per brevità si ponga

$$m + m' = s_1 \qquad m - m' = s_2\,. \tag{37}$$

Tenendo conto di (4), (8), (9), (10), (11) e (37) le (36) possono scriversi più esplicitamente:

$$(36')\quad \begin{cases} (\varepsilon\boldsymbol{\omega}^* - \mathbf{K}) \wedge \boldsymbol{\omega}^* - \varepsilon\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} + 2\varepsilon\mathbf{b} \wedge \mathbf{b} = -\, s_1\, \varepsilon\mathbf{b} + 2m''\, \varepsilon\mathbf{a} \\ (\varepsilon\boldsymbol{\omega}^* - \mathbf{K}) \wedge \boldsymbol{\omega}^* + \varepsilon\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = s_1\, \varepsilon\mathbf{b} \\ (\varepsilon\boldsymbol{\omega}^* - \mathbf{K}) \wedge \mathbf{a} + \varepsilon\mathbf{a} \wedge \boldsymbol{\omega}^* = -\, s_2\, \varepsilon\mathbf{b} \\ (\varepsilon\boldsymbol{\omega}^* - \mathbf{K}) \wedge \mathbf{b} + \varepsilon\mathbf{b} \wedge \boldsymbol{\omega}^* = s_2\, \varepsilon\mathbf{a} \\ \varepsilon\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \varepsilon\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} = -\, m''\, \varepsilon\mathbf{b} - s_1\, \varepsilon\mathbf{a} \\ \\ \sigma\boldsymbol{\omega}^* \wedge \boldsymbol{\omega}^* - \sigma\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} + 2\sigma\mathbf{b} \wedge \mathbf{b} + OG^* \wedge (\varepsilon\boldsymbol{\omega}^* - \mathbf{K}) = -\, s_1\, \sigma\mathbf{b} + 2m''\, \sigma\mathbf{a} \\ \sigma\boldsymbol{\omega}^* \wedge \boldsymbol{\omega}^* + \sigma\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} + OG^* \wedge (\varepsilon\boldsymbol{\omega}^* - \mathbf{K}) = s_1\, \sigma\mathbf{b} \\ \sigma\boldsymbol{\omega}^* \wedge \mathbf{a} + \sigma\mathbf{a} \wedge \boldsymbol{\omega}^* + OG^* \wedge \varepsilon\mathbf{a} = -\, s_2\, \sigma\mathbf{b} \\ \sigma\boldsymbol{\omega}^* \wedge \mathbf{b} + \sigma\mathbf{b} \wedge \boldsymbol{\omega}^* + OG^* \wedge \varepsilon\mathbf{b} = s_2\, \sigma\mathbf{a} \\ \sigma\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \sigma\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} = -\, m''\, \sigma\mathbf{b} - s_1\, \sigma\mathbf{a}\,. \end{cases}$$

3. Nel caso $\boldsymbol{\omega}^* = 0$ le (36′), le (14) e le (15) divengono

$$(38)\quad \begin{cases} \varepsilon\mathbf{b} \wedge \mathbf{b} = m''\, \varepsilon\mathbf{a} & \sigma\mathbf{b} \wedge \mathbf{b} - OG^* \wedge \mathbf{K} = m''\, \sigma\mathbf{a} \\ \varepsilon\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = s_1\, \varepsilon\mathbf{b} & \sigma\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} - OG^* \wedge \mathbf{K} = s_1\, \sigma\mathbf{b} \\ s_2\, \varepsilon\mathbf{b} = \mathbf{K} \wedge \mathbf{a} & s_2\, \sigma\mathbf{b} = -\, OG^* \wedge \varepsilon\mathbf{a} \\ s_2\, \varepsilon\mathbf{a} = -\, \mathbf{K} \wedge \mathbf{b} & s_2\, \sigma\mathbf{a} = OG^* \wedge \varepsilon\mathbf{b} \\ \varepsilon\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \varepsilon\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} = -\, m''\, \varepsilon\mathbf{b} - s_1\, \varepsilon\mathbf{a}, & \sigma\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \sigma\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} = -\, m''\, \sigma\mathbf{b} - s_1\, \sigma\mathbf{a} \end{cases}$$

$$(39)\quad \begin{cases} \sigma\mathbf{a} \times \varepsilon\mathbf{a} = k_z \\ \sigma\mathbf{a} \times \mathbf{K} = 0 \\ \sigma\mathbf{b} \times \mathbf{K} = 0 \\ \sigma\mathbf{b} \times \varepsilon\mathbf{a} + \sigma\mathbf{a} \times \varepsilon\mathbf{b} = 0 \\ \sigma\mathbf{a} \times \varepsilon\mathbf{a} = \sigma\mathbf{b} \times \varepsilon\mathbf{b} \end{cases} \qquad (40)\quad \begin{cases} \sigma\mathbf{a} \times \mathbf{a} + 2\mathbf{K} \times OG^* = 2E \\ \varepsilon\mathbf{a} \times OG^* = 0 \\ \varepsilon\mathbf{b} \times OG^* = 0 \\ \sigma\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \sigma\mathbf{b} \times \mathbf{b} \\ \sigma\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0. \end{cases}$$

Evidentemente se, con una conveniente scelta dei parametri disponibili, si riesce a soddisfare le (38) e conseguentemente pure le (39) e (40), si ottengono movimenti $\mathcal{P}_e$ di $\mathcal{C}$ *la cui legge temporale segue da* (35). I calcoli successivi esprimono una possibile maniera di soddisfare le condizioni dette.

Sostituendo le $(38_{3.4})$ in $(38_{1.2.5})$ si ha

$$(41) \qquad \begin{cases} (\mathbf{K} \wedge \mathbf{a} + m'' \mathbf{K}) \wedge \mathbf{b} = 0, \quad (\mathbf{K} \wedge \mathbf{b} + s_1 \mathbf{K}) \wedge \mathbf{a} = 0 \\ (\mathbf{K} \wedge \mathbf{a} + m'' \mathbf{K}) \wedge \mathbf{a} - (\mathbf{K} \wedge \mathbf{b} + s_1 \mathbf{K}) \wedge \mathbf{b} = 0. \end{cases}$$

Dalle prime due segue $\varrho \mathbf{b} = \mathbf{K} \wedge \mathbf{a} + m'' \mathbf{K}$, $\varrho' \mathbf{a} = \mathbf{K} \wedge \mathbf{b} + s_1 \mathbf{K}$, ove ϱ e ϱ' sono due coefficienti di proporzionalità.

Sostituendo in (41_3), si trova $\varrho' = -\varrho$ e pertanto bisogna scrivere più semplicemente

$$(42) \qquad \begin{cases} \varrho \mathbf{b} = \mathbf{K} \wedge \mathbf{a} + m'' \mathbf{K} \\ -\varrho \mathbf{a} = \mathbf{K} \wedge \mathbf{b} + s_1 \mathbf{K}. \end{cases}$$

Eliminando da queste due il vettore $\mathbf{b}$, si ottiene

$$(43) \qquad (\varrho^2 - K^2)\, \mathbf{a} + (\mathbf{K} \times \mathbf{a} + \varrho s_1)\, \mathbf{K} = 0.$$

Poichè $\mathbf{a}$ e $\mathbf{K}$ sono da ritenere non paralleli, perchè altrimenti si ricadrebbe nel caso escluso $\varepsilon \mathbf{b} = 0$, segue

$$(44) \qquad \varrho^2 = K^2, \qquad \mathbf{K} \times \mathbf{a} = -\varrho s_1.$$

Da $(40_{2.3})$ si ha che OG^* è parallelo al prodotto $\varepsilon \mathbf{a} \wedge \varepsilon \mathbf{b}$ e quindi, tenendo presenti le $(38_{3.4})$, (42_2) e (44), si ottiene

$$(45) \qquad OG^* = \frac{\varrho_1 \varrho \mathbf{a}^2 \sin^2 \widehat{\mathbf{aK}}}{s_2^2} \mathbf{K},$$

ove ϱ_1 è un nuovo coefficiente di proporzionalità. Posto

$$(46) \qquad \varrho^* = \frac{\varrho_1 \varrho a^2 \sin^2 \widehat{\mathbf{aK}}}{s_2^2},$$

si può scrivere più concisamente

$$OG^* = \varrho^* \mathbf{K}. \tag{45'}$$

Da $(38_{9.8})$, per mezzo di $(45')$, $(38_{3.4})$, (44) e (42_1) si ha

$$\begin{cases} s_2^2\, \sigma \mathbf{a} = -\, \varrho^*\, \varrho\, (s_1\, \mathbf{K} + \varrho \mathbf{a}) \\ s_2^2\, \sigma \mathbf{b} = -\, \varrho^*\, \varrho \mathbf{K} \wedge \mathbf{a}. \end{cases} \tag{47}$$

Eliminando $\mathbf{b}$ con la (42_1), si ha pure

$$\begin{cases} \chi \mathbf{a} = -\, \varrho^*\, \varrho s_1\, \mathbf{K} \\ \chi\, (\mathbf{K} \wedge \mathbf{a}) = -\, m''\, s_2^2\, \sigma \mathbf{K}, \end{cases} \tag{48}$$

ove si è posto

$$\chi = s_2^2\, \sigma + \varrho^*\, \varrho^2. \tag{49}$$

Per passare alla rappresentazione cartesiana si introduca la terna $\mathcal{T} \equiv 0\xi\eta\zeta$ costituita con gli assi principali d'inerzia di $\mathcal{C}$ relativi ad 0 e siano $A, B, C\, (A < B < C)$ i rispettivi momenti principali d'inerzia. Con riferimento a $\mathcal{T}$, si indichino le terne delle componenti cartesiane dei vari vettori apponendo, ai simboli che li rappresentano, gli indici 1, 2 e 3 ordinatamente. Si osservi pure che

$$\chi = \begin{vmatrix} \chi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \chi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \chi_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s_2^2 A + \varrho^*\, \varrho^2 & 0 & 0 \\ 0 & s_2^2 B + \varrho^*\, \varrho^2 & 0 \\ 0 & 0 & s_2^2\, C + \varrho^*\, \varrho^2 \end{vmatrix}. \tag{49'}$$

Da (48_1) segue

$$a_1 = -\, \varrho^*\, \varrho s_1 \frac{K_1}{\chi_1}, \quad a_2 = -\, \varrho^*\, \varrho s_1 \frac{K_2}{\chi_2}, \quad a_3 = -\, \varrho^*\, \varrho s_1 \frac{K_3}{\chi_3}. \tag{50}$$

Sostituendo nella (48_2) si ha

$$(51)\qquad \begin{cases} (C-B)\,\chi_1\,K_2\,K_3 = -\,\mu_0\,A\chi_2\,\chi_3\,K_1 \\ (C-A)\,\chi_2\,K_3\,K_1 = \quad \mu_0\,B\chi_3\,\chi_1\,K_2 \\ (B-A)\,\chi_3\,K_1\,K_2 = -\,\mu_0\,C\chi_1\,\chi_2\,K_3 \end{cases}$$

da cui segue

$$K_1^2 = -\frac{BC\mu_0^2\,\chi_1^2}{(C-A)\,(B-A)},\quad K_2^2 = \frac{CA\mu_0^2\,\chi_2^2}{(B-A)\,(C-B)},$$

$$K_3^2 = -\frac{AB\mu_0^2\,\chi_3^2}{(C-B)\,(C-A)},$$

ove $\mu_0 = m''/\varrho^*\,\varrho s_1$.

Tali valori delle K_i^2 sono manifestamente inaccettabili.

Tuttavia è possibile soddisfare le (51) scegliendo, ad esempio [4])

$$(52)\qquad K_2 = 0 \qquad \chi_2 \equiv s_2^2\,B + \varrho^*\,\varrho^2 = 0.$$

Dopo ciò, dalle (50) si ha

$$(53)\qquad K_1 = -\frac{\varrho\,(B-A)\,a_1}{Bs_1},\quad K_2 = 0,\quad K_3 = \frac{\varrho\,(C-B)\,a_3}{Bs_1}.$$

Sostituendo in (44) si ottiene

$$(54)\qquad \begin{cases} (B-A)^2\,a_1^2 + (C-B)^2\,a_3^2 = B^2\,s_1^2 \\ (B-A)\;\;a_1^2 - (C-B)\,a_3^2 = Bs_1^2, \end{cases}$$

da cui

$$(55)\qquad a_1 = R_0\,R_1\,s_1,\qquad a_3 = R_0\,R_3\,s_1.$$

Sostituendo successivamente in (53), segue

$$(56)\qquad K_1 = -\,\varrho\mathscr{R}_1,\qquad K_2 = 0,\qquad K_3 = \varrho\mathscr{R}_3,$$

---

[4]) Si osservi, incidentalmente, che la (52_2), tenuto conto di (44_1) e $(45')$, permette il calcolo del modulo di $\mathbf{K}$: $\varrho^2 = B^2\,s_2^4/\,|\,OG^*\,|^2$.

ove per brevità si è posto

$$\tag{57} \begin{cases} R_0 = \sqrt{\dfrac{B}{C-A}}, \quad R_1 = \pm\sqrt{\dfrac{C}{B-A}}, \quad R_3 = \pm\sqrt{\dfrac{A}{C-B}} \\ \mathcal{R}_1 = \pm\sqrt{\dfrac{C\,(B-A)}{B\,(C-A)}}, \qquad \mathcal{R}_3 = \pm\sqrt{\dfrac{A\,(C-B)}{B\,(C-A)}}. \end{cases}$$

Da (42_1), per mezzo di (55) e (56), si ha

$$\tag{58} \begin{cases} b_1 = -\,(\mathcal{R}_3\, a_2 + \mathcal{R}_1\, m'') \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad b_2 = R_1\, R_3\, s_1 \\ b_3 = -\,(\mathcal{R}_1\, a_2 - \mathcal{R}_3\, m''). \end{cases}$$

Tenendo conto di (52_2), le (47) divengono

$$\tag{59} \begin{cases} \sigma \mathbf{a} = \dfrac{B}{\varrho}\,(s_1\,\mathbf{K} + \varrho \mathbf{a}) \\ \sigma \mathbf{b} = \dfrac{B}{\varrho}\,\mathbf{K} \wedge \mathbf{a}. \end{cases}$$

Ricordando poi le (55), (56) e (58) si può verificare che la prima di queste relazioni è identicamente soddisfatta mentre dalla seconda si ha

$$\tag{55'} a_2 = R_1\, R_3\, m''.$$

Dopo ciò le (58) divengono

$$\tag{60} b_1 = -\, R_0\, R_1\, m'', \quad b_2 = R_1\, R_3\, s_1, \quad b_3 = -\, R_0\, R_3\, m''.$$

Da (45′), eliminando ϱ^* con (52_2), segue

$$\tag{61} OG_1^* = \frac{s_2^2}{\varrho}\, B\mathcal{R}_1, \quad OG_2^* = 0, \quad OG_3^* = -\,\frac{s_2^2}{\varrho}\, B\mathcal{R}_3.$$

Queste ultime esprimono sostanzialmente le condizioni strutturali che devono verificarsi nel caso di integralità parziale di Hess.

Per mezzo di (42_1), (44), (45′) e (47) si può verificare che le equazioni $(38_{6.7.10})$ sono identicamente soddisfatte.

Le equazioni $(38_{3.4})$ possono invece soddisfarsi approfittando dell'arbitrarietà di ε; anzi, in generale, è possibile determinare sei delle nove ε_{rs}.

Restano infine le equazioni (39) e (40). Da (39_1) e (40_1) si ha

$$k_z = -\frac{\varrho^* \varrho^3 a^2 \sin^2 \widehat{\mathbf{aK}}}{s_2^3}, \qquad 2E = \varrho^* \varrho^2 \frac{2s_2^2 - a^2 \sin^2 \widehat{\mathbf{aK}}}{s_2^2}, \tag{62}$$

mentre le rimanenti equazioni (39) e (40) sono identicamente soddisfatte.

È ormai facile, sostituendo in (3) e (2) le (42) e le $(38_{3.4})$, scrivere le *formule fondamentali* che caratterizzano una classe di movimenti $\mathcal{P}_e$, dinamicamente possibili, per il solito pesante $\mathcal{C}$:

$$\begin{cases} \omega = \mathbf{a} \cos \chi + \dfrac{\mathbf{K} \wedge \mathbf{a} + m'' \mathbf{K}}{\varrho} \sin \chi \\[2ex] \mathbf{c} = \dfrac{\varrho \mathbf{a} + s_1 \mathbf{K}}{s_2} \cos \chi + \dfrac{\mathbf{K} \wedge \mathbf{a}}{s_2} \sin \chi - \mathbf{K}, \end{cases} \tag{63}$$

ove $\mathbf{a}$ e $\mathbf{K}$ sono dati da (55), (55′) e (56); s_1, m'' sono arbitrari, mentre le due rimanenti costanti s_2 e ϱ devono soddisfare ad una delle equazioni (61). Inoltre

$$\cos \chi = \frac{1 - \tau^2}{1 + \tau^2}, \qquad \sin \chi = \frac{2\tau}{1 + \tau^2} \tag{64}$$

sono funzioni del tempo definite dal fatto che τ dev'essere soluzione dell'equazione (35) e l'integrazione di questa introduce un'altra costante arbitraria. Altra costante d'integrazione si ottiene quando si vuole passare alle coordinate di posizione di $\mathcal{C}$. In definitiva si hanno cinque costanti arbitrarie. Però bisogna tenere conto della condizione $c^2 = 1$ e del fatto che vi sono ∞^1 coppie di diametri coniugati che danno luogo alla medesima ellisse. Per togliere questa arbitrarierà non essenziale, e conseguire, ad un tempo, una più semplice rappresentazione dei moti (63) conviene imporre la condizione che $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ abbiano il significato di semiassi dell'ellisse descritta dal secondo estremo di 0, ω.

Poichè

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = - s_1 m'', \tag{65}$$

si riconosce che la detta condizione equivale a supporre nullo uno dei due parametri s_1 e m''.

Quindi in definitiva, da (63) seguono, come si vedrà esplicitamente dagli sviluppi dei nn. successivi, due classi distinte di ∞^3 movimenti.

Dal punto di vista della teoria delle precessioni generalizzate conviene pure, oltre alle (63), dare le formule che caratterizzano l'omografia ε. Si tratta, in effetti, di esplicitare la (2), tenendo conto delle (63) medesime. Data l'arbitrarietà di χ si ottiene:

$$\begin{cases} \varepsilon \mathbf{a} = \dfrac{\varrho}{s^2} \left(\mathbf{a} + \dfrac{s_1}{\varrho} \mathbf{K} \right) \\ \varepsilon (\mathbf{K} \wedge \mathbf{a} + m'' \mathbf{K}) = \dfrac{\varrho}{s_2} \mathbf{K} \wedge \mathbf{a}. \end{cases} \tag{66}$$

Poichè da queste seguono sei equazioni scalari, tre delle nove ε_{rs} $(r, s = 1, 2, 3)$ restano arbitrarie, cioè, in generale, i moti (63) possono descriversi come precessioni generalizzate in ∞^3 modi diversi.

Tenute presenti le espressioni di a_i e b_i date da (55), (55') e (60), si riconosce subito che bisogna escludere senz'altro l'eventualità $s_1 = m'' = 0$. Segue pertanto da (66) che ε non può mai ridursi ad una omotetia e quindi si conferma, anche in questo modo, il noto risultato [5]) di impossibilità, per un solido pesante asimmetrico, di precessioni regolari con asse di precessione verticale.

---

[5]) G. GRIOLI, *Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico,* Ann. di Mat., ser. IV, t. XXVI, fasc. 3-4 (1947).

Infine, si osservi che per le (63) è soddisfatta la condizione di Hess : $OG \times \sigma\omega = 0$.

4. *Caso* $s_1 = 0$, cioè $m + m' = 0$.

Da (55) segue $a_1 = a_3 = 0$; le componenti di $\mathbf{K}$, date da (56), rimangono inalterate; invece dalle (60) risulta $b_2 = 0$.

Infine l'equazione (35) diviene

$$\dot{\tau} + m\tau^2 + m''\tau + m = 0. \tag{67}$$

Dopo queste specificazioni alla soluzione (63) si può dare la seguente forma cartesiana

$$\left\{\begin{aligned} & p = -R_0 R_1 m'' \sin\chi, \ q = R_1 R_3 m'' \cos\chi, \ r = -R_0 R_3 m'' \sin\chi, \\ & c_1 = -\varrho\left(\frac{R_1 R_3 \mathscr{R}_3}{2m} m'' \sin\chi - \mathscr{R}_1\right), \\ & c_2 = \frac{\varrho R_1 R_3 m''}{2m} \cos\chi, \\ & c_3 = -\varrho\left(\frac{R_1 R_3 \mathscr{R}_1}{2m} m'' \sin\chi + \mathscr{R}_3\right). \end{aligned}\right. \tag{68}$$

Da (68) seguono ∞^3 movimenti.

Con riferimento a tali movimenti da (66) si ha

$$\left\{\begin{aligned} & \varepsilon\mathbf{a} = \frac{\varrho}{2m}\mathbf{a} \\ & \varepsilon(\mathbf{K} \wedge \mathbf{a} + m''\mathbf{K}) = \frac{\varrho}{2m}\mathbf{K} \wedge \mathbf{a} \end{aligned}\right. \tag{69}$$

cioè

$$\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \dfrac{\varrho}{2m} & -\dfrac{R_1}{R_3}\left(\varepsilon_{11} - \dfrac{\varrho}{2m}\dfrac{R_3\mathscr{R}_3}{R_0}\right) \\ \varepsilon_{21} & \dfrac{\varrho}{2m} & -\dfrac{R_1}{R_3}\varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{31} & \dfrac{\varrho}{2m} & -\dfrac{R_1}{R_3}\left(\varepsilon_{31} - \dfrac{\varrho}{2m}\dfrac{R_3\mathscr{R}_1}{R_0}\right) \end{vmatrix}. \tag{70}$$

5. *Caso* $m'' = 0$.

In questo secondo caso, le (55) e (56) rimangono inalterate, mentre (55′) e (60) si semplificano così

$$a_2 = 0, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = R_1 R_3 s_1, \quad b_3 = 0. \tag{71}$$

L'equazione (35) assume la forma

$$\dot{\tau} + m\tau^2 - m' = 0. \tag{72}$$

Quindi le (63) divengono :

$$\left\{\begin{aligned} & p = R_0 R_1 s_1 \cos\chi, \qquad q = R_1 R_3 s_1 \sin\chi, \qquad r = R_0 R_3 s_1 \cos\chi \\ & c_1 = \frac{A\, R_0\, R_1}{B} \frac{\varrho s_1}{s_2} \cos\chi + \varrho \mathcal{R}_1 \\ & c_2 = R_1\, R_3 \frac{\varrho s_1}{s_2} \sin\chi \\ & c_3 = \frac{C\, R_0\, R_3}{B} \frac{\varrho s_1}{s_2} \cos\chi - \varrho \mathcal{R}_3 . \end{aligned}\right. \tag{73}$$

Tale soluzione, a meno di qualche segno dovuto alla diversa posizione di G rispetto agli assi $0\xi\eta\zeta$, coincide con una soluzione segnalata in una mia precedente nota ([2]).

Manoscritto pervenuto in redazione il 20-3-68