RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

FRANCO CHERSI

Sul prolungamento d'una misura definita su un prodotto infinito-II

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 41 (1968), p. 139-145
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1968__41__139_0>

SUL PROLUNGAMENTO D'UNA MISURA DEFINITA SU UN PRODOTTO INFINITO-II

FRANCO CHERSI *)

SUMMARY - This is the sequel to a note having the same title (see [2]). In section 1, a necessary and sufficient condition is given (see (1.2) and (1.3)) for the extension of μ to a unique measure on the σ-algebra $\sigma(\mathcal{F})$, which coincides with μ^* on $\mathcal{F}^{\cup}$; in section 2, two examples are given, of which the second has some connection with the « general product measures » by Elliot and Morse (see [3]); in the last section a counter-example by E. De Giorgi is reported.

Sia T un insieme non numerabile, e per ogni $t \in T$ sia $(X_t, \mathcal{A}_t)$ uno spazio misurabile; siano Ω l'insieme prodotto degli X_t ed $\mathcal{A}$ la σ-algebra prodotto delle σ-algebre $\mathcal{A}_t$. Diciamo $\mathcal{F}$ la classe delle parti di Ω della forma $\prod_{t \in T} A_t$, con $A_t \in \mathcal{A}_t$, che chiameremo « tubi », ed $\mathcal{F}^{\cup}$ la classe delle loro unioni finite. Un tubo $F = \prod_{t \in T} A_t$ non appartiene ad $\mathcal{A}$, a meno che sia $A_t = X_t$ per « quasi tutti » i valori di t (cioè escluso al più un insieme numerabile di valori [1]). La presente nota si occupa del problema seguente: assegnata una misura finita μ su $(\Omega, \mathcal{A})$, ed indicata con μ^* la misura esterna da essa indotta, esiste un prolungamento di μ alla σ-algebra $\sigma(\mathcal{F})$ (ossia generata da $\mathcal{F}$), che coincida con μ^* su $\mathcal{F}^{\cup}$? Nel paragrafo 1

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca del Comitato per la Matematica del C. N. R..

Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica, Università, Pisa.

[1]) È ben noto che difficoltà di questo tipo si presentano nella teoria dei processi stocastici.

si dà una condizione necessaria e sufficiente affinchè ciò avvenga; nel paragrafo 2 si danno due esempi di casi in cui la condizione è verificata; nel paragrafo 3 si riporta un controesempio, dovuto ad E. De Giorgi e non pubblicato altrove. Per le notazioni ed i risultati qui presupposti, rimando alla precedente nota con lo stesso titolo (v. [2]).

Ringrazio i professori E. De Giorgi e G. Letta per utilissimi consigli.

1. Se $\mathcal{L}$ è un reticolo di parti d'un insieme, e λ una funzione reale definita su $\mathcal{L}$, crescente[2]), con $\lambda(\emptyset)=0$, diremo (seguendo Barbuti [1], pag. 148) che λ è *regolare internamente* se, per ogni coppia A, B di elementi di $\mathcal{L}$ con $A \subset B$, risulta

$$\lambda(B)-\lambda(A)=\sup\{\lambda(E): B-A \supset E \in \mathcal{L}\}.$$

(1.1) PROPOSIZIONE. Se μ è una misura finita su $(\Omega, \mathcal{A})$, detta λ la restrizione di μ^* al reticolo $\mathcal{F}^{\cup}$, λ è regolare internamente.

DIMOSTRAZIONE. Poichè λ è anche finita e modulare (v. [2], teor. 1), basta dimostrare che, per ogni $H \in \mathcal{F}^{\cup}$, risulta

$$\lambda(H)+\sup\{\lambda(F): F \in \mathcal{F}^{\cup},\ F \subset H'\} \geq \lambda(\Omega),$$

dove H' è il complementare di H in Ω e $\lambda(\Omega)=\mu(\Omega)$. (Vedi Letta [5], (2.5)).

Sia $H=\bigcup_{i \in I} E_i$, dove I è finito ed $E_i=\bigcap_{t \in T} pr_t^{-1}(A_{t,i})$, $A_{t,i} \in \mathcal{A}_t$, è un tubo non vuoto. Sia S una parte numerabile di T tale che sia $\lambda(H)=\mu(C_S(H))$ ([2], lemma 3).

Poichè $C_S(H)=\bigcup_{i \in I} C_S(E_i)$ e $C_S(E_i)=\bigcap_{t \in S} pr_t^{-1}(A_{t,i})$, il complementare di $C_S(H)$ in Ω è $(C_S(H))'=\bigcap_{i \in I}(C_S(E_i))'=$ $=\bigcap_{i \in I} \bigcup_{t \in S} pr_t^{-1}(A'_{t,i})=\bigcup_{\gamma \in S^I} \bigcap_{i \in I} pr_{\gamma(i)}^{-1}(A'_{\gamma(i),i})$ (dove $A'_{t,i}$ è il complementare di $A_{t,i}$ in X_t). Poichè $(C_S(H))' \in \mathcal{A}$ e μ è continua dal basso, per ogni $\varepsilon>0$ esiste una parte finita $\Gamma=\Gamma(\varepsilon)$ di S^I tale che, posto $F=\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \bigcap_{i \in I} pr_{\gamma(i)}^{-1}(A'_{\gamma(i),i})$, risulti $\mu(F)>\mu((C_S(H))')-\varepsilon$,

[2]) In senso debole.

ossia $\mu(F) > \mu(\Omega) - \lambda(H) - \varepsilon$, cioè $\lambda(H) + \lambda(F) > \lambda(\Omega) - \varepsilon$ (si noti che $F \in \mathcal{A} \cap \mathcal{F}^{\cup}$, quindi $\mu(F) = \lambda(F)$). Ora $H \subset C_S(H)$ implica $F \subset (C_S(H))' \subset H'$, donde la tesi.

(1.2) **Teorema.** Se μ è una misura finita su $(\Omega, \mathcal{A})$, sono equivalenti le seguenti condizioni:

(*a*) Esiste una, ed una sola, misura ν sulla σ-algebra $\sigma(\mathcal{F})$, la quale coincida con μ^* su $\mathcal{F}^{\cup}$.

(*b*) Per ogni successione decrescente [3] F_n di elementi di $\mathcal{F}^{\cup}$, tale che sia $\bigcap_n F_n = \emptyset$, risulta $\lim_n \mu^*(F_n) = 0$.

Dimostrazione. È ovvio che (*a*) implica (*b*). Che (*b*) implichi (*a*) deriva dal teorema III di Barbuti [1] (pag. 152), tenendo conto del fatto che μ^* è modulare su $\mathcal{F}^{\cup}$ e della proposizione precedente [4].

(1.3) **Osservazione.** Se è verificata la condizione (*b*), la misura ν è un prolungamento di μ. Infatti, detta $\mathcal{R}$ la classe dei rettangoli misurabili di Ω (nel senso di Halmos [4], pag. 154), risulta $\mathcal{R} \subset \mathcal{F}$, e quindi $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{R}) \subset \sigma(\mathcal{F})$, con inclusione propria; sull'anello $\mathcal{R}^{\cup}$ è $\nu = \mu^* = \mu$, quindi $\nu = \mu$ su $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{R}^{\cup})$.

2. In questo paragrafo diamo due esempi di casi, molto particolari ma non banali, in cui la condizione (*b*) è verificata.

(2.1) **Esempio I.** Per ogni t sia X_t un insieme finito, ed $\mathcal{A}_t$ l'algebra (e σ-algebra) di tutte le parti di X_t; essendo X_t finito, $\mathcal{A}_t$ è anche una classe compatta (vedi per es. Pfanzagl e Pierlo [6], (1.1)). È facile provare che, in tal caso, $\mathcal{F}$ è una classe compatta di parti di Ω; quindi anche $\mathcal{F}^{\cup}$ lo è (v. [6], (1.4)). In questo caso, qualunque sia la misura μ su $(\Omega, \mathcal{A})$, μ^* verifica la condizione (*b*).

(2.2) **Lemma.** Sia μ una misura su $(\Omega, \mathcal{A})$ con $\mu(\Omega) = 1$. La classe degli insiemi $E \in \mathcal{F}$ con $\mu^*(E) = 1$ è stabile per l'intersezione numerabile.

---

[3]) In senso debole.

[4]) Si veda anche [5], prop. (3.8) e (2.7).

DIMOSTRAZIONE. Se $E = \bigcap_{t \in T} pr_t^{-1}(A_t)$, con $A_t \in \mathscr{A}_t$, $\mu^*(E) = 1$ equivale a $\mu(pr_t^{-1}(A_t)) = 1$ per ogni $t \in T$ (questo deriva, in modo ovvio, dal lemma 3 di [2], per es.). Consideriamo una successione $E_n = \bigcap_{t \in T} pr_t^{-1}(A_{n,t})$ con $\mu^*(E_n) = 1$; per ogni $t \in T$, l'insieme $pr_t^{-1}(\bigcap_n A_{n,t}) = \bigcap_n pr_t^{-1}(A_{n,t})$ ha misura 1; essendo $\bigcap_n E_n = \bigcap_{t \in T} pr_t^{-1}(\bigcap_n A_{n,t})$, ne segue $\mu^*(\bigcap_n E_n) = 1$.

(2.3) LEMMA. Se F_n è una successione decrescente di elementi di $\mathcal{F}^{\cup}$, con $\mu^*(F_n) > 0$ per ogni n ed $\bigcap_n F_n = \emptyset$, esiste una successione $G_n \in \mathcal{F}^{\cup}$ tale che:

1) $G_n = \bigcup_k G_{n,k}$ con $G_{n,k} \in \mathcal{F}$ e $\mu^*(G_{n,k}) > 0$ per ogni (n,k); 2) $\mu^*(G_n) = \mu^*(F_n)$; 3) G_n è decrescente; 4) $\bigcap_n G_n = \emptyset$.

DIMOSTRAZIONE. Se è $F_{n+1} \subset F_n = \bigcup_k F_{n,k}$, con $F_{n,k} \in \mathcal{F}$, possiamo rappresentare F_{n+1} come $\bigcup_l F_{n+1,l}$ ($F_{n+1,l} \in \mathcal{F}$) in modo che ciascun $F_{n+1,l}$ sia contenuto in almeno uno degli $F_{n,k}$, perchè $F_{n+1} = F_{n+1} \cap F_n$. Supposto ciò per ogni n, sia $K_n = \{k : \mu^*(F_{n,k}) > 0\}$ e $G_n = \bigcup_{k \in K_n} F_{n,k}$. Sono ovvie le proprietà 1), 2) e 4); per la 3), se $G_{n+1} = \bigcup_{l \in K_{n+1}} F_{n+1,l}$, ciascun $F_{n+1,l}$ è contenuto in un $F_{n,k}$ con $\mu^*(F_{n,k}) > 0$, da cui $G_{n+1} \subset G_n$.

(2.4) PROPOSIZIONE. Sia μ come in (2.2). La condizione seguente:

(c) « $E \in \mathcal{F}$, $\mu^*(E) > 0 \Longrightarrow \{t \in T : \mu(C_t(E)) < 1\}$ è numerabile »

implica la (b).

DIMOSTRAZIONE. Sia F_n una successione decrescente di elementi di $\mathcal{F}^{\cup}$, con $\bigcap_n F_n = \emptyset$. Se, per $n \geq \bar{n}$, è $\mu^*(F_n) = 0$, la (b) è verificata; se invece per ogni n è $\mu^*(F_n) > 0$, grazie al lemma (2.3) possiamo supporre che sia $F_n = \bigcup_k F_{n,k}$ con $F_{n,k} \in \mathcal{F}$ e $\mu^*(F_{n,k}) > 0$. Per la (c), esiste una parte numerabile S di T tale che sia $\mu(C_t(F_{n,k})) = 1$ per ogni $t \in T - S$ ed ogni (n,k). Posto $G_{n,k} = C_{T-S}(F_{n,k})$, risulta $\mu^*(G_{n,k}) = 1$, $C_S(F_{n,k}) \cap G_{n,k} = F_{n,k}$ per ogni (n,k); se si pone $G = \bigcap_{n,k} G_{n,k}$, si ottiene $\mu^*(G) = 1$ (lemma (2.2)) e $C_S(F_{n,k}) \cap G = C_S(F_{n,k}) \cap G_{n,k} \cap G = F_{n,k} \cap G$. Allora, per ogni n,

$C_S(F_n) \cap G = \bigcup_k (C_S(F_{n,k}) \cap G) = \bigcup_k (F_{n,k} \cap G) = F_n \cap G$. Quindi $\bigcap_n C_S(F_n) \cap G = \emptyset$; ma, essendo $\mu^*(G) = 1$, ciò implica $\mu(\bigcap_n C_S(F_n)) = 0$ (v. [4], 17.A), ossia $\lim_n \mu(C_S(F_n)) = 0$ e dunque $\lim_n \mu^*(F_n) = 0$.

(2.5) Esempio II. Per ogni t sia μ_t una misura su $(X_t, \mathcal{A}_t)$ con $\mu_t(X_t) = 1$, e sia μ la misura prodotto delle μ_t (vedi per es. [4], 38.2). Allora μ verifica la condizione (c) e quindi la (b).

Dimostrazione. Sia $E \in \mathcal{F}$ con $\mu^*(E) > 0$; esiste S_1, parte numerabile di T, tale che, per ogni parte numerabile S di T contenente S_1, sia $\mu(C_S(E)) = \mu(C_{S_1}(E)) = \mu^*(E)$ (v. [2], lemma 3). Se l'insieme $V = \{t \in T : \mu(C_t(E)) < 1\}$ non fosse numerabile, esisterebbe in esso un $t \notin S_1$; posto $S = S_1 \cup \{t\}$ si avrebbe $C_S(E) = C_t(E) \cap C_{S_1}(E)$ e $\mu(C_S(E)) = \mu(C_t(E)) \cdot \mu(C_{S_1}(E)) < \mu(C_{S_1}(E))$, assurdo.

Anzi, da quanto precede risulta che è $V \subset S_1$; è facile vedere che V è proprio il minimo degli S_1.

(2.6) Osservazioni. I) La condizione (c) assicura l'esistenza del prolungamento ν; però (c) implica che, per $F \in \mathcal{F}$, può essere $\nu(F) > 0$ solo se $\mu(C_t(F)) = 1$ per «quasi tutti» i valori di t. Nel caso dell'esempio II, ciò significa: se $F = \prod_{t \in T} A_t$, con $A_t \in \mathcal{A}_t$, può essere $\nu(F) > 0$ solo se $\mu_t(A_t) = 1$ per quasi tutti i t. Tuttavia questa circostanza non rende banale il prolungamento, nel senso che la σ-algebra $\sigma(\mathcal{F})$ non si raggiunge col completamento $(\overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ di $(\mathcal{A}, \mu)$. Infatti sia $F = \bigcap_{t \in T} pr_t^{-1}(A_t)$ un tubo «stretto», cioè $A_t \neq X_t$ per ogni $t \in U$ non numerabile, ma con $\mu^*(F) > 0$ (per es., nel caso della misura prodotto si abbia $\mu_t(A_t) = 1$ per ogni t). Se fosse $F \in \overline{\mathcal{A}}$, sarebbe $F = A \cup N$ con $A \in \mathcal{A}$ ed $N \subset Z \in \mathcal{A}$, $\mu(Z) = 0$ (v. [4], 13.B); allora $A \subset F$; ma l'unico elemento di $\mathcal{A}$ contenuto in F è l'insieme vuoto, quindi $F = N$ con $\mu^*(N) = 0$, contro l'ipotesi.

II) Quando μ^* verifica la condizione (b), ogni insieme $F = \prod_{t \in T} A_t$, con $A_t \in \mathcal{A}_t$, risulta dunque ν-misurabile. Se μ è come nell'esempio II, da $\nu(F) = \mu^*(F) = \mu(C_S(F))$ (con S opportuna parte numerabile di T) segue $\nu(F) = \prod_{t \in S} \mu_t(A_t) = \prod_{t \in T} \mu_t(A_t)$ (se $\mu^*(F) > 0$, $\mu_t(A_t) = 1$ per $t \notin S$; vedi (2.5)).

Quindi, nel caso della misura prodotto, abbiamo trovato, per altra via, un risultato analogo a quelli di Elliott e Morse in [3].

3. Se μ è una misura finita su $(\Omega, \mathcal{A})$, μ^* sulla classe $\mathcal{F}$ è in ogni caso continua dall'alto in $\emptyset$ [5]; ma può mancare la continuità dall'alto su $\mathcal{F}^{\cup}$, cioè la condizione (b), come mostra il seguente esempio suggerito da E. De Giorgi.

Siano: $T = [0, 1]$, $X_t = X = [0, 1]$, $\mathcal{A}_t = \mathcal{B} = \sigma$-algebra di Borel di X, per ogni $t \in T$; $(\Omega, \mathcal{A}) = (X^T, \mathcal{B}^T)$. Sia f l'applicazione di X in Ω che ad $x \in X$ associa la funzione costante $\omega_x : T \to X$, $\omega_x(t) = x$; sia $E = f(X)$. Si ha $f^{-1}(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$: infatti, sia $B \in \mathcal{B}$; fissato comunque $t \in T$, consideriamo $R = pr_t^{-1}(B) \in \mathcal{A} : f^{-1}(R) = B$; quindi $f^{-1}(\mathcal{A})$ è una σ-algebra che contiene $\mathcal{B}$; d'altronde $\mathcal{B} \supset \{ f^{-1}(pr_t^{-1}(B)) : t \in T, B \in \mathcal{B} \}$, e quindi $\mathcal{B} \supset \sigma(f^{-1}\{pr_t^{-1}(B)\}) = f^{-1}(\sigma\{pr_t^{-1}(B)\}) = f^{-1}(\mathcal{A})$. Detta l la misura di Lebesgue su $(X, \mathcal{B})$, sia μ la misura su $(\Omega, \mathcal{A})$ definita da $\mu(A) = l(f^{-1}(A))$ per $A \in \mathcal{A}$; allora μ^* non soddisfa la condizione (b).

Infatti, per n, k interi con $n \geq 1$ ed $1 \leq k \leq 2^n$, $t \in T$, sia $A_{n,k,t}$ il boreliano $[(k-1)\,2^{-n}, k\,2^{-n}] - \{t\}$; sia $\prod_{t \in T} A_{n,k,t} = \bigcap_{t \in T} pr_t^{-1}(A_{n,k,t}) = E_{n,k} \in \mathcal{F}$, ed $E_n = \bigcup_{1 \leq k \leq 2^n} E_{n,k} \in \mathcal{F}^{\cup}$. Per ogni n si ha $E_{n+1} \subset E_n$, e $\mu^*(E_n) = \mu(C_S(E_n)) = l(f^{-1}(C_S(E_n)))$ con S parte numerabile di T; ora $f^{-1}(C_S(E_n)) = \bigcup_{1 \leq k \leq 2^n} f^{-1}(C_S(E_{n,k})) = \bigcup_{1 \leq k \leq 2^n} [(k-1)\,2^{-n}, k2^{-n}] - S = [0, 1] - S$, e quindi $\mu^*(E_n) = 1$. Però $\bigcap_{n \in N} E_n = \bigcup_{k \in N^N} \bigcap_{n \in N} E_{n,k(n)} = \emptyset$ (s'intenda $E_{n,k} = \emptyset$ se $k > 2^n$).

---

[5] Sia $E_n \in \mathcal{F}$, $E_n = \bigcap_{t \in T} pr_t^{-1}(A_{n,t})$, $A_{n,t} \in \mathcal{A}_t$, ed $E_{n+1} \subset E_n$. Se $\bigcap_n E_n = \emptyset$, esiste almeno un t tale che $\bigcap_n C_t(E_n) = \emptyset$ e quindi $\lim_n \mu(C_t(E_n)) = 0$; d'altronde $\mu^*(E_n) \leq \mu(C_t(E_n))$.

BIBLIOGRAFIA

[1] BARBUTI U.: « *Teoremi di prolungamento per misure da reticoli d'insiemi* ». Ricerche di Matematica VIII (1959), Napoli, pag. 145-162.

[2] CHERSI F.: « *Sul prolungamento d'una misura definita su un prodotto infinito* ». Rend. Sem. Mat. Padova, XXXIX (1967), pag. 136-143.

[3] ELLIOTT E. O., MORSE A. P.: « *General product measures* ». Trans. Amer. Math. Soc. 110 (1964), pag. 245-283.

[4] HALMOS P. R.: « *Measure Theory* », ed. Van Nostrand 1950 (ristampa 1964).

[5] LETTA G.: « *Teoremi di prolungamento per misure in reticoli algebrici* ». Ricerche di Matematica VIII (1959), Napoli, pag. 300-319.

[6] PFANZAGL J., PIERLO W.: « *Compact Systems of Sets* ». Lecture Notes in Mathematics 16 (1966); ed. Springer-Verlag.

Manoscritto pervenuto in redazione il 16 maggio 1968.