

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

LIVIO REBOLIA

**Riduzione del raggio spettrale per la
stabilizzazione numerica nella soluzione di
sistemi differenziali ordinari**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 40 (1968), p. 311-324

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1968__40__311_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RIDUZIONE DEL RAGGIO SPETTRALE PER LA STABILIZZAZIONE NUMERICA NELLA SOLUZIONE DI SISTEMI DIFFERENZIALI ORDINARI

LIVIO REBOLIA *)

ABSTRACT. — The error propagation in the numerical solution of stable systems of ordinary differential equations having large spectral radius can limit the applicability of standard methods.

In this paper we propose a transformation which changes a wide class of problems into equivalent problems for which multistep and onestep standard methods are stable.

1. Generalità.

Si è più volte osservato (cfr. [1], [2], [3], [4]) che l'integrazione numerica del problema

$$(1.1) \quad y(0) = y_0 \quad dy/dx = f(x, y) \quad y \in D \subset R^n \quad 0 \leq x \leq a,$$

per il quale supporremo verificate le usuali ipotesi per l'esistenza e l'unicità della soluzione, risulta praticamente impossibile se la costante di Lipschitz di $f(x, y)$ rispetto ad y ¹⁾ è troppo grande.

In questo caso, infatti, il fenomeno della instabilità numerica o la considerazione dell'errore di troncamento locale limitato eccessivamente l'ampiezza del passo d'integrazione h .

*) Indirizzo dell'Autore: Istituto Matematico dell'Università di Genova.

Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca n° 32 del Comitato per la Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

¹⁾ V. [3], pag. 5.

Crane e Klopfenstein [1] hanno mostrato che lo studio della stabilità di un algoritmo per integrare il problema (1.1) può essere ridotto a studiare la stabilità dello stesso algoritmo applicato al problema

$$(1.2) \quad y' = \lambda y \quad y \in D \subset R^r \quad \left(' = \frac{d}{dx} \right)$$

per i valori di λ (reali o complessi) che sono gli autovalori della matrice jacobiana di $f(x, y)$ rispetto y . La stabilità dell'algoritmo dipende dal parametro $\bar{h} = \lambda h$.

Per alcuni algoritmi a passo multiplo, le regioni del piano $\bar{h}$ nelle quali detti algoritmi risultano assolutamente o relativamente stabili sono state determinate in [1] e [2].

Con opportuni procedimenti di ottimizzazione si sono ottenuti algoritmi per i quali la regione di stabilità assoluta risulta amplificata; ma il fattore di amplificazione è ben poco maggiore di uno e ciò non invita a ripetere i laboriosi procedimenti per altri casi.

Nel presente lavoro è impiegata la trasformazione che sostituisce al problema (1.1) l'equivalente

$$(1.3) \quad z(0) = z_0 \quad dz/dx = \varphi(x, z) \quad z \in B \subset R^r \quad 0 \leq x \leq a$$

avente la matrice jacobiana $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$ con piccolo raggio spettrale.

Facendo riferimento in modo particolare ai metodi del tipo « predittore-correttore » si trova che la trasformazione in oggetto è particolarmente vantaggiosa se la matrice jacobiana $\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$ del problema originario (1.1) ha grande raggio spettrale e gli elementi della diagonale principale e quelli sottostanti (o soprastanti) quasi costanti.

In questa classe rientra, ad esempio, il problema ai valori iniziali relativo all'equazione:

$$(1.4) \quad y^{(v)} = cy^{(v-1)} + f(x, y, y', \dots, y^{(v-2)})$$

con c costante, una volta posto nella forma (1.1); ed il problema relativo al sistema:

$$(1.5) \quad y' = B \cdot y + u(x, y) \quad y \in D \subset R^r$$

con B matrice quadrata di ordine r ad elementi costanti ed avente raggio spettrale grande rispetto alla costante di Lipschitz di $u(x, y)$ rispetto ad y .

I metodi predittore-correttore inizialmente stabili (cioè stabili nel senso di Dahlquist, v. [3]), applicati al problema (1.3) verranno ad avere, in conseguenza del ridotto raggio spettrale, le stesse caratteristiche di stabilità che competono agli algoritmi ad ampia regione di stabilità assoluta e relativa.

Ad una trattazione più particolare ero già pervenuto in un precedente lavoro [5] che però non suggeriva una comoda estensione ai sistemi.

Tale trattazione peraltro non ha valore di priorità in quanto risulta contenuta in un procedimento di J. D. Lawson [4] recentemente pubblicato e del quale sono ora venuto a conoscenza.

La differenza essenziale col presente lavoro consiste nell'uso che qui viene fatto di matrici triangolari $G(x)$ (vedi n° 2) che consentono di evitare ripetute pesanti valutazioni nei successivi passi d'integrazione.

2. Trasformazione ottima.

Sia $G(x)$ la matrice triangolare di ordine r avente, per fissare le idee, nulli gli elementi al disopra della diagonale principale e gli altri coincidenti con i corrispondenti elementi della jacobiana $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{[x, y(x)]}$ del problema (1.1).

Pensando, per un momento, nota la soluzione $y(x)$ del problema (1.1) risulta definita la matrice $A(x)$ soluzione di:

$$(2.1) \quad A(0) = I \quad dA/dx = G(x) \cdot A, \quad 0 \leq x \leq a.$$

La matrice inversa A^{-1} è allora soluzione di :

$$B(0) = I \quad dB/dx = -B \cdot G(x), \quad 0 \leq x \leq a.$$

La funzione $z(x) = A^{-1}(x) \cdot y(x)$ risulta, infine, soluzione del problema :

$$(2.2) \quad z(0) = y_0 \quad dz/dx = \varphi(x, z) \quad 0 \leq x \leq a$$

dove

$$(2.3) \quad \varphi(x, z) = -A^{-1} \cdot G \cdot A \cdot z + A^{-1} \cdot f(x, A \cdot z).$$

Si ottiene, poi :

$$(2.4) \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{(x, z)} = A^{-1} \cdot \left\{ -G + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{(x, A \cdot z)} \right\} \cdot A$$

e gli autovalori di $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$ coincideranno con quelli della matrice

$$(2.5) \quad -G + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{(x, A \cdot z)}.$$

Nei punti soluzione del problema (2.2) la matrice (2.5) ha elementi non nulli solo sopra alla diagonale principale e quindi ha raggio spettrale nullo.

In effetti la matrice che qui abbiamo scelto come $G(x)$ non è, in generale, nota ma può essere opportunamente approssimata.

È importante osservare che, indipendentemente dalla bontà di questa approssimazione, il problema trasformato (2.2) sarà sempre esattamente equivalente a quello originario.

3. Applicazioni ai metodi lineari a più passi.

Un metodo lineare a $k(k > 1)$ passi definisce implicitamente l'approssimazione teorica y_{n+k} della soluzione del problema (1.1) nel punto $x_{n+k} = (n+k) \cdot h$, non appena sono note le approssimazioni

teoriche $y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+k-1}$ nei punti $x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k-1}$ con una relazione del tipo :

$$(3.1) \quad y_{n+k} = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i y_{n+i} + h \sum_{i=0}^{k-1} \beta_i f(x_{n+i}, y_{n+i}) + h \beta_k f(x_{n+k}, y_{n+k})$$

dove α_i e β_i sono costanti che determinano completamente il metodo.

Sono comunemente usati gli algoritmi del tipo detto « predittore-correttore » : con una formula di tipo aperto ($\beta_k = 0$) si definisce $y_{n+k}^{(0)}$ che sostituito a secondo membro in una formula di tipo chiuso ($\beta_k \neq 0$) fornisce il valore corretto y_{n+k} .

L'interesse negli algoritmi « predittore-correttore » è essenzialmente motivato dalla relativa economia nel numero di derivate da calcolare rispetto ai metodi dello stesso ordine ad un passo.

Appare dunque essenziale conservare questa caratteristica anche per il problema (2.2).

Porremo :

$$(3.2) \quad y_{n+k}^{(0)} = \sum_{i=0}^{k-1} a_i \cdot y_{n+i} + h \sum_{i=0}^{k-1} b_i \cdot f(x_{n+i}, y_{n+i})$$

per la formula di tipo aperto, e

$$(3.3) \quad y_{n+k} = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i y_{n+i} + h \sum_{i=0}^{k-1} \beta_i f(x_{n+i}, y_{n+i}) + h \beta_k f(x_{n+k}, y_{n+k}^{(0)})$$

per quella di tipo chiuso. Per semplicità formale abbiamo supposto entrambe le formule a K punti.

Come si è detto alla fine del numero 2 per avere una matrice $G(x)$ occorre approssimare la parte triangolare inferiore della matrice $\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{[x, y(x)]}$.

Il procedimento più elementare è il seguente : per $x \in [x_n, x_{n+k}]$ si approssimi $\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{[x, y(x)]}$ con la matrice

$$(3.4) \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{(x_{i_n}, y_{i_n})} \quad \text{dove } i_n \text{ è un indice tale che } n \leq i_n \leq n+k-1,$$

allora, nell'intervallo considerato, G è costante e la (2.1) fornisce

$$(3.5) \quad A = \exp (G \cdot x).$$

Per la triangolarità di G (e quindi di A) è più conveniente fare uso della (2.1) stessa che non della sua soluzione (3.5).

Posto $A = (a_{ij})$, $G = (g_{ij})$ la (2.1) si esplicita nei sistemi triangolari

$$(3.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} a'_{11} = g_{11} \cdot a_{11} \\ a'_{21} = g_{21} \cdot a_{11} + g_{22} \cdot a_{21} \\ \vdots \\ a'_{r1} = g_{r1} \cdot a_{11} + g_{r2} \cdot a_{21} + \dots + g_{rv} \cdot a_{r1} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a'_{22} = g_{22} a_{22} \\ a'_{32} = g_{32} a_{22} + g_{33} \cdot a_{32} \\ \vdots \\ a'_{r2} = g_{r2} a_{22} + g_{r3} a_{32} + \dots + g_{rv} \cdot a_{r2} \\ \vdots \\ a'_{rv} = g_{rv} a_{rv} \end{array} \right.$$

che sono facilmente integrabili.

Il procedimento ottenuto con la posizione (3.4) mentre risulta conveniente se associato ai metodi d'integrazione numerica ad un passo [4] costringe a rivalutare molte volte le derivate $\varphi(x, z)$ nei successivi passi d'integrazione se si impiega l'algoritmo (3.2) (3.3); viene così a cadere quello che era il maggior vantaggio dei metodi a più passi.

Ciò non accade però per i problemi (1.4) e (1.5) come ci proponiamo di mostrare nel numero seguente.

4. I problemi (1.4) e (1.5).

Posto in forma di sistema il problema (1.4) si scrive:

$$(4.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} y'_{r-1} = cy_{r-1} + f(x, y, y_1, \dots, y_{r-2}) \\ y'_{r-2} = y_{r-1} \\ \vdots \\ y' = y_1. \end{array} \right.$$

Consideriamo, per primo, il caso in cui nella (4.1) sia $c = 0$.
La matrice jacobiana del sistema (4.1) è allora :

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial y_{r-2}} & \frac{\partial f}{\partial y_{r-3}} & \dots & \frac{\partial f}{\partial y} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Posto :

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

l'integrazione dei sistemi (3.6) fornisce :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ x & 1 & 0 & . & . & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & x & 1 & 0 & . & 0 \\ \vdots & & & & & \\ \frac{x^{v-1}}{(v-1)!} & \frac{x^{v-2}}{(v-2)!} & . & . & x & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice inversa $A^{-1} = [\exp(xG)]^{-1} = \exp(-xG)$ si ottiene mutando x in $-x$ nella matrice A stessa.

Nel caso attuale si ha :

$$-A^{-1} \cdot G \cdot A = -G.$$

Le relazioni che legano le nuove variabili z_i con le originarie y_i sono :

$$(4.2) \quad \begin{cases} y_{v-1} = z_{v-1} \\ y_{v-2} = xz_{v-1} + z_{v-2} \\ y_{v-3} = \frac{x^2}{2!} z_{v-1} + x \cdot z_{v-2} + z_{v-3} \\ \vdots \\ y = \frac{x^{v-1}}{(v-1)!} \cdot z_{v-1} + \dots + z. \end{cases}$$

Si ottiene ora, facilmente il trasformato (2.2) del problema (4.1) (per $c=0$) ed è immediato verificare che la matrice jacobiana $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)$ ha raggio spettrale identicamente nullo.

Risulta :

$$(4.3) \quad \begin{bmatrix} z'_{v-1} \\ z'_{v-2} \\ z'_{v-3} \\ \vdots \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & . & . & . \\ -1 & 0 & . & . & . \\ 0 & -1 & 0 & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{v-1} \\ z_{v-2} \\ z_{v-3} \\ \vdots \\ z \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ (-x) & 1 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ \frac{(-x)^2}{2!} & (-x) & 1 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & 1 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & (-x) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ z_{v-1} \\ xz_{v-1} + z_{v-2} \\ . \\ . \\ . \end{bmatrix}$$

dove la funzione f va espressa tramite le nuove variabili z_i .

L'integrazione del sistema (4.3) con l'algoritmo (3.2) (3.3) non comporta, ovviamente, il calcolo di un maggior numero di derivate rispetto il problema originario. Le (4.2) forniscono poi, molto semplicemente, le variabili originarie y_i .

Se in (4.1) è $c \neq 0$ posto :

$$G = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & & & & \\ . & . & . & & & & \\ . & . & . & & & & \\ 0 & & & & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

si ottiene :

$$A = \begin{bmatrix} e^{cx} & 0 & 0 & 0 & . & . & . & . \\ \frac{1}{c} e^{cx} - \frac{1}{c} & 1 & 0 & 0 & . & . & . & . \\ \frac{1}{c^2} e^{cx} - \frac{x}{c} - \frac{1}{c^2} & x & 1 & 0 & . & . & . & . \\ \frac{1}{c^3} e^{cx} - \frac{x^2}{2!c} - \frac{x}{c^2} - \frac{1}{c^3} & \frac{x^2}{2!} & x & 1 & 0 & & & \\ \frac{1}{c^4} e^{cx} - \frac{x^3}{3!c} - \frac{x^2}{2!c^2} - \frac{x}{c^3} - \frac{1}{c^4} & \frac{x^3}{3!} & \frac{x^2}{2!} & x & 1 & 0 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & x & 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice inversa A^{-1} è subito ottenuta mutando x in $-x$ nella matrice A stessa.

Proseguendo si ottiene facilmente il sistema trasformato per il quale valgono le stesse osservazioni fatte per il caso $c = 0$.

Sia, ora, $B = (b_{ij})$ la matrice costante del problema (1.5); la matrice $G = (g_{ij})$ sarà allora definita dalle relazioni:

$$(4.4) \quad \begin{cases} g_{ij} = b_{ij} & \text{per } i \geq j \\ g_{ij} = 0 & \text{per } i < j \end{cases}.$$

Procedendo come prima si ottiene il trasformato (2.2) per il quale, anche in questo caso, non sono da valutare un maggior numero di derivate rispetto il problema originario (1.5).

La matrice $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)$ ha, ora, piccolo (ma non nullo) raggio spettrale nei confronti della matrice $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$.

5. Risultati sperimentali.

Si sono presi in considerazione i due seguenti algoritmi:

1^o) Il predittore ottimo di ordine 2 a due passi ($K = 2$) cfr. [6]):

$$(5.1) \quad y_{n+2} = 2y_{n+1} - y_n + h(y'_{n+1} - y'_n)$$

avente l'errore locale di troncamento

$$T = \frac{1}{2} h^3 y'''(x) + o(h^4) \text{ per } h \rightarrow 0.$$

2^o) Un predittore stabile secondo Dahlquist di ordine 2 e con $K = 2$:

$$(5.2) \quad y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{h}{2} (3y'_{n+1} - y'_n)$$

avente l'errore locale di troncamento

$$T = \frac{5}{12} h^3 y'''(x) + o(h^4) \text{ per } h \rightarrow 0.$$

Entrambi gli algoritmi (5.1) e (5.2) sono stati impiegati per l'integrazione dell'equazione di Mathieu

$$(5.3) \quad y'' = (2m^2 \cos 2x - l) \cdot y \quad y(0) = y'(0) = 1$$

sia nella sua forma originaria (1.1) che in quella trasformata (2.2).

Con la posizione $y' = y_1$ la (5.3) si scrive :

$$(5.4) \quad \begin{cases} y_1' = (2m^2 \cos 2x - l) \cdot y \\ y' = y_1 \end{cases}$$

La matrice jacobiana del sistema (5.4) è :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2m^2 \cos 2x - l \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ed ha gli autovalori

$$(5.5) \quad \begin{cases} \lambda_1(x) = \sqrt[4]{2m^2 \cos 2x - l} \\ \lambda_2(x) = -\sqrt[4]{2m^2 \cos 2x - l} \end{cases}$$

Posto : $G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, si ottiene : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x & 1 \end{pmatrix}$ e quindi

$$(5.6) \quad \begin{cases} y_1 = z_1 \\ y = xz_1 + z \end{cases}, \quad \begin{cases} z_1 = y_1 \\ z = y - xy_1 \end{cases}$$

Il trasformato (2.2) si scrive, ora :

$$(5.7) \quad \begin{cases} z_1' = (2m^2 \cos 2x - l)(xz_1 + z) \\ z' = -x(2m^2 \cos 2x - l)(xz_1 + z) \end{cases}$$

La matrice jacobiana del sistema (5.7) ha, come è immediato verificare, raggio spettrale identicamente nullo.

Dette $y_0(x)$, $y_D(x)$ le approssimazioni alla soluzione del problema (5.3) ottenute integrando la (5.4) rispettivamente con le (5.1)

e (5.2), e dette, inoltre $y_{0,T}(x)$, $y_{D,T}(x)$ le approssimazioni alla soluzione del problema (5.3) ottenute integrando la (5.7) rispettivamente con le (5.1) e (5.2), e detta infine $y(x)$ la soluzione esatta del problema (5.3), gli errori propagati saranno allora definiti dalle differenze :

$$(5.8) \quad \begin{cases} \varepsilon_0(x) = y_0(x) - y(x) \\ \varepsilon_D(x) = y_D(x) - y(x) \\ \varepsilon_{0,T}(x) = y_{0,T}(x) - y(x) \\ \varepsilon_{D,T}(x) = y_{D,T}(x) - y(x) \end{cases}$$

Le previsioni risultano confermate dal comportamento degli errori (vedi tavola 1); infatti :

- 1⁰) i due algoritmi forniscono risultati che differiscono tra loro assai di meno quando si ricorre alla integrazione del problema trasformato,
- 2⁰) l'algoritmo (5.1) che appare instabile per il problema originario (con $h = 0.01$) è invece stabile per quello trasformato,
- 3⁰) l'algoritmo (5.2) è, anch'esso, affetto da errori minori nell'integrazione del problema trasformato.

Un valore del passo h superiore a quello utilizzato forniva, per ogni caso, risultati di scarsa precisione sempre, però, confermando le previsioni.

Si sono scelti volutamente algoritmi con un forte errore di troncamento locale in quanto al crescere dell'ordine dell'algoritmo la situazione non può che migliorare dal punto di vista del presente lavoro.

$$m = l = 5, \quad h = 0.01$$

x	ε_0	$\varepsilon_{0,T}$	ε_D	$\varepsilon_{D,T}$
0.1	— 0.0039	0.0022	— 0.0009	0,0007
0.2	— 0.031	0.0098	— 0.0040	0,0026
0.3	— 0.113	0.0259	— 0.0107	0,0066
0.4	— 0.300	0.056	— 0.0229	0.0138
0.5	— 0.644	0.107	— 0.0414	0.0251
0.6	— 1.160	0.187	— 0.0630	0.0390
0.7	— 1.747	0.293	— 0.0793	0.0514
0.8	— 2.119	0.421	— 0.0783	0.0556
0.9	— 1.864	0.522	— 0.0560	0.0477
1.0	— 0.734	0.543	— 0.0295	0.0336
1.1	0.909	0.428	— 0.0357	0.0300
1.2	1.934	0.170	— 0.0967	0.0493
1.3	1.075	— 0.154	— 0,172	0.0766
1.4	— 1.767	— 0.399	— 0,162	0.0678
1.5	— 4.732	— 0.432	0,011	— 0.0131
1.6	— 4.977	— 0.126	0.288	— 0.142
1.7	— 0.812	0.110	0.475	— 0.230
1.8	5.305	0.391	0.394	— 0.190

T A V O L A 1

BIBLIOGRAFIA

- [1] R. L. CRANE and R. W. KLOPFENSTEIN, *A predictor-corrector algorithm with an increased range of absolute stability*, J. of the A. C. M., 12 (1965), 227-241.
- [2] FRED T. KROGH, *Predictor-Corrector methods of high order with improved stability characteristics*, J. of the A. C. M., 13 (1966), 374-385.
- [3] P. HENRICI, *Error propagation for difference methods*. (1963), Jhon Wiley, New York.
- [4] J. DOUGLAS LAWSON, *Generalized Runge-Kutta processes for stable systems with large Lipschitz constants*, SIAM J. Numer. Anal., 4 (1967), 372-379.
- [5] L. REBOLIA, *Un procedimento di stabilizzazione per l'integrazione numerica di equazioni differenziali ordinarie*, Istituto di Matematica dell'Università di Genova, (1967).
- [6] P. MARZULLI, *Formule ottimali di integrazione numerica del tipo predittore-correttore*, Calcolo, 2 (1965), 141-153.
- [7] BELLMAN R., *Introduction to matrix analysis*, (1960), Mac Graw Hill, New York.
- [8] VARGA R. S. *Matrix Iterative Analysis*, (1962) Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Manoscritto pervenuto in redazione il 15 dicembre 1967