

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

PAUL MUSTATÀ

Un théorème sur le système Navier-Stokes linéarisé

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 41 (1968), p. 146-152

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1968__41__146_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

UN THÉORÈME SUR LE SYSTÈME NAVIER-STOKES LINÉARISÉ

PAUL MUSTATĂ *)

Les solutions classiques du système Navier-Stokes linéarisé ont été étudiées depuis longtemps [4], [5]. Il semble toutefois que des analogues des théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur [2], [3], [8] n'ont pas été encore mis en évidence (voir les ouvrages de synthèse [1], [6], [7]). Le but de cette note est d'indiquer un tel analogue. En effet on démontre que si le couple (u, p) , $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une solution régulière du système

$$(1) \quad \Delta u_j - \frac{\partial u_j}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial x_j}$$
$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad \text{où } \Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

telle que $\operatorname{div} u(x, 0) = 0$, $\Delta u(x, 0) = 0$ et u satisfait à une condition de limitation d'ordre exponentiel 2, alors

$$\Delta u(x, t) = 0.$$

On montre de même la nécessité d'une telle condition de limitation afin que cette propriété reste valide.

*) Indirizzo dell'A.: Institut de Mathématique Académie de R. S. Roumanie, Bucarest, Roumanie Str. M. Eminescu 47.

Soient $\Omega_T = R_n \times [0, T]$ et $\overset{\circ}{\Omega}_T = R_n \times (0, t)$. On considère le système (1). On dit que le couple (u, p) , $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ forme une solution régulière de (1) dans Ω_T si u_i ($i = 1, 2, \dots, n$) sont des fonctions réelles définies et continues sur Ω_T , p est une fonction réelle définie et continue dans $\overset{\circ}{\Omega}_T$, les dérivées, qui figurent dans (1) existent, sont continues dans $\overset{\circ}{\Omega}_T$ et satisfont au système (1) dans $\overset{\circ}{\Omega}_T$.

Nous convenons de dire que $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, où les fonctions u_i ($i = 1, 2, \dots, n$) sont définies dans Ω_T est de classe I_α (α étant un nombre positif) dans Ω_T si à chaque nombre $T' \in (0, T)$ correspond un nombre $K \geq 0$, tel que

$$(2) \quad \int_0^{T'} \int_{R_n} |u_j(\xi, \tau)| \exp(-K|\xi|^\alpha) d\xi d\tau < \infty \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Nous allons démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME. Soit (u, p) une solution régulière de (1) dans Ω_T telle que u est de classe I_2 dans Ω_T . On suppose que les fonctions $u_j(x, 0)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) sont continûment différentiables de second ordre et satisfont aux relations

$$i) \quad \Delta u_j(x, 0) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

$$ii) \quad \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_j}{\partial x_j}(x, 0) = 0.$$

Alors pour chaque $t \in (0, T)$ on a

$$\Delta u_j(x, t) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Pour chaque $r > 0$, nous désignerons per φ_r une fonction sur R_n indéfiniment différentiable égale à 1 sur $\{x \mid |x| < r\}$, égale à 0 sur $\{x \mid |x| > r + 1\}$ et telle que

$$(3) \quad |\varphi_r| + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_i} \right| + \sum_{i,j=1}^n \left| \frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial x_i \partial x_j} \right| \leq C$$

où C est une constante indépendante de r .

Si nous désignerons

$$L = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial^2 \xi_j^2} - \frac{\partial}{\partial \tau}, L^* = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial \xi_j^2} + \frac{\partial}{\partial \tau}$$

on a

$$(4) \quad v L w - w L v = \sum_{j=1}^n \frac{\partial Q_j}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial \tau} (v \cdot w)$$

où

$$Q_j = v \frac{\partial w}{\partial \xi_j} - w \frac{\partial v}{\partial \xi_j}.$$

Soit $(x, t) \in \Omega_T$. Posons dans (4)

$$w(\xi, \tau) = u_j(\xi, \tau), v(\xi, \tau) = \varphi_r(x - \xi) \Gamma(x - \xi, t - \tau)$$

où pour $x \in R_n, t > 0$ on a

$$\Gamma(x, t) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)$$

et nous intégrons la nouvelle relation dans le domaine

$$\Delta_\varepsilon = \{(\xi, \tau) \mid |x - \xi| < r + 1, 0 < \tau < t - \varepsilon\}.$$

En faisant $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient, tenant compte de la définition de φ_r du fait que Γ est la solution fondamentale de l'équation de la chaleur et du fait que (u, p) satisfait le système (1), que

$$u_j(x, t) = h_j^r(x, t) - g_j^r(x, t) + f_j^r(x, t) \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

où

$$h_j^r(x, t) = \int_0^t \int_{R_n} u_j(\xi, \tau) L^* (\Gamma(x - \xi, t - \tau) \varphi_r(x - \xi)) d\xi d\tau,$$

$$g_j^r(x, t) = \int_0^t \int_{R_n} \Gamma(x - \xi, t - \tau) \varphi_r(x - \xi) \frac{\partial p}{\partial \xi_j}(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

$$f_j^r(x, t) = \int_{R_n} \Gamma(x - \xi, t) \varphi_r(x - \xi) u_j(\xi, 0) d\xi.$$

On a

$$g_j^r(x, t) = - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial \xi_j} (\Gamma(x - \xi, t - \tau) \varphi_r(x - \xi)) p(\xi, \tau) d\xi d\tau =$$

$$= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_j} (\Gamma(x - \xi, t - \tau) \varphi_r(x - \xi)) p(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

Si nous posons

$$g^r(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - \xi, t - \tau) \varphi_r(x - \xi) p(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

on a comme on sait de la théorie du potentiel de volume que

$$g_j^r(x, t) = \frac{\partial g^r}{\partial x_j}(x, t) \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

On peut vérifier aisément en intégrant par parties que

$$\frac{\partial f_j^r}{\partial x_j}(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u_j}{\partial \xi_j}(\xi, 0) \varphi_r(x - \xi) \Gamma(x - \xi, t - \tau) d\xi \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

$$(5) \quad \Delta f_j^r(x, t) = 0$$

et utilisant ii) que

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j^r}{\partial x_j} = 0.$$

Notons que les fonctions h_j^r sont indéfiniment différentiables puisque $L^* \Gamma(x - \xi, t - \tau) = 0$ et $\varphi_r(x - \xi) = 1$ sur $\{|\xi| | x - \xi| < r\}$.

On a

$$0 = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_j}{\partial x_j}(x, t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial h_j^r}{\partial x_j}(x, t) - \Delta g^r(x, t)$$

$$\Delta g^r(x, t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial h_j^r}{\partial x_j}(x, t).$$

Il résulte de (5) et de la relation précédente que

$$(6) \quad \Delta u_i(x, t) = \Delta h_i^r(x, t) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 h_j^r}{\partial x_i \partial x_j}(x, t) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Pour $r > 1$, on a, utilisant (3), l'évaluation élémentaire

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 h_j^r}{\partial x_i \partial x_l} \right| &= c' \int_0^t \int_{r-\xi < \tau < r+1} |u(\xi, \tau)| \sum_{k=0}^4 (t-r)^{-\frac{n+k}{2}} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right) d\xi d\tau \leq \\ &\leq \frac{c''}{r^n} \int_t \int_{r-\xi < \tau < r+1} |u(\xi, \tau)| \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{8(t-\tau)}\right) d\xi d\tau \quad (i, j, l = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

où c', c'' sont des constantes.

Soient $T' \in (0, T)$, K et M des nombres positifs tels que

$$\int_0^{T'} \int_{\mathbb{R}_n} |u_j(\xi, \tau)| \exp(-K|\xi|^2) d\xi d\tau \leq M < \infty \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

(l'existence de K et M est assurée puisque u est de classe I_2).

Pour chaque $t \in (0, T')$, $t \leq \delta < \frac{1}{8k}$, on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 h_j^k}{\partial x_i \partial x_l}(x, t) \right| &\leq \\ &\leq \frac{c''}{r^n} \sup_{\xi \in \mathbb{R}_n} \exp\left(K|\xi|^2 - \frac{|x-\xi|^2}{8\delta}\right) \int_0^t \int_{\mathbb{R}_n} |u(\xi, \tau)| \exp(-K|\xi|^2) d\xi d\tau \leq \\ &\leq \frac{c''' M}{r^n} \exp(c_0 |x|^2). \end{aligned}$$

Faisant tendre maintenant r vers l'infini dans (6), on obtient pour chaque $t \in (0, T')$, $t < \frac{1}{8k}$ que

$$\Delta u_j(x, t) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

En appliquant le même procédé successivement pour les couches $R_n \times \left(\frac{k}{16k}, \frac{k+2}{16k} \right)$ ($k = 1, 2, \dots$), après un nombre fini de pas on peut établir pour chaque $t \in (0, T')$ la relation

$$\Delta u_j(x, t) = 0.$$

REMARQUES 1. La condition de limitation n'est pas superflue. En effet, on sait que pour chaque $\varepsilon > 0$ on peut construire une fonction v sur $R \times [0, T)$ telle que

$$v \neq 0, v(x, 0) = 0, v \in I_{2+\varepsilon}(R \times (0, T)),$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad \text{dans } R \times (0, T).$$

Evidemment v n'est pas de classe I_2 et

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \neq 0.$$

Considérons les fonctions u_i : ($i = 1, 2, \dots, n$) sur $R_n \times [0, T)$

$$u_i(x, t) = v(x_{i+1}, t) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

$$u_n(x, t) = v(x_1, t).$$

On voit tout de suite que le couple (u, p) où $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ et $p = 0$ satisfait au système (1), les conditions i), ii) et que u est de classe $I_{2+\varepsilon}$ dans Ω_T mais $\Delta u_k \neq 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

2. Soit (u, p) , $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ où $u_1(x, t) = t$, $u_j(x, t) = 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$) et $p(x, t) = -x_1$. On a que (u, p) est une solution de (1), $u_j(x, 0) = 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$) et que u est de classe I_2 dans Ω_T . Cet exemple montre que les conditions $u(x, 0) = 0$ et u est de classe I_2 dans Ω_T ne sont pas suffisantes pour assurer l'unicité d'une solution de (1) dans Ω_T .

BIBLIOGRAPHIQUE

- [1] LADYZENSKAYA (O. A.): *Problèmes mathématiques de la dynamique des fluides visqueux incompressible*. Moscou, 1961.
- [2] LADYZENSKAYA (O. A.): *Sur l'unicité de solutions du problème de Cauchy pour l'équation linéaire parabolique*. Math Sbornik, 1950, **27**, p. 175-184.
- [3] NICOLESCU (MIRON): *Sur l'équation de la chaleur*. Commentarii Helv. 1937, **10** p. 3-17.
- [4] ODQVIST (F. K. G.): *Über die Randwertenaufgaben der Hydrodynamik zäher Flüssigkeiten*. Math. Zeitschr, 1930, **32**, p. 329-385.
- [5] OSENN (C. W.): *Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik*. Leipzig, 1927.
- [6] PRODI (G): *Résultats récents et problèmes anciens dans la théorie des équations de Navier Stokes. Les équations aux dérivées partielles* (Coll. Intern. C. N. R. S., No. 117 Paris 1963), p. 181-196.
- [7] SERRIN (J): *The initial value problem for the Navier-Stokes eq., Non linear problems* (Proc. Symp. Univ. Wisconsin 1962, p. 69-98.
- [8] TIHONOV (A. N.): *Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur*, Math. Sbornik 1935 **42**, p. 199-216.

Manoscritto pervenuto in redazione il 5-2-68