RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

SERGIO CAMPANATO

Sul problema di Cauchy-Dirichlet per equazioni paraboliche del secondo ordine, non variazionali, a coefficienti discontinui

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 41 (1968), p. 153-163

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1968__41__153_0>

SUL PROBLEMA DI CAUCHY-DIRICHLET PER EQUAZIONI PARABOLICHE DEL SECONDO ORDINE, NON VARIAZIONALI, A COEFFICIENTI DISCONTINUI

SERGIO CAMPANATO *)

In questa nota considero il problema di Cauchy-Dirichlet per l'operatore parabolico $\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial t}$ in un cilindro $Q = \Omega \times (0, T)$, Ω convesso di $\mathbb{R}^n$, e con dati al bordo nulli. I coefficienti a_{ij} sono misurabili e limitati e l'operatore $Eu = \sum_{ij} a_{ij} D_i D_j u$ è ellittico; la soluzione è cercata nella classe delle funzioni $u \in W_0^{2,1}(Q)$ dove

$$W_0^{2,1}(Q) = \left\{ u \mid u \in L^2(0, T;\ H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)),\ \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(Q),\ u(x, 0) = 0 \right\}$$

Sotto certe ipotesi per gli autovalori della matrice simmetrica $\{a_{ij}\}$ dimostro che l'operatore $E - \frac{\partial}{\partial t}$ è un isomorfismo $W_0^{2,1}(Q) \to L^2(Q)$ (cfr. teor. 2.I).

La tecnica di dimostrazione è analoga a quella utilizzata in [2] nello studio del problema di Dirichlet per l'operatore ellittico Eu. Nel lavoro citato si dimostra che l'operatore E è un isomorfismo $H_0^{1,p} \cap H^{2,p} \to L^p$ per p appartenente ad un intorno di 2 abbastanza piccolo.

---

*) Indirizzo dell'Autore: Istituto Matematico, Università di Pisa.

Ad analogo risultato si può arrivare anche per l'operatore parabolico $E - \frac{\partial}{\partial t}$ e per il problema di Cauchy-Dirichlet omogeneo. Mi sono limitato al caso $p = 2$ per non appesantire la trattazione.

Per quanto riguarda le condizioni b) e c) del n. 2 sugli autovalori della matrice $\{a_{ij}\}$ si può osservare che la condizione b) (ipotesi di Cordes), non è eliminabile. Essa è necessaria anche perché l'operatore ellittico E sia un isomorfismo $H_0^1 \cap H^2 \to L^2$ (cfr. [9]). La condizione c) invece meriterebbe un'ulteriore indagine in quanto, mancando di opportuni controesempi, non è chiaro se essa sia legata al metodo di dimostrazione o alla natura del problema.

1. Sia Ω un aperto limitato $\mathbb{R}_x^n$, $n \geq 2$, con frontiera $\partial\Omega$ di classe C^2. Supponiamo che Ω sia convesso o, più in generale, che la curvatura media di $\partial\Omega$ abbia segno costante non positivo (retta normale orientata verso l'esterno). Indichiamo con Q il cilindro $\Omega \times (0, T)$, $T > 0$, e con (x, t) un punto generico di $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t$.

Indichiamo con $H^k(\Omega)$ $[H_0^k(\Omega)]$ la chiusura dello spazio $C^k(\bar{\Omega})$ $[C_0^k(\bar{\Omega})]$ rispetto alla norma

$$\| v \| = \left\{ \sum_{|\alpha| \leq k} \| D^\alpha v \|^2_{L^2(\Omega)} \right\}^{1/2}.$$

Indichiamo con $W_0^{2,1}(Q)$ la classe delle funzioni $u(x, t)$ definite in Q tali che

$$u \in L^2(0, T;\ H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)),\ \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(Q) \ \text{e}\ u(x, 0) = 0. \tag{1.1}$$

La condizione $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(Q)$ equivale a dire che $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T;\ L^2(\Omega))$ e per quanto riguarda la condizione $u(x, 0) = 0$ ricordiamo che una funzione $u \in W_0^{2,1}(Q)$ è quasi ovunque uguale ad una funzione continua di $[0, T] \to L^2(\Omega)$ ([8]).

In $W_0^{2,1}(Q)$ assumiamo come norma la seguente

$$\| u \|_{(M)} = \left\{ \int_0^T dt \int_\Omega \left[\sum_{ij} (D_i D_j u)^2 + M^2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right] dx \right\}^{1/2} \tag{1.2}$$

dove M è una costante positiva fissata e $D_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$. Con la norma (1.2), $W_0^{2,1}(Q)$ è uno spazio di Hilbert e, al variare di M nei reali positivi, le norme (1.2) sono a due a due equivalenti.

LEMMA 1.I. *Fissato M positivo e fissato $f \in L^2(Q)$, la soluzione del problema di Cauchy-Dirichlet* [1])

$$
(1.3) \qquad \begin{cases} \Delta u - M \dfrac{\partial u}{\partial t} = f \\ \\ u \in W_0^{2,1}(Q) \end{cases}
$$

verifica la maggiorazione

$$
(1.4) \qquad \| u \|_{(M)} \leq \| f \|_{L^2(Q)} .
$$

DIM. Per ogni $u \in W_0^{2,1}(Q)$ risulta [2])

$$
(1.5) \qquad \int_Q \Delta u \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \, dx \, dt \leq 0.
$$

Inoltre per ogni $v(x) \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ si ha la maggiorazione (cfr. [9])

$$
\int_\Omega \sum_{ij} (D_i D_j v)^2 \, dx - (n-1) \int_{\partial\Omega} |\operatorname{grad} v|^2 H(x) \, d\sigma = \int_\Omega (\Delta v)^2 \, dx
$$

---

[1]) È ben noto che questo problema ammette una sola soluzione $\forall f \in L^2(Q)$.

[2]) È sufficiente supporre u regolare; allora

$$
\int_Q \Delta u \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \, dx \, dt = - \int_Q \sum_i D_i u \cdot \frac{\partial}{\partial t} D_i u \, dx \, dt =
$$

$$
= - \frac{1}{2} \int_Q \frac{\partial}{\partial t} \sum_i (D_i u)^2 \, dx \, dt = - \frac{1}{2} \int_\Omega \sum_i [D_i u(x, T)]^2 dx \leq 0.
$$

dove $H(x)$ è la curvatura media di $\partial\Omega$ nel punto $x \in \partial\Omega$. Per l'ipotesi fatta su Ω risulterà

$$(1.6) \qquad \int_\Omega (D_i D_j v)^2 \, dx \leq \int_\Omega (\Delta v)^2 \, dx$$

Se u è la soluzione del problema (1.3), per quasi tutti i $t \in [0, T]$ è $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ e quindi, tenuto conto di (1.5) e (1.6)

$$\| u \|^2_{(M)} \leq \int_Q \left[(\Delta u)^2 + M^2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right] dx \, dt \leq$$

$$\leq \int_Q \left[(\Delta u)^2 + M^2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - 2M \, \Delta u \, \frac{\partial u}{\partial t} \right] dx \, dt =$$

$$= \int_Q \left(\Delta u - M \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx \, dt = \int_Q f^2 \, dx \, dt.$$

TEOREMA 1.I. *Sia $a(x, t)$ una funzione misurabile e limitata in Q, strettamente positiva*

$$(1.7) \qquad 0 < A \leq a(x, t) \leq B, \qquad (x, t) \in Q.$$

Per ogni $f \in L^2(Q)$ il problema di C. D.

$$(1.8) \qquad \begin{cases} \Delta u - a \dfrac{\partial u}{\partial t} = f \\[2ex] u \in W_0^{2,1}(Q) \end{cases}$$

ammette una e una sola soluzione u e si ha la maggiorazione

$$(1.9) \qquad \| u \|_{\left(\frac{A+B}{2}\right)} \leq \frac{B + A}{2A} \| f \|_{L^2(Q)}.$$

DIM. Posto $M = \frac{A+B}{2}$ consideriamo l'applicazione $\varphi : W_0^{2,1}(Q) \to$
$\to W_0^{2,1}(Q)$

$$\varphi(v) = \left(\Delta - M\frac{\partial}{\partial t}\right)^{-1}(f) + \left(\Delta - M\frac{\partial}{\partial t}\right)^{-1}\left([a-M]\frac{\partial v}{\partial t}\right)$$

La tesi è equivalente a dimostrare che $v \to \varphi(v)$ ha uno e un solo punto unito. Se in $W_0^{2,1}(Q)$ assumiamo come norma $\| u \|_{(M)}$ allora φ è una contrazione. Infatti, tenuto conto del lemma 1.I, si ha $\forall\, v$, $w \in W_0^{2,1}(Q)$

$$\| \varphi(v) - \varphi(w) \|_{(M)} =$$

$$= \left\| \left(\Delta - M\frac{\partial}{\partial t}\right)^{-1}\left([a-M]\frac{\partial(v-w)}{\partial t}\right)\right\|_{(M)} \leq \left\| (a-M)\frac{\partial(v-w)}{\partial t}\right\|_{L^2(Q)} \leq$$

$$\leq \frac{B-A}{B+A}\left\| M\frac{\partial(v-w)}{\partial t}\right\|_{L^2(Q)} \leq \frac{B-A}{B+A}\| v-w \|_{(M)} .$$

Pertanto esiste una e una sola $u \in W_0^{2,1}(Q)$ tale che $u = \varphi(u)$ e u è la soluzione del problema (1.8). Infine

$$\| u \|_{(M)} = \| \varphi(u) \|_{(M)} \leq \| f \|_{L^2(Q)} + \frac{B-A}{B+A}\| u \|_{(M)}$$

e quindi

$$\| u \|_{(M)} \leq \frac{A+B}{2A}\| f \|_{L^2(Q)}.$$

TEOREMA 1.II. *Sia $a(x,t) \in L^\infty(Q)$ e strettamente positiva*

$$0 < A \leq a(x,t) \leq B, \qquad (x,t) \in Q.$$

Per ogni $f \in L^2(Q)$ il problema di C. D.

$$(1.10) \qquad \begin{cases} a\Delta u - \dfrac{\partial u}{\partial t} = f \\ \\ u \in W_0^{2,1}(Q) \end{cases}$$

ammette una e una sola soluzione u e si ha la maggiorazione

$$\| u \|_{\left(\frac{A+B}{2A}\right)} \leq \frac{A+B}{2A^2} \| f \|_{L^2(Q)} . \tag{1.11}$$

2. Sia $\{a_{ij}(x,t)\}$ una matrice $n \times n$ simmetrica di funzioni misurabili e limitate in Q. Facciamo le seguenti ipotesi

a) Esiste un $\nu > 0$ tale che $\sum_{ij} a_{ij} \lambda_i \lambda_j \geq \nu |\lambda|^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}^n$ e per quasi tutti i punti $(x,t) \in Q$.

b) Detti $\mu_i(x,t)$ $(i = 1, \dots, n)$ gli autovalori della matrice $\{a_{ij}(x,t)\}$, esiste una costante K, $0 \leq \mathrm{K} < 1$, tale che per quasi tutti i punti $(x,t) \in Q$ risulti

$$\frac{(\sum_i \mu_i)^2}{\sum_i \mu_i^2} \geq n - \mathrm{K}^2. \tag{2.1}$$

c) Esistono due costanti positive A e B tali che

$$0 < A \leq \sum_i \mu_i(x,t) \leq B, \qquad \frac{2A}{A+B} > \mathrm{K}. \tag{2.2}$$

Poniamo

$$\beta = \frac{(\sum_i \mu_i)^2}{\sum_i \mu_i^2}, \; \gamma = \sum_i \mu_i, \; \alpha = \frac{\beta}{\gamma}.$$

Le funzioni $\alpha, \beta, \gamma \in L^\infty(Q)$ e sono strettamente positive.

LEMMA 2.I. *Se valgono le ipotesi* a) b) c) *allora*

$$\sup_Q \left\{ n - \beta + \left[\frac{\beta - (n - \mathrm{K}^2)}{n - \mathrm{K}^2} \right]^2 \frac{4B^2}{(A+B)^2} \right\}^{1/2} \leq \mathrm{K} \tag{2.3}$$

DIM. Per l'ipotesi b) risulta

$$n - \mathrm{K}^2 \leq \beta \leq n.$$

Posto $F(\beta) = n - \beta + \left[\dfrac{\beta - (n - \mathbb{k}^2)}{(n - \mathbb{k}^2)}\right]^2 \dfrac{4B^2}{(A+B)^2}$, $F(\beta)$ è una funzione convessa di β e quindi

$$\sup_{Q} \sqrt{F(\beta)} \leq \max \left\{ \sqrt{F(n)},\ \sqrt{F(n - \mathbb{k}^2)} \right\} = \max \left\{ \frac{2\mathbb{k}^2 B}{(n - \mathbb{k}^2)(A+B)},\ \mathbb{k} \right\}$$

Tenuto conto dell'ipotesi c)

$$\max \left\{ \frac{2\mathbb{k}^2 B}{(n - \mathbb{k}^2)(A+B)},\ \mathbb{k} \right\} = \mathbb{k}$$

e la tesi è provata.

Indichiamo con Eu l'operatore $\sum_{ij} a_{ij}(x,t)\, D_i D_j u$.

TEOREMA 2.I. *Se la matrice* $\{a_{ij}(x,t)\}$ *verifica le condizioni* a) b) c) *allora* $\forall f \in L^2(Q)$ *il problema di* C. D.

$$\left\{ \begin{aligned} & Eu - \frac{\partial u}{\partial t} = f \\ & u \in W_0^{2,1}(Q) \end{aligned} \right. \tag{2.4}$$

ammette una ed una sola soluzione e si ha la maggiorazione

$$\| u \|_{(M)} \leq \frac{A+B}{2A - \mathbb{k}(A+B)} \cdot \frac{1}{\nu} \| f \|_{L^2(Q)} \tag{2.5}$$

$$\text{con } M = (n - \mathbb{k}^2) \frac{A+B}{2AB} .$$

DIM. Se u è soluzione del problema (2.4) allora

$$\Delta u - \frac{n - \mathbb{k}^2}{\gamma} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha f + (\Delta - \alpha E) u + \left(\alpha - \frac{n - \mathbb{k}^2}{\gamma} \right) \frac{\partial u}{\partial t}$$

e quindi

$$u = \left(\Delta - \frac{n - \mathbb{K}^2}{\gamma} \frac{\partial}{\partial t}\right)^{-1} (\alpha f) +$$

$$+ \left(\Delta - \frac{n - \mathbb{K}^2}{\gamma} \frac{\partial}{\partial t}\right)^{-1} \left[(\Delta - \alpha E)\, u + \frac{\beta - (n - \mathbb{K}^2)}{\gamma} \frac{\partial u}{\partial t}\right] = \varphi(u).$$

Sappiamo, per il teorema 1.I, che $\left(\Delta - \dfrac{n - \mathbb{K}^2}{\gamma} \dfrac{\partial}{\partial t}\right)^{-1}$ è un isomorfismo di $L^2(Q)$ su $W_0^{2,1}(Q)$ pertanto φ applica $W_0^{2,1}(Q)$ in $W_0^{2,1}(Q)$.

Dimostriamo che φ è una contrazione qualora si assuma come norma in $W_0^{2,1}(Q)$ la seguente

$$\| u \|_{(M)} \quad \text{con } M = (n - \mathbb{K}^2) \frac{A + B}{2AB}$$

A tal fine osserviamo che

$$0 < \frac{n - \mathbb{K}^2}{B} \leq \frac{n - \mathbb{K}^2}{\gamma} \leq \frac{n - \mathbb{K}^2}{A}$$

quindi, tenuto conto della maggiorazione (1.9), si ha $\forall\, v, w \in W_0^{2,1}(Q)$

$$\| \varphi(v) - \varphi(w) \|_{(M)} \leq$$

$$\leq \frac{A + B}{A} \left\| (\Delta - \alpha E)(v - w) + \frac{\beta - (n - \mathbb{K}^2)}{\gamma} \frac{\partial (v - w)}{\partial t} \right\|_{L^2(Q)} =$$

$$= \frac{A + B}{2A} \left\{ \int_Q \left[\sum_{ij} (\delta_{ij} - \alpha a_{ij}) D_i D_j (v - w) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\beta - (n - \mathbb{K}^2)}{M\gamma} M \frac{\partial (v - w)}{\partial t} \right]^2 dx\, dt \right\}^{1/2} \leq$$

$$\leq \frac{A + B}{2A} \left\{ \int_Q \left(\sum_{ij} (\delta_{ij} - \alpha a_{ij})^2 + \left[\frac{\beta (n - \mathbb{K}^2)}{M\gamma}\right]^2 \right) . \right.$$

$$\cdot\left(\sum_{ij}(D_i D_j(v-w))^2 + M^2\left(\frac{\partial(v-w)}{\partial t}\right)^2\right) dx\, dt\Bigg\}^{1/2} \leq$$

$$\leq \frac{A+B}{2A}\left\{\int_Q F(\beta)\left[\sum_{ij}(D_i D_j(v-w))^2 + M^2\left(\frac{\partial(v-w)}{\partial t}\right)^2\right] dx\, dt\right\}^{1/2} \leq$$

$$\leq \frac{A+B}{A}\sup_Q \sqrt{F(\beta)}\cdot \| v-w \|_{(M)}.$$

In virtù del lemma 2.I e dell'ipotesi c) è

$$\frac{A+B}{2A}\sup_Q \sqrt{F(\beta)} \leq \mathbb{k}\,\frac{A+B}{2A} < 1$$

quindi φ è una contrazione. Quindi esiste una e una sola $u \in W_0^{2,1}(Q)$ tale che $u = \varphi(u)$. Ciò equivale a dire che il problema (2.4) ha $\forall f \in L^2(Q)$ una e una sola soluzione. Per la soluzione u si ottiene la seguente maggiorazione

$$\| u \|_{(M)} = \| \varphi(u) \|_{(M)} \leq \frac{A+B}{2A}\| \alpha f \|_{L^2(Q)} + \frac{A+B}{2A}\mathbb{k}\, \| u \|_{(M)}$$

da cui

$$\| u \|_{(M)} \leq \frac{A+B}{2A - \mathbb{k}(A+B)}\| f\alpha \|_{L^2(Q)}.$$

Da questa maggiorazione segue la (2.5) tenuto conto che [3])

$$\alpha(x,t) \leq \frac{1}{\nu} \quad \text{in } Q.$$

---

[3]) La condizione a) assicura che $\mu_i(x,t) \geq \nu$ $(i = 1, \dots, n)$ $(x,t) \in Q$. Quindi il vettore $\mu(x,t) = (\mu_1, \dots, \mu_2)$ non è interno alla sfera di centro $\left(\frac{\nu}{2}, \dots, \frac{\nu}{2}\right)$ e raggio $\frac{\nu}{2}\sqrt{n}$. Ciò significa appunto che

$$\frac{\sum_i \mu_i}{\sum_i \mu_i^2} \leq \frac{1}{\nu}.$$

3. Le condizioni b) e c) enunciate nel paragrafo precedente hanno una immediata interpretazione geometrica: Poniamo $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ e $\Lambda = \{\mu : \mu_1 > 0, \dots, \mu_n > 0\}$. La condizioni b) equivale a imporre che esista un cono rotondo $\mathcal{C}$ di vertice 0, di asse $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n$, strettamente contenuto in Λ, tale che $\mu \in \mathcal{C}$ per quasi tutti i punti $(x, t) \in Q$.

L'apertura di questo cono è funzione del parametro $\mathbb{k}$, infatti detto v il vettore unitario $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ si ha

$$\frac{(\mu \mid v)}{\| \mu \|} > 1 - \frac{\mathbb{k}^2}{n} \qquad \forall \mu \in \mathcal{C}.$$

Per $\mathbb{k} = 0$ il cono $\mathcal{C}$ si riduce alla semiretta $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n > 0$ e per $\mathbb{k} = 1$ il cono $\mathcal{C}$ è tangente agli iperpiani coordinati.

Per $n = 2$ la condizione b) è sempre verificata. Dalla condizione di ellitticità

$$\nu \mid \lambda \mid^2 \leq \sum_{ij} a_{ij} \lambda_i \lambda_j \leq M \mid \lambda \mid^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}^2$$

si ottiene facilmente questa valutazione per $\mathbb{k}$

$$0 \leq \mathbb{k} \leq \frac{M - \nu}{\sqrt{M^2 + \nu^2}} \leq \left(1 - \frac{\nu}{M}\right).$$

La condizione c) esprime il fatto che per quasi tutti i punti $(x, t) \in Q$ il vettore $\mu(x, t)$ appartiene ad una striscia limitata da due iperpiani

$$\sum_i \mu_i = A \qquad \text{e} \qquad \sum_i \mu_i = B$$

« abbastanza vicini ». L'abbastanza vicino dipende del parametro $\mathbb{k}$; da (2.2) si ricava infatti che

$$0 \leq B - A < 2 \frac{1 - \mathbb{k}}{2 - \mathbb{k}} B. \tag{3.1}$$

Questa condizione è certamente verificata, qualunque siano A e B, se $\mathbb{k} = 0$. Questo è in accordo con il teorema 1.II.

La condizione (3.1) è anche verificata nel caso in cui, al variare di (x, t) in Q, il vettore $\mu(x, t)$ appartiene sempre ad un certo iperpiano $\sum_i \mu_i = \text{cost.} > 0$.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. CAMPANATO - *Equazioni paraboliche del secondo ordine e spazi* $\mathcal{L}^{2,\theta}(\Omega,\delta)$ - Ann. di Matem. Vol. LXXIII (1966).

[2] S. CAMPANATO - *Un risultato relativo ad equazioni ellittiche del secondo ordine di tipo non variazionale* - Ann. Scuola N. S. di Pisa, vol. XXI (1967).

[3] E. GAGLIARDO - *Problema al contorno per equazioni lineari di tipo parabolico in n variabili* - Ricerche di Matem. vol. V (1956).

[4] F. GAGLIARDO - *Teoremi di esistenza e di unicità per problemi al contorno relativi ad equazioni paraboliche lineari e quasi lineari in n variabili* - Ricerche di Matem. vol. V (1956).

[5] F. GUGLIELMINO - *Sulle equazioni paraboliche del secondo ordine di tipo non variazionale* - Ann. di Matem. vol. LXV (1964).

[6] F. GUGLIELMINO - *Nuovi contributi allo studio delle equazioni paraboliche del secondo ordine di tipo non variazionale* - Ricerche di Matem. vol. XIV (1965).

[7] A. M. IL'IN, A. S. KALASHNIKOV, O. A. OLEINIK - *Linear equations of the second order of parabolic type* - Russian Mathematical Surveys 17 (1962).

[8] J. L. LIONS - *Équations différentielles opérationelles dans les espaces de Hilbert* - Ciclo di Lezioni su Equaz. diff. astratte (C.I.M.E) 1963.

[9] G. TALENTI - *Sopra una classe di equazioni ellittiche a coeffiicienti misurabili* - Ann. di Matem. vol. LXIX (1965).

[10] E. ASTESIANO - *Operatori parabolici estremanti* - Boll. U.M.I. n. 3 (1968).

[11] A. FRIEDMANN - *Partial differential equations of parabolic type* - Prentice Hall (1964).

Manoscritto pervenuto in redazione il 27-4-1968