RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIORGIO LETTA

Una generalizzazione del teorema di Ionescu Tulcea

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 41 (1968), p. 177-180

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1968__41__177_0>

UNA GENERALIZZAZIONE DEL TEOREMA DI IONESCU TULCEA

GIORGIO LETTA *)

RIASSUNTO. Si dimostra un teorema, il quale fornisce una condizione necessaria e sufficiente affinché, in un assegnato spazio misurabile, esista una legge di probabilità, le cui speranze condizionali, relative ad un'opportuna successione crescente di tribù, verifichino assegnate condizioni. Se ne deduce agevolmente il teorema classico di Ionescu Tulcea [1] riguardante la costruzione di una legge di probabilità in uno spazio prodotto.

1. Introduzione.

Le notazioni e la terminologia sono quelle impiegate in [2]. Se $(\Omega, \mathcal{F})$ è uno spazio misurabile, si indicherà con $B(\Omega, \mathcal{F})$ lo spazio vettoriale ordinato, costituito dalle funzioni numeriche limitate, definite su Ω e misurabili rispetto ad $\mathcal{F}$. Se $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$ $(i = 1, 2)$ sono spazi misurabili, si chiamerà applicazione markoviana di $B(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ in $B(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ ogni applicazione lineare T di $B(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ in $B(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$, la quale verifichi la condizione $T1 = 1$ e sia inoltre positiva (cioè tale che si abbia $Tf \geq 0$ per ogni $f \geq 0$) e sequenzialmente continua rispetto all'ordine (cioè tale che si abbia $\inf_n Tf_n = 0$ per ogni successione (f_n) con $\inf_n f_n = 0$).

Nel paragrafo 2 dimostreremo il teorema seguente.

---

*) Indirizzo dell'Autore: Istituto matematico dell'Università di Pisa.

Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del gruppo di ricerca n. 15 del C. N. R.

TEOREMA 1. *Siano* $(\Omega, \mathcal{F})$ *uno spazio misurabile e* $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ *una successione crescente di sotto-tribù di* $\mathcal{F}$, *con* $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$ *e tale che la tribù generata dalla riunione delle* $\mathcal{F}_n$ *coincida con* $\mathcal{F}$. *Per ogni* $n \geq 0$, *sia* T_n *un'applicazione markoviana di* $B(\Omega, \mathcal{F}_{n+1})$ *in* $B(\Omega, \mathcal{F}_n)$, *godente della proprietà*:

$$(1) \qquad T_n(fg) = gT_n f \text{ per } f \in B(\Omega, \mathcal{F}_{n+1}),\ g \in B(\Omega, \mathcal{F}_n).$$

Affinché esista in $(\Omega, \mathcal{F})$ *una legge di probabilità* $\mathbf{P}$ *(necessariamente unica) tale che, nello spazio* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, $T_n f$ *sia, per ogni* $n \geq 0$ *ed ogni* $f \in B(\Omega, \mathcal{F}_{n+1})$, *una versione della speranza condizionale* $\mathbf{E}[f \mid \mathcal{F}_n]$, *occorre e basta che sia soddisfatta la condizione seguente*:

(2) *Per ogni successione equilimitata* $(f_n)_{n\geq 0}$ *di elementi positivi di* $B(\Omega, \mathcal{F})$, *adattata alla successione di tribù* $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ *e verificante le relazioni*:

$$(3) \qquad f_n = T_n f_{n+1} \textit{ per ogni } n \geq 0,\ \lim_n f_n(\omega) = 0 \textit{ per ogni } \omega \in \Omega,$$

si ha $f_0 = 0$.

Nel paragrafo 3 mostreremo come si possa dedurre, dal teorema 1, il teorema classico di C. T. IONESCU TULCEA [1], il quale riguarda la costruzione di una legge di probabilità in uno spazio prodotto, e al quale si può dare — impiegando il concetto di applicazione markoviana, in luogo di quello di probabilità di transizione — la formulazione seguente: [1])

TEOREMA 2. *Sia* $(E_n, \mathcal{E}_n)_{n\geq 0}$ *una successione di spazi misurabili, con* $\mathcal{E}_0 = \{E_0, \emptyset\}$. *Si ponga* $(\Omega, \mathcal{F}) = (\prod_{n\geq 0} E_n, \prod_{n\geq 0} \mathcal{E}_n)$, *e si denotino con* X_n $(n \geq 0)$ *le applicazioni coordinate. Sia, per ogni* $n \geq 0$, T^n *un'applicazione markoviana di* $B(\Omega, \mathcal{T}(X_{n+1}))$ *in* $B(\Omega, \mathcal{T}(X_0, \dots, X_n))$. *Allora esiste in* $(\Omega, \mathcal{F})$ *una legge di probabilità* $\mathbf{P}$ *(necessariamente unica) tale che, nello spazio* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, $T^n f$ *sia, per ogni* $n \geq 0$ *ed ogni* $f \in B(\Omega, \mathcal{T}(X_{n+1}))$, *una versione della speranza condizionale* $\mathbf{E}[f \mid X_0, \dots, X_n]$.

---

[1]) Che questa formulazione sia equivalente a quella abituale (quale trovasi, ad es., in [3], V-1-1), si può facilmente riconoscere, tenendo presente [2], IX.4.

2. Dimostrazione del teorema 1.

La necessità della condizione è quasi immediata.

Siano, invero, $\mathbf{P}$ una legge di probabilità in $(\Omega, \mathcal{F})$ godente della proprietà detta nell'enunciato, e $(f_n)_{n\geq 0}$ una successione equilimitata di elementi positivi di $B(\Omega, \mathcal{F})$, verificante le relazioni (3). Nello spazio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ si ha allora, in virtù del teorema di Lebesgue, $\lim_n \mathbf{E}[f_n] = 0$. Essendo la successione $(\mathbf{E}[f_n])_{n\geq 0}$ costante, ciò implica $\mathbf{E}[f_0] = 0$. Di qui, essendo f_0 costante, discende $f_0 = 0$.

Dimostriamo ora che la condizione è sufficiente.

Supposto che essa sia soddisfatta, poniamo:

$$U_n f = T_n T_{n+1} \ldots T_m f \quad \text{per} \quad m \geq n \geq 0 \quad \text{e} \quad f \in B(\Omega, \mathcal{F}_{m+1}).$$

Per ogni n, la formula precedente definisce, senza ambiguità, un'applicazione U_n, lineare positiva, dello spazio $\bigcup_m B(\Omega, \mathcal{F}_m)$ sullo spazio $B(\Omega, \mathcal{F}_n)$.

In particolare, se si identifica lo spazio $B(\Omega, \mathcal{F}_0)$ (spazio delle funzioni numeriche finite, costanti su Ω) con il corpo $\mathbf{R}$ degli scalari, U_0 è una forma lineare positiva sullo spazio $\bigcup_m B(\Omega, \mathcal{F}_m)$. La forma U_0 è inoltre sequenzialmente continua rispetto all'ordine. Se infatti $(g_m)_{m\geq 0}$ è una successione decrescente di elementi dello spazio $\bigcup_m B(\Omega, \mathcal{F}_m)$ con $\inf_m g_m = 0$, allora, posto

$$f_n = \inf_m U_n g_m \quad \text{per ogni} \quad n \geq 0,$$

la successione $(f_n)_{n\geq 0}$ verifica le relazioni (3), sicché risulta $f_0 = 0$.

Se si denota con $\mathbf{P}$ l'unica legge di probabilità in $(\Omega, \mathcal{F})$, rispetto alla quale si abbia:

$$\mathbf{E}[f] = U_0 f \quad \text{per} \quad f \in \bigcup_m B(\Omega, \mathcal{F}_m),$$

allora, nello spazio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, risulta

$$\mathbf{E}[g T_n f] = \mathbf{E}[T_n(fg)] = \mathbf{E}[fg]$$

per ogni $f \in B(\Omega, \mathcal{F}_{n+1})$ ed ogni $g \in B(\Omega, \mathcal{F}_n)$. In altri termini: per ogni $f \in B(\Omega, \mathcal{F}_{n+1})$, $T_n f$ è una versione della speranza condizionale $\mathbf{E}[f \mid \mathcal{F}_n]$.

3. Deduzione del teorema di Ionescu Tulcea.

Nelle ipotesi del teorema 2, si denoti, per ogni $n \geq 0$ con $\mathcal{F}_n$ la tribù $\mathcal{T}(X_0, \dots, X_n)$ generata da $X_0, \dots, X_n$, e si prolunghi T^n in un'applicazione markoviana T_n di $B(\Omega, \mathcal{F}_{n+1})$ in $B(\Omega, \mathcal{F}_n)$, ponendo, per ogni elemento $f = F(X_0, \dots, X_{n+1})$ di $B(\Omega, \mathcal{F}_{n+1})$ ed ogni $\omega \in \Omega$:

$$T_n f(\omega) = T^n [F(X_0(\omega), \dots, X_n(\omega), X_{n+1}(\cdot))](\omega).$$

Si vede facilmente che sono allora verificate tutte le ipotesi del teorema 1. Tutto dunque si riduce a provare che è soddisfatta la condizione (2).

Sia, invero, $(f_n)_{n \geq 0}$ una successione equilimitata di elementi positivi di $B(\Omega, \mathcal{F})$ verificante le relazioni (3), e si ponga $f_n = F_n(X_0, \dots, X_n)$. Si ha allora, per ogni $n \geq 0$ ed ogni elemento $(x_0, \dots, x_n)$ di $E_0 \times \dots \times E_n$,

$$F_n(x_0, \dots, x_n) \leq \sup_{y \in E_{n+1}} F_{n+1}(x_0, \dots, x_n, y).$$

Se fosse $F_0 > \lambda > 0$, sarebbe quindi possibile (per induzione) costruire un elemeuto $(x_n)_{n \geq 0}$ di Ω godente della proprietà:

$$F_n(x_0, \dots, x_n) > \lambda \text{ per ogni } n \geq 0,$$

ciò che contrasterebbe con la seconda delle relazioni (3).

BIBLIOGRAFIA

[1] Ionescu Tulcea, C. T.: *Mesures dans les espaces produits.* Rend. Acc. Naz. Linc., 7, 208-211 (1949).

[2] Meyer, P. A.: *Probabilités et potentiel.* Act. scient. ind. 1318, Hermann, Paris, 1966.

[3] Neveu, J.: *Bases mathématiques du calcul des probabilités.* Masson et C^{ie}, Paris, 1964.

Manoscritto pervenuto in redazione il 26 aprile 1968