

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ALAIN LUCIEN MIGNOT

Méthodes d'approximation des solutions de certains problèmes aux limites linéaires

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 40 (1968), p. 1-138

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1968__40__1_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1968__40__1_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MÉTHODES D'APPROXIMATION DES SOLUTIONS DE CERTAINS PROBLÈMES AUX LIMITES LINEAIRES

ALAIN LUCIEN MIGNOT *)

P A R T I E I

Introduction.

Nous nous proposons dans ce travail d'étudier certains types d'approximation des solutions de problèmes aux limites stationnaires et d'évolution.

Les Chapitres I et II sont consacrés à l'approximation de la solution de problèmes aux limites elliptiques par la méthode du « *domaine auxiliaire* ». Le principe en est le suivant :

Soit A un opérateur différentiel linéaire elliptique d'ordre $2m$ dans un ouvert borné Ω de R^n , de frontière Γ supposée régulière. Nous cherchons à approcher la solution u de :

$$(P) \quad \begin{cases} Au = f & \text{dans } \Omega \\ B_j u = 0 & \text{sur } \Gamma, j = 0, 1, \dots, m-1 \text{ (conditions aux limites)} . \end{cases}$$

Nous remplaçons le problème (P) par une famille de problèmes (P_ε) ($\varepsilon > 0$ petit) du type :

$$(P_\varepsilon) \quad \begin{cases} A_\varepsilon u_\varepsilon = f_\varepsilon & \text{dans un ouvert } D \text{ contenant } \Omega \\ \gamma_j u_\varepsilon = 0 & \text{sur } S \text{ frontière de } D, j = 0, 1, \dots, m-1 \end{cases}$$

*) Thèse de doctorat es sciences Mathématiques soutenue le 14 Mars 1967 à Paris.

Indirizzo dell'A. : 28 rue de Fontenay 94-Nogent (Francia).

où A_ε est un opérateur différentiel elliptique d'ordre $2m$ dans D qui prolonge A à D , et $\gamma_j u_\varepsilon$ est la trace d'ordre j de u_ε sur S . Les coefficients de A_ε dans le « domaine auxiliaire » $D - \bar{\Omega}$ sont choisis à partir de A et des conditions aux limites de (P) . Pour certains choix (non limitatifs) de A_ε on montre la convergence de u_ε restreinte à Ω vers u , solution de (P) , quand ε tend vers zéro. Dans certains cas on obtient l'évaluation de l'erreur : $u_\varepsilon|_\Omega - u = O(\sqrt{\varepsilon})$.

Au Chapitre II nous donnons des applications pratiques de cette méthode sur quelques problèmes simples. Nous avons résolu directement les problèmes (P) et (P_ε) par la méthode variationnelle des différences finies et comparé les résultats obtenus pour plusieurs choix de l'opérateur A_ε .

Les Chapitres III, IV, et V concernent les équations d'évolution linéaires du premier et du second ordre en t dans un domaine cylindrique et non cylindrique.

Le Chapitre III traite des problèmes mixtes pour les équations paraboliques. Soit $A(t)$ une famille d'opérateurs différentiels linéaires elliptiques d'ordre $2m$, $t \geq 0$. Nous cherchons à approcher la solution $u(x, t)$ de :

$$(P) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt}(t) + A(t)u(t) = f(t) \text{ dans l'ouvert } \Omega(t), t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ pour } x \in \Omega(0) \\ B_j u(t) = 0 \text{ sur la frontière } \Gamma(t) \text{ de } \Omega(t), t > 0. \end{cases}$$

Au paragraphe II nous supposons que le domaine $\Omega(t)$ est indépendant du temps t ($\Omega(t) = \Omega, t \geq 0$) et nous généralisons la méthode du domaine auxiliaire à ce problème. Le principe de construction est semblable à celui énoncé pour les problèmes stationnaires ; on est ramené à la résolution d'un problème de Dirichlet parabolique dans un domaine D contenant Ω .

Nous en démontrons la convergence lorsque $A(t)$ est un opérateur d'ordre deux et (P) un problème mêlé.

Nous considérons au paragraphe III le cas d'un domaine non cylindrique ($\Omega(t)$ variant avec t). Nous associons d'abord à (P) un problème variationnel faible dont nous démontrons l'unicité de la

solution. Nous en construisons quatre procédés d'approximation dont chacun d'eux nous fournit à la limite une démonstration de l'existence de u . Le premier, par la méthode du domaine auxiliaire, nous ramène à la résolution d'un problème parabolique dans un domaine ω arbitraire contenant $\Omega(t)$ pour $t \in [0, T]$, T positif fini, en prolongeant l'opérateur $A(t)$ à ω . Le second, qui est une généralisation de la méthode de Galerkin classique, revient à approcher $u(x, t)$ comme combinaison linéaire de « fonctions de base » $\varphi^j(x, t) : u_m(x, t) = \sum_{i=1}^m u_i(t) \varphi^i(x, t)$; les $u_i(t)$ sont alors solutions d'un système de m équations différentielles linéaires d'ordre un. Une idée semblable est utilisée dans SATHER [18] pour les équations de Navier-Stokes. Le troisième procédé est une généralisation de la méthode variationnelle des différences finies, pour un domaine non cylindrique. Nous donnons une définition de la stabilité des schémas introduits ainsi que la démonstration des théorèmes de stabilité et convergence associés, analogues à ceux énoncés dans RAVIART [15] pour les problèmes cylindriques. Enfin un dernier procédé consiste à utiliser la « régularisation elliptique », cf. LIONS [10], [12], qui nous ramène à la résolution d'un problème aux limites elliptique dans le domaine $(\Omega(t), t \in [0, T])$.

Nous avons fait la même étude au Chapitre IV pour les équation d'évolution linéaires du second ordre en t du type :

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 u}{dt^2}(t) + \frac{d}{dt}(B(t)u(t)) + A(t)u(t) = f(t) \quad \text{dans } \Omega(t), t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x); \frac{du}{dt}(x, 0) = u_1(x) \quad \text{pour tout } x \in \Omega(0) \\ B_j u(t) = 0 \text{ sur } \Gamma(t) \text{ frontière de } \Omega(t), j = 0, 1, \dots, m-1; t > 0. \end{array} \right.$$

Nous avons d'abord construit la méthode du domaine auxiliaire lorsque $\Omega(t)$ est indépendant de t , puis les trois premiers procédés d'approximation analogues au chapitre III, quand $\Omega(t)$ varie avec t .

Au Chapitre V nous avons étudié numériquement sur quelques problèmes simples, les différents procédés d'approximation des problèmes paraboliques dans un ouvert non cylindrique. Une étude comparative de ces méthodes a été faite sur un problème plus élaboré.

Il résulte de cette étude que la méthode du domaine auxiliaire est la plus avantageuse : sa construction est simple et elle donne de bons résultats pour un temps de calcul peu élevé. La méthode de Galerkin est surtout applicable en dimension un où elle est très efficace. La méthode variationnelle des différences finies, de construction assez délicate mais très rapide, donne une précision médiocre surtout au voisinage de la frontière $\Gamma(t)$ de $\Omega(t)$. Enfin la régularisation elliptique qui fournit généralement de très bons résultats, nécessite la résolution d'un gros système linéaire d'où un temps de calcul très long.

Je suis heureux d'exprimer ici mes remerciements et ma profonde gratitude à Monsieur J. L. LIONS qui m'a suivi et orienté au cours de mes recherches. C'est grâce à ses conseils que j'ai pu mener à bien ce travail.

Afin d'en faciliter la publication nous avons divisé notre travail en deux parties. La seconde partie, comprenant les Chapitres IV et V, fera l'objet prochainement d'un autre article dans cette même revue.

Les essais numériques figurant dans ce travail ont été effectués sur les machines IBM. 704 puis CDC 3600 de l'INSTITUT BLAISE PASCAL.

CHAPITRE I

APPROXIMATION DE PROBLÈMES AUX LIMITES ELLIPTIQUES

I - Plan général d'étude :

Etant donné un opérateur elliptique A dans un domaine Ω , de façon générale, nous nous proposons d'approcher les problèmes aux limites de type suivant :

$$(P) \quad \begin{cases} Au = f & \text{dans } \Omega. \\ B_j u = 0 & \text{sur } \Gamma, \text{ frontière de } \Omega. \end{cases}$$

Nous dirons que (P) est le « problème initial ». Au problème (P) nous allons associer une famille de problèmes (P_ε) , dits « problèmes approchés », résolus dans un ouvert D contenant Ω , dont la solution u_ε approchera, en un certain sens, la solution u de (P) . Pour cela nous construirons des opérateurs A_ε prolongeant A à D et considérons :

$$(P_\varepsilon) \quad \begin{cases} A_\varepsilon u_\varepsilon = \tilde{f} & \text{dans } D \\ \gamma_j u_\varepsilon = 0 & \text{sur } S, \text{ frontière de } D. \end{cases}$$

$$j = 0, \dots, m-1$$

où $\tilde{f}$ est le prolongement par zéro de f à D , et γ_j la trace d'ordre j de u_ε sur S :

$$\gamma_j u = \frac{d^j u}{dn_j}.$$

Dans un premier stade nous décrirons notre méthode lorsque A est un opérateur elliptique d'ordre 2, avec des conditions aux limites homogènes de type Dirichlet, Neumann ou mêlées.

Puis nous montrerons comment on peut généraliser ce procédé à des opérateurs d'ordre $2m$ ($m > 1$). Nous donnerons les résultats obtenus en prenant $A = \Delta^2$, l'opérateur biharmonique, avec différentes conditions aux limites.

Toute l'étude qui va suivre sera basée sur la formulation variationnelle des problèmes traités (voir [7]).

II. Espaces utilisés et notations :

Soit Ω un ouvert de R^n de frontière Γ assez régulière. On appelle :

$\mathcal{D}(\Omega)$: l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω .

$\mathcal{D}'(\Omega)$: son dual qui est l'espace des distributions sur Ω . [20].

$L^2(\Omega)$: l'espace des fonctions de carré sommable sur Ω muni de la norme :

$$\|u\|^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |u|^2 dx$$

$$H^m(\Omega) : \{u \mid u, D^p u \in L^2(\Omega), |p| \leq m\}$$

où

$$D^p u = \frac{\partial^p u}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}} \quad \text{avec } p = (p_1, \dots, p_n), p_i \geq 0 \\ |p| = p_1 + \dots + p_n$$

les dérivées étant prises au sens des distributions sur Ω , [20].

Les espaces $H^m(\Omega)$ (de SOBOLEV [21]) sont des espaces de Hilbert munis du produit scalaire :

$$((u, v)) = ((u, v))_{H^m(\Omega)} = \sum_{|p| \leq m} \int_{\Omega} D^p u \cdot D^p \bar{v} \, dx.$$

$$\text{Notation :} \quad \|u\|_{H^m(\Omega)} = ((u, u))^{1/2} = \|u\|.$$

$H_0^m(\Omega)$: l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$ pour la norme ci-dessus

$H^{-m}(\Omega)$: dual de $H_0^m(\Omega)$.

Résultat I-1 : Si $u \in H^m(\Omega)$, $\gamma_j u = \frac{d^j u}{dn_j} \in H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ (voir [8]

pour la définition de H^m , m non entier), où $\frac{d^j u}{dn_j}$ est la trace d'ordre j de u sur $\Gamma = \partial\Omega$;

et l'application :

$u \rightarrow \vec{\gamma}_0 u = \{\gamma_0 u, \gamma_1 u, \dots, \gamma_{m-1} u\}$ est linéaire continue de $H^m(\Omega)$ dans $\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, surjective et de noyau $H_0^m(\Omega)$.

Résultat I-2 : Si Ω est un ouvert très régulier [8] on démontre qu'il a la propriété de m -prolongement c. a. d. : pour tout $u \in H^m(\Omega)$, il existe une application linéaire continue P de $H^r(\Omega)$ dans $H^r(\mathbb{R}^n)$ avec $0 \leq r \leq m$, telle que :

$$Pu = u \text{ presque partout sur } \Omega. \quad ([7])$$

III. Formulation variationnelle du « problème initial » :

A l'opérateur A et au problème (P) nous faisons correspondre le triplet $\{V, a(u, v), L(v)\}$ où :

V est un espace de Hilbert.

$a(u, v)$ est une forme sesquilinéaire continue sur $V \times V$, c'est-à-dire :

$$|a(u, v)| \leq M \|u\| \cdot \|v\| \quad \text{pour tout } u, v \in V.$$

$L(v)$ est une forme anti-linéaire continue sur V , (correspondant au second membre).

Le problème variationnel associé à ce triplet s'écrit :

PROBLÈME I-1 : Trouver $u \in V$ tel que :

$$(I-1) \quad a(u, v) = L(v) \quad \text{pour tout } v \in V.$$

DÉFINITION I-1 : Nous dirons que $a(u, v)$ est V -elliptique si :

$$(I.2) \quad \operatorname{Re} a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \text{pour tout } v \in V, \alpha > 0.$$

On a alors le :

THÉORÈME I-1 : Si la forme $a(u, v)$ est V -elliptique, le problème I-1 admet une solution unique [7].

Pour chacun des problèmes variationnels associés à (P) ou (P_e) nous vérifierons les hypothèses suivantes :

Hypothèse H0 : $a(u, v)$ est une forme sesquilinéaire continue sur $V \times V$.

Hypothèse H1 : $a(u, v)$ est V -elliptique.

Hypothèse H2 : $L(v)$ est une forme anti-linéaire continue sur V .

Hypothèse H3 : $a(u, v)$ et $L(v)$ ne contiennent pas d'intégrales de surface sur Γ , frontière de Ω .

Tous nos résultats s'appliqueront si H3 est vérifiée, ce qui nous limite aux problèmes homogènes.

Nous donnons maintenant quelques exemples de construction de problèmes variationnels à partir des problèmes formels (P) :

Exemple I-1 : (problème de Dirichlet).

Soit $A = -\Delta = -\sum_{i=1}^n D_i^2$ avec $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$

$$(I-3) \quad \begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega \\ \gamma_0 u = u|_{\Gamma} = 0 \text{ où } \Gamma = \partial\Omega. \end{cases}$$

Nous prenons :

$$V = H_0^1(\Omega).$$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \text{grad } u \cdot \text{grad } \bar{v} \, d\Omega$$

$$L(v) = \int_{\Omega} f \cdot \bar{v} \, d\Omega ; \text{ en supposant } f \in L^2(\Omega).$$

Au problème (P) correspond le triplet : $\{V, a(u, v), L(v)\}$ et le problème variationnel (Q) :

$$(I-4) \quad \begin{cases} \text{Déterminer } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u, v) = (f, v)_{L^2(\Omega)} \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Les hypothèses (H0, ..., H3) sont facilement vérifiées dans ce cas d'où l'existence et l'unicité de u d'après le Théorème I-1.

Résultat I-3 : Les problèmes (P) et (Q) sont équivalents formellement. En fait u solution de (I-4) vérifie la première équation de (I-3) au sens de $\mathcal{D}'(\Omega)$ avec en plus $\Delta u \in L^2(\Omega)$, et $u = 0$ dans $L^2(\Gamma)$ car $u \in H_0^1(\Omega)$.

Exemple I-2 : (Problème de Neumann)

$$(I-5) \quad \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f \text{ dans } \Omega, \lambda > 0 \\ \frac{du}{dn} = 0 \text{ sur } \Gamma, \text{ où } \vec{n} \text{ est la normale extérieure à } \Omega \text{ sur } \Gamma. \end{cases}$$

On prend cette fois :

$$V = H^1(\Omega)$$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (\text{grad } u \cdot \text{grad } \bar{v} + \lambda u \bar{v}) dx$$

$$L(v) = (f, v)_{L^2(\Omega)} ; f \in L^2(\Omega).$$

A (P) correspond le triplet : $\{H^1(\Omega), a(u, v), L(v)\}$ et le problème variationnel (Q) :

$$(I-6) \quad \begin{cases} \text{Déterminer } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u, v) = L(v) \text{ pour tout } v \in H^1(\Omega). \end{cases}$$

On vérifie encore facilement les hypothèses (H0, ..., H3) d'où l'existence et l'unicité de la solution u , ainsi que le :

Résultat I-4 : Les problèmes (P) et (Q) sont équivalents formellement, la première équation étant vérifiée au sens des distributions de $\mathcal{D}'(\Omega)$ et la seconde formellement (par application de la formule de Green).

De manière analogue on associerait un problème variationnel (Q) à des opérateurs A d'ordre $2m$ vérifiant des conditions aux limites homogènes.

Dans la suite nous approcherons le problème variationnel (Q) correspondant à (P), par un problème variationnel (Q_ε) auquel nous associerons un problème opérationnel (P_ε) .

IV. Approximations de problèmes aux limites elliptiques pour des opérateurs d'ordre 2.

Nous considérerons dans tout ce paragraphe des opérateurs A self-adjoints du type :

$$(I-7) \quad A = - \sum_{i,j=1}^n D_i (a_{ij} D_j) + a_0$$

sur lequel nous ferons les hypothèses suivantes :

$$(I-8) \quad a_{ij}, a_0 \in L^\infty(\Omega) \quad (\text{mesurables et bornés dans } \Omega)$$

$$(I-9) \quad \operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_j \bar{\xi}_i \geq \alpha \sum_{i=1}^n |\xi_i|^2, \quad \alpha > 0.$$

$$(I-10) \quad \operatorname{Re} a_0(x) \geq \alpha_0 > 0.$$

Les trois types de problèmes (P) que nous chercherons à approcher s'écrivent :

$$(I-11) \quad Au = f \text{ dans } \Omega.$$

$$(I-12) \quad u = 0 \text{ sur } \Gamma \text{ — problème de DIRICHLET —}$$

ou

$$(I-13) \quad \frac{du}{d\nu_A} = 0 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_j u \cos(\vec{n}, x_i) \text{ sur } \Gamma$$

— problème de NEUMANN —

ou

$$(I-14) \quad u = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \text{ et } \frac{du}{d\nu_A} = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \text{ avec } \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$

— problème MELE —

4.1. Le problème initial variationnel (Q) :

Soit $a(u, v)$ la forme sesquilinéaire associée à A :

$$(I-15) \quad a(u, v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} D_j u \cdot \overline{D_i v} \, dx + \int_{\Omega} a_0 u \cdot \bar{v} \, dx.$$

Nous prendrons pour espace V :

$$(I-12') \quad V = H_0^1(\Omega) \text{ pour (I-12), (I-11)}$$

$$(I-13') \quad V = H^1(\Omega) \text{ pour (I-13), (I-11)}$$

$$(I-14') \quad V = \{u \mid u \in H^1(\Omega) \text{ et } u = 0 \text{ sur } \Gamma_1\} \text{ pour (I-14), (I-11).}$$

Au problème (P) nous associons le triplet $\{V, a(u, v), L(v)\}$ et le problème variationnel (Q) :

$$(I-16) \quad \begin{cases} \text{Déterminer } u \in V \text{ tel que :} \\ a(u, v) = L(v) = (f, v)_{L^2(\Omega)} \text{ pour tout } v \in V. \end{cases}$$

Hypothèse L : $f \in L^2(\Omega)$ (ou bien $f \in H^{-1}(\Omega)$; les démonstrations resteraient identiques).

Vérifions les hypothèses *H* :

H0 : elle découle de l'hypothèse (I-8) faite sur a_{ij} , a_0 et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

H1 : on a :

$$\operatorname{Re} a(v, v) = \int_{\Omega} \operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_j v \cdot D_i \bar{v} \, dx + \int_{\Omega} \operatorname{Re} a_0(x) |v|^2 \, dx.$$

$$\operatorname{Re} a(v, v) \geq \inf(\alpha, \alpha_0) \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 = \beta \|v\|_V^2 \text{ d'après (I-9) et (I-10).}$$

$$H2 : \quad |L(v)| = |(f, v)_{L^2(\Omega)}| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_V.$$

H3 : est vérifiée de par le choix de $a(u, v)$.

D'après le Théorème I-1, on a le :

Résultat I-5 : Le problème initial (Q) admet une solution unique u appartenant à V .

4.2. Idées générales sur le problème approché (Q_ε) :

Nous considérerons un ouvert *quelconque* $\Omega_1 \subset \mathbb{C}_{\mathbb{R}^n} \bar{\Omega}$ et D l'intérieur de $\bar{\Omega} \cup \bar{\Omega}_1$. Soit S la frontière de D (figure 1).

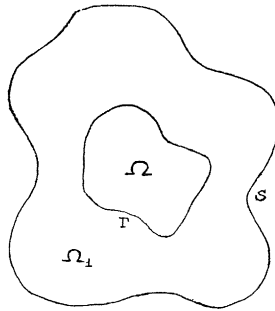


Fig. 1

Nous construirons une forme sesquilinéaire $A_\varepsilon(u, v)$ ayant les propriétés suivantes :

(I-17) $A_\varepsilon(u, v)$ est une forme sesquilinéaire continue sur $H^1(D) \times H^1(D)$.

(I-18) La restriction de $A_\varepsilon(u, v)$ à $V \times V$, défini en 3-1, coïncide avec $a(u, v)$ au sens suivant :

si $\tilde{u}$ est le prolongement de u par 0 en dehors de Ω :

$A_\varepsilon(\tilde{u}, \tilde{v}) = a(u, v)$ pour tout $u, v \in V$ et nulles au voisinage de Γ dans Ω .

(I-19) $\operatorname{Re} A_\varepsilon(v, v) \geq \alpha_1 \|v\|_{H^1(D)}^2$ pour tout $v \in V(D)$ défini ci-dessous ;
 $\alpha_1 > 0$.

Le problème approché dans D s'écrira : (Q_ε)

(I-20) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Déterminer } u_\varepsilon \in V(D) \text{ tel que :} \\ A_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = \tilde{L}(v) = (\tilde{f}, v)_{L^2(D)} \text{ pour tout } v \in V(D). \end{array} \right.$

Sous les hypothèses : (I-17), (I-18), (I-19) on a le théorème :

THÉORÈME 1-2 : Le problème approché variationnel (Q_ε) admet une solution unique, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé.

DÉMONSTRATION : Toutes les hypothèses du Théorème I-1 sont vérifiées car :

$$|\tilde{L}(v)| \leq |(\tilde{f}, v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|v\|_{H^1(D)}.$$

Nous avons le choix de $V(D)$, suivant que nous désirons approcher (Q) par un problème de Dirichlet, Neumann ou autre. Dans toutes nos démonstrations nous prendrons $V(D) = H_0^1(D)$, qui nous intéresse le plus au point de vue pratique, les démonstrations se transposant facilement si $V(D) = H^1(D)$.

4.3. Constructions de problèmes (Q_ε) approchant un problème de DIRICHLET.

Nous donnerons plusieurs choix (non limitatifs) de « formes approchées », pour lesquelles on démontrera la convergence de u_ε restreint à Ω vers u .

De façon générale nous prendrons :

$$(I-21) \quad A_\varepsilon(u, v) = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^n A_{ij} D_j u \cdot D_i \bar{v} + A_0 u \cdot \bar{v} \right) dx$$

premier choix de A_{ij} , A_0 :

$$(I-22) \quad \begin{cases} A_{ij} = \{a_{ij} \text{ dans } \Omega, \delta_{ij} \text{ dans } \Omega_1 \text{ (1 si } i=j) \\ \text{(0 si } i \neq j) \\ A_0 = \{a_0 \text{ dans } \Omega, \frac{1}{\varepsilon} \text{ dans } \Omega_1\} \end{cases}$$

deuxième choix de A_{ij} , A_0 :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \left\{ a_{ij} \text{ dans } \Omega, \frac{1}{\varepsilon} \delta_{ij} \text{ dans } \Omega_1 \right\} \\ A_0 &= \left\{ a_0 \text{ dans } \Omega, \frac{1}{\varepsilon} \text{ dans } \Omega_1 \right\} \end{aligned} \quad (\text{I-23})$$

troisième choix de A_{ij} , A_0 :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \left\{ a_{ij} \text{ dans } \Omega, \frac{1}{\varepsilon} \text{ dans } \Omega_1 \right\} \\ A_0 &= \{ a_0 \text{ dans } \Omega, 0 \text{ dans } \Omega_1 \} \end{aligned} \quad (\text{I-24})$$

4.3.1. Premier problème approché (Q_ε) correspondant à (I-22).

La « forme approchée » $A_\varepsilon(u, v)$ s'écrit pour $u, v \in H_0^1(D)$:

$$\begin{aligned} \text{(I-25)} \quad A_\varepsilon(u, v) = & \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} D_j u \cdot D_i \bar{v} \, dx + \int_{\Omega} a_0 u \cdot \bar{v} \, dx \\ & + \int_{\Omega_1} \text{grad } u \, \text{grad } \bar{v} \, dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_2} u \cdot \bar{v} \, dx \end{aligned}$$

et le problème approché (Q_ε) qui lui correspond :

$$(I-26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Déterminer } u_\varepsilon \in H_0^1(D) \text{ tel que :} \\ A_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = (\tilde{f}, v) \text{ pour tout } v \in H_0^1(D) \\ \text{avec } \tilde{f} = \{f \text{ dans } \Omega, 0 \text{ dans } \Omega_1\}. \end{array} \right.$$

Résultat I-6 : Pour ε positif fixé, (Q_ε) admet une solution unique.

DÉMONSTRATION : Vérifions les hypothèses du Théorème I-2 ; la seule chose non triviale est la coercivité :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} A_\varepsilon(v, v) &= \operatorname{Re} a(v, v) + \int_{\Omega_1} |\operatorname{grad} v|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_1} |v|^2 dx \\ &\geq \inf(\alpha, \alpha_0) \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 + \inf\left(1, \frac{1}{\varepsilon}\right) \|v\|_{H^1(\Omega_1)}^2 \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re} A_\varepsilon(v, v) \geq \inf\left(\alpha, \alpha_0, \frac{1}{\varepsilon}\right) \|v\|_{H^1(D)}^2.$$

L'approximation est justifiée par les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME I-3 : *de convergence faible* : quand $\varepsilon \rightarrow 0$, la restriction de u_ε à Ω (notée $u_\varepsilon|_\Omega$) converge faiblement vers u , solution du problème initial (Q) , dans $H^1(\Omega)$ et $\frac{u_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}|_{\Omega_1}$ converge faiblement dans $L^2(\Omega_1)$ vers une fonction g .

DÉMONSTRATION : Dans (I-26) prenons $v = u_\varepsilon$ ce qui est loisible car $u_\varepsilon \in H_0^1(D)$ d'après le Résultat I-6. Il vient :

$$\operatorname{Re} A_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) = \operatorname{Re}(\tilde{f}, u_\varepsilon).$$

Soit :

$$\operatorname{Re} a(u_\varepsilon|_\Omega, u_\varepsilon|_\Omega) + \int_{\Omega_1} |\operatorname{grad} u_\varepsilon|^2 dx + \int_{\Omega_1} \left| \frac{u_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} \right|^2 dx = \operatorname{Re} \int_\Omega f \bar{u}_\varepsilon dx.$$

En tenant compte de la coercivité de $a(u, v)$, on a :

$$\inf(\alpha, \alpha_0) \|u_\varepsilon|_\Omega\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\text{grad } u_\varepsilon|_{\Omega_1}\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \left\|\frac{u_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\right\|_{\Omega_1}^2_{L^2(\Omega_1)} \\ \leq \|f|_{L^2(\Omega)}\| \|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq \|f|_{L^2(\Omega)}\| \|u_\varepsilon\|_{H^1(D)}.$$

D'où l'on déduit que : $\|u_\varepsilon\|_{H^1(D)}, \left\|\frac{u_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\right\|_{L^2(\Omega_1)}$ sont bornés indépendamment de ε . On peut alors extraire une sous-suite $\eta \rightarrow 0$ telle que :

$$(I-27) \quad u_\eta \rightharpoonup w \text{ dans } H_0^1(D) \text{ faible.}$$

$$(I-28) \quad \frac{u_\eta}{\sqrt{\eta}}|_{\Omega_1} \rightharpoonup g \text{ dans } L^2(\Omega_1) \text{ faible.}$$

(I-27) entraîne que : $u_\eta|_{\Omega_1} \rightharpoonup w|_{\Omega_1}$ dans $L^2(\Omega_1)$ faible et (I-28) : $u_\eta|_{\Omega_1} = \left(\frac{u_\eta}{\sqrt{\eta}}\right)|_{\Omega_1} \sqrt{\eta} \rightharpoonup 0$ dans $L^2(\Omega_1)$ faible.

Soit $w|_{\Omega_1} \equiv 0$. Comme $w \in H_0^1(D)$ on peut définir sa trace sur Γ dans $H^{1/2}(\Gamma)$ et $w|_\Gamma = 0$, d'où $w|_\Omega \in H_0^1(\Omega)$.

Montrons que $w|_\Omega$ coïncide avec u , c.a.d. est solution de (Q) :

Reprenons (I-26) avec $\tilde{v} = \{v \text{ dans } \Omega, 0 \text{ dans } \Omega_1\}$ où $v \in H_0^1(\Omega)$.

On a : $\tilde{v} \in H_0^1(D)$ et il vient :

$$a(u_\varepsilon|_\Omega, v) = (f, v)_{L^2(\Omega)}.$$

D'après (I-27) quand $\varepsilon = \eta \rightarrow 0$:

$$a(u_\eta|_\Omega, v) \rightarrow a(w|_\Omega, v)$$

et à la limite :

$$a(w|_\Omega, v) = (f, v) \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega).$$

Soit $w|_\Omega \equiv u$ d'après l'unicité de (Q).

Ceci étant vrai pour toute sous-suite $\eta \rightarrow 0$, c'est vrai aussi pour la suite initiale $\varepsilon \rightarrow 0$ car la limite est indépendante de la sous-suite.

THÉORÈME I-4. *de convergence forte* : quand $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$(I-29) \quad u_\varepsilon|_\Omega \rightarrow u \text{ dans } H^1(\Omega) \text{ fort.}$$

$$(I-30) \quad \frac{u_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}|_{\Omega_1} \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(\Omega_1) \text{ fort.}$$

DÉMONSTRATION : Soit la fonction $N = \{1 \text{ dans } \Omega, 0 \text{ dans } \Omega_1\}$ et introduisons :

$$X_\varepsilon = A_\varepsilon(u_\varepsilon - Nu, u_\varepsilon - Nu)$$

qui est bien défini car $Nu \in H_0^1(D)$ pour $u \in H_0^1(\Omega)$

$$X_\varepsilon = A_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) - 2 \operatorname{Re} A_\varepsilon(u_\varepsilon, Nu) + A_\varepsilon(Nu, Nu).$$

En tenant compte de (I-26) avec $v = u_\varepsilon$ et de (I-18) il vient :

$$\operatorname{Re} X_\varepsilon = \operatorname{Re} (\tilde{f}, u_\varepsilon)_{L^2(D)} - 2 \operatorname{Re} a(u_\varepsilon|_\Omega, u) + \operatorname{Re} a(u, u).$$

Appliquons le Théorème I-3. Quand $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} X_\varepsilon &\rightarrow \operatorname{Re} (f, u)_{L^2(\Omega)} - 2 \operatorname{Re} a(u, u) + \operatorname{Re} a(u, u) \\ &= 0 \text{ d'après (I-16).} \end{aligned}$$

Soit : $\operatorname{Re} X_\varepsilon \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Mais :

$$\operatorname{Re} X_\varepsilon = \operatorname{Re} a(u_\varepsilon|_\Omega - u, u_\varepsilon|_\Omega - u) + |\operatorname{grad} u_\varepsilon|_{\Omega_1}|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \left| \frac{u_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} \right|_{L^2(\Omega_1)}^2$$

$$\operatorname{Re} X_\varepsilon \geq \beta \|u_\varepsilon|_\Omega - u\|_{H^1(\Omega)}^2 + |\operatorname{grad} u_\varepsilon|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \left| \frac{u_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} \right|_{L^2(\Omega_1)}^2$$

avec $\beta = \inf(\alpha, \alpha_0)$.

D'où (I-29) et (I-30) avec en plus :

$$u_\varepsilon|_{\Omega_1} \rightarrow 0 \text{ dans } H^1(\Omega_1)$$

C. Q. F. D.

Dans ce cas on ne peut avoir de majoration de l'erreur $u_\varepsilon|_\Omega - u$, u_ε étant de l'ordre $\sqrt{\varepsilon}$ dans $L^2(\Omega_1)$ seulement.

4.3.2. *Deuxième problème approché correspondant au choix (I-23) de A_{ij} , A_0 :*

$A_\varepsilon(u, v)$ s'écrit alors :

$$A_\varepsilon(u, v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} D_j u \cdot D_i \bar{v} dx + \int_{\Omega} a_0 u \bar{v} dx + \\ + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_1} (\text{grad } u \cdot \text{grad } \bar{v} + u \bar{v}) dx$$

ou :

$$(I-31) \quad A_\varepsilon(u, v) = a(u|_{\Omega}, v|_{\Omega}) + \frac{1}{\varepsilon} ((u, v))_{H^1(\Omega_1)}.$$

Le problème approché (Q_ε) devient :

$$(I-32) \quad \begin{cases} \text{Déterminer } u_\varepsilon \text{ dans } H_0^1(D) \text{ tel que :} \\ A_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = (\tilde{f}, v)_{L^2(D)} \quad \text{pour tout } v \in H_0^1(D). \end{cases}$$

Résultat I-7 : Pour $\varepsilon > 0$ fixé, (Q_ε) admet une solution unique.

DÉMONSTRATION : Vérifions la coercivité de A_ε ; d'après (I-31)

$$(I-33) \quad \text{Re } A_\varepsilon(v, v) = \text{Re } a(v|_{\Omega}, v|_{\Omega}) + \frac{1}{\varepsilon} \|v\|_{H^1(\Omega_1)}^2$$

$$\text{Re } A_\varepsilon(v, v) \geq \inf\left(\alpha, \alpha_0, \frac{1}{\varepsilon}\right) \|v\|_{H^1(D)}^2$$

d'où le résultat d'après le Théorème I-1.

Nous allons démontrer maintenant un théorème qui nous donnera directement la convergence forte et une majoration de l'erreur :

THÉORÈME I-5 : Soient u, u_ε solutions de (I-16), (I-32) respectivement; on a :

$$(I-34) \quad \|u_\varepsilon|_{\Omega} - u\|_{H^1(\Omega)} \leq c \cdot \sqrt{\varepsilon}$$

$$(I-35) \quad \|u_\varepsilon|_{\Omega_1}\|_{H^1(\Omega_1)} \leq c_1 \sqrt{\varepsilon} \quad c, c_1 : \text{constantes ne dépendant que des données.}$$

DÉMONSTRATION : Prenons $v = u_\varepsilon \in H_0^1(D)$ dans (I-32) :

$$\operatorname{Re} A_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) = \operatorname{Re}(\tilde{f}, u_\varepsilon).$$

D'après (I-33) il vient, en posant $\beta = \inf(\alpha, \alpha_0)$

$$\beta \|u_\varepsilon|_\Omega\|_{H^1(\Omega)}^2 + \left\| \frac{u_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}|_{\Omega_1} \right\|_{H^1(\Omega_1)}^2 \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}.$$

D'où l'on déduit :

$$(I-36) \quad \|u_\varepsilon|_\Omega\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{\|f\|}{\beta}$$

$$(I-37) \quad \|u_\varepsilon|_{\Omega_1}\|_{H^1(\Omega_1)} \leq \sqrt{\varepsilon} \frac{\|f\|}{\sqrt{\beta}}.$$

L'application $u_\varepsilon|_{\Omega_1} \rightarrow \gamma_0 u_\varepsilon$ (trace de u_ε sur le bord de Ω_1) est linéaire continue de $H^1(\Omega_1) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega_1)$, d'après le Résultat I-1. D'où :

$$\|\gamma_0 u_\varepsilon\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq c_2 \|u_\varepsilon|_{\Omega_1}\|_{H^1(\Omega_1)}$$

et en tenant compte de (I-36) :

$$(I-38) \quad \|\gamma_0 u_\varepsilon\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq k \sqrt{\varepsilon} \text{ avec } k = c_2 \|f\|/\sqrt{\beta}.$$

Considérons maintenant : $w = u_\varepsilon|_\Omega - u$, défini dans $H^1(\Omega)$. Dans Ω w vérifie :

$$Aw = 0 \text{ dans } H^{-1}(\Omega)$$

$$w|_\Gamma = \gamma_0 w = \gamma_0 u_\varepsilon, \text{ car } u = 0 \text{ sur } \Gamma, \text{ dans } H^{1/2}(\Gamma).$$

L'application $w \rightarrow Aw \times \gamma_0 w$ est un *isomorphisme* de :

$$H^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma) \quad (\text{voir [13]})$$

d'où

$$\|w\|_{H^1(\Omega)} \leq c_3 \|\gamma_0 w\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \text{ car } Aw = 0.$$

Soit :

$$\|u_\varepsilon|_\Omega - u\|_{H^1(\Omega)} \leq c_3 \|\gamma_0 u_\varepsilon\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$$

et d'après (I-38) :

$$\|u_\varepsilon|_\Omega - u\|_{H^1(\Omega)} \leq c_3 k \sqrt{\varepsilon} \text{ ce qui est (I-34)}$$

(I-35) nous est donnée par (I-37). D'où le théorème.

4.3.3. *Troisième problème approché associé à (I-24) :*

$A_\varepsilon(u, v)$ s'écrit :

$$A_\varepsilon(u, v) = a(u|_\Omega, v|_\Omega) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_1} \text{grad } u \cdot \text{grad } \bar{v} \, dx$$

Tous les résultats obtenus en 4.3.2 sont encore valables. Il suffit pour cela de prendre comme norme dans $H^1(\Omega_1)$:

$$\|u\|_{H^1(\Omega_1)}^2 = \int_{\Omega_1} |\text{grad } u|^2 \, dx.$$

Cette norme est équivalente à la norme de $H^1(\Omega_1)$ définie au § II d'après l'inégalité de Friedrichs :

$$\|u\|_{L^2(\Omega_1)}^2 \leq c(\Omega_1) \int_{\Omega_1} |\text{grad } u|^2 \, dx$$

pour toute fonction u nulle sur une partie non vide de la frontière de Ω_1 (ici S).

Remarque I-1. Tout ce qui été dit est encore valable si Ω_1 est adjacent à Ω (figure 2) :

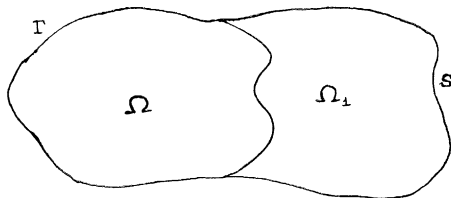


Fig. 2

4.3.4. Problèmes formels équivalents à (Q_ε) :

Nous donnons sans démonstration les problèmes (P_ε) équivalents formellement à (Q_ε) . Il suffit, pour le voir, d'appliquer la formule de Green à chacun des cas.

Pour le premier problème approché correspondant au choix (I-22) de A_{ij} , A_0 , (P_ε) s'écrit :

$$(P_\varepsilon^1) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad Au_\varepsilon = f \text{ pour } x \in \Omega \\ (2) \quad -\Delta u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon = 0 \text{ pour } x \in \Omega_1 \text{ domaine auxiliaire} \\ (3) \quad [u_\varepsilon]_{\Gamma, \Omega} = [u_\varepsilon]_{\Gamma, \Omega_1} \\ (4) \quad \left[\frac{du_\varepsilon}{d\nu_A} \right]_{\Gamma, \Omega} = \left[\frac{du_\varepsilon}{dn} \right]_{\Gamma, \Omega_1} \end{array} \right.$$

où $[u]_{\Gamma, \Omega_i}$ désigne la valeur de u sur Γ prise du côté de Ω_i .

Pour le deuxième choix (I-23) de A_{ij} , A_0 , (P_ε) s'écrit :

$$(P_\varepsilon^2) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad Au_\varepsilon = f \text{ pour } x \in \Omega. \\ (2) \quad -\Delta u_\varepsilon + u_\varepsilon = 0 \text{ pour } x \in \Omega_1. \\ (3) \quad [u_\varepsilon]_{\Gamma, \Omega} = [u_\varepsilon]_{\Gamma, \Omega_1}. \\ (4) \quad \left[\frac{du_\varepsilon}{d\nu_A} \right]_{\Gamma, \Omega} = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{du_\varepsilon}{dn} \right]_{\Gamma, \Omega_1}. \end{array} \right.$$

Pour le choix (I-24) de A_{ij} , A_0 , (2) est simplement remplacée par (2') : $-\Delta u_\varepsilon = 0$ dans Ω_1 , les autres étant inchangées.

4.4. Approximation d'un problème de NEUMANN :

Le problème initial formel s'écrit : (I-11), (I-13) :

$$(I-39) \quad \left\{ \begin{array}{l} Au = f \text{ dans } \Omega \\ \frac{du}{d\nu_A} = 0 \text{ sur } \Gamma = \partial\Omega \end{array} \right. \quad (P)$$

et sous forme variationnelle (I-15), (I-13') :

$$(I-40) \quad \begin{cases} a(u, v) = (f, v) \text{ pour tout } v \in H^1(\Omega) \\ u \in H^1(\Omega) ? \end{cases} \quad (Q)$$

D'après le Résultat I-5, le problème (Q) admet une solution unique. Nous considérons toujours $A_\varepsilon(u, v)$ définie en (I-21) :

$$A_\varepsilon(u, v) = \sum_{i,j=1}^n \int_D A_{ij} D_j u \cdot D_i \bar{v} \, dx + \int_D A_0 u \bar{v} \, dx$$

et le problème (Q_ε) défini par :

$$(I-20) \quad \begin{cases} \text{Déterminer } u_\varepsilon \in H_0^1(D) \text{ tel que :} \\ A_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = (\tilde{f}, v)_{L^2(D)} \text{ pour tout } v \in H_0^1(D). \end{cases}$$

Choix de A_{ij}, A_0 : Nous prendrons :

$$(I-41) \quad A_{ij} = \{a_{ij} \text{ dans } \Omega, \varepsilon \delta_{ij} \text{ dans } \Omega_1\}.$$

$$(I-41') \quad A_0 = \{a_0 \text{ dans } \Omega, \varepsilon \text{ dans } \Omega_1\}.$$

Résultat I-8 : Le problème approché (Q_ε) : ((I-20), (I-41), (I-41')) admet une solution unique pour tout ε positif fixé.

DÉMONSTRATION : Vérifions la coercivité de $A_\varepsilon(u, v)$

$$\operatorname{Re} A_\varepsilon(v, v) = \operatorname{Re} a(v|_\Omega, v|_\Omega) + \varepsilon ((v|_{\Omega_1}, v|_{\Omega_1}))_{H^1(\Omega_1)}$$

$$\geq \inf(\alpha, \alpha_0) \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 + \varepsilon \|v\|_{H^1(\Omega_1)}^2$$

$$\operatorname{Re} A_\varepsilon(v, v) \geq \inf(\alpha, \alpha_0, \varepsilon) \|v\|_{H^1(D)}^2$$

le Résultat suit.

THÉOREME I-6 : *de convergence forte* :

Si u, u_ε sont les solutions respectives de (I-40) et (I-20)

$$(I-42) \quad \|u_\varepsilon|_\Omega - u\|_{H^1(\Omega)} \leq c \sqrt{\varepsilon}$$

$$(I-43) \quad \|u_\varepsilon|_{\Omega_1}\|_{H^1(\Omega_1)} \leq K$$

où c et K sont des constantes indépendantes de ε .

DÉMONSTRATION : Soit $v \in H_0^1(D)$. Cela implique : $v|_\Omega \in H^1(\Omega)$, et $v|_\Omega, v$ vérifient respectivement (I-40) et (I-20) ; d'où par différence,

$$A_\varepsilon(u_\varepsilon, v) - a(u, v|_\Omega) = (\tilde{f}, v)_{L^2(D)} - (f, v|_\Omega)_{L^2(\Omega)} = 0$$

car $\tilde{f} = 0$ dans Ω_1 et $= f$ dans Ω .

Ce qui peut encore s'écrire :

$$(I-44) \quad a(u_\varepsilon|_\Omega, v|_\Omega) + \varepsilon((u_\varepsilon|_{\Omega_1}, v|_{\Omega_1}))_{H^1(\Omega_1)} - a(u, v|_\Omega) = 0$$

pour tout $v \in H_0^1(D)$.

Choisissons v dans (I-44) :

L'ouvert Ω étant supposé très régulier ([8]) il existe un opérateur linéaire continu P (de 1-prolongement) d'après le Résultat I-2,

$$u \rightarrow Pu \quad \text{de :}$$

$$H^1(\Omega) \rightarrow H^1(R^n) \quad \text{tel que :}$$

$$Pu = u \quad \text{dans } \Omega.$$

Soit Ψ , une fois continûment différentiable dans R^n , telle que : $\Psi = \{1 \text{ dans } \Omega, 0 \text{ sur } S \text{ bord de } D\}$. Une telle fonction existe et n'est pas unique.

Posons : $\theta u = \Psi(Pu)$.

$$- \theta u \in H_0^1(D) \text{ car } \begin{cases} Pu \in H^1(R^n) \text{ et } \Psi \text{ est bornée} \\ \Psi = 0 \text{ sur } S = \partial D. \end{cases}$$

$$- \| \theta u \|_{H^1(D)} \leq c_1 \| Pu \|_{H^1(R^n)} \leq c_2 \| u \|_{H^1(\Omega)}$$

$$(I-45) \quad \| \theta u \|_{H^1(D)} \leq c_2 \| u \|_{H^1(\Omega)}.$$

Prenons dans (I-44) : $v = u_\varepsilon - \theta u$. On a bien $v \in H_0^1(D)$ (par construction) ; en reportant il vient :

$$a(u_\varepsilon|_\Omega - u, u_\varepsilon|_\Omega - u) + \varepsilon((u_\varepsilon|_{\Omega_1}, u_\varepsilon|_{\Omega_1} - \theta u|_{\Omega_1})) = 0.$$

D'où :

$$\operatorname{Re} a(u_\varepsilon|_\Omega - u, u_\varepsilon|_\Omega - u) + \varepsilon \| u_\varepsilon|_{\Omega_1} \|^2 - \varepsilon \operatorname{Re}((u_\varepsilon|_{\Omega_1}, \theta u|_{\Omega_1})) = 0.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}((u_\varepsilon|_{\Omega_1}, \theta u|_{\Omega_1})) &= -\frac{1}{2} \| u_\varepsilon|_{\Omega_1} - \theta u \|_{H^1(\Omega_1)}^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \| u_\varepsilon \|_{H^1(\Omega_1)}^2 + \frac{1}{2} \| \theta u \|_{H^1(\Omega_1)}^2 \end{aligned}$$

en remplaçant on obtient :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} a(u_\varepsilon|_\Omega - u, u_\varepsilon|_\Omega - u) + \frac{\varepsilon}{2} \| u_\varepsilon \|_{H^1(\Omega_1)}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \| u_\varepsilon - \theta u \|_{H^1(\Omega_1)}^2 \\ = \frac{\varepsilon}{2} \| \theta u \|_{H^1(\Omega_1)}^2. \end{aligned}$$

Minorons en tenant compte de la coercivité de $a(u, v)$:

$$\beta \| u_\varepsilon|_\Omega - u \|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \| u_\varepsilon \|_{H^1(\Omega_1)}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \| u_\varepsilon - \theta u \|_{H^1(\Omega_1)}^2 \leq \frac{\varepsilon}{2} \| \theta u \|_{H^1(\Omega_1)}^2.$$

D'après (I-45) :

$$\| \theta u \|_{H^1(\Omega_1)} \leq \| \theta u \|_{H^1(D)} \leq c_2 \| u \|_{H^1(\Omega)}.$$

De plus u étant solution de (I-40) :

$$\beta \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \operatorname{Re} a(u, u) \leq |f| \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Soit :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{|f|}{\beta}.$$

Par conséquent :

$$\beta \|u_\varepsilon|_\Omega - u\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|u_\varepsilon - \theta u\|_{H^1(\Omega_1)}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_1)}^2 \leq c_3 \varepsilon$$

où

$$c_3 = c_2^2 \frac{|f|^2}{2\beta^2}.$$

On en déduit :

$$(I-42) \quad \|u_\varepsilon|_\Omega - u\|_{H^1(\Omega)} \leq c \sqrt{\varepsilon} \quad \text{où} \quad c = \frac{c^2 |f|}{\beta \sqrt{2\beta}}.$$

$$(I-43) \quad \|u_\varepsilon|_{\Omega_1}\|_{H^1(\Omega_1)} \leq K \quad \text{avec} \quad K = c_2 \frac{|f|}{\beta}$$

ce qui démontre le Théorème.

En conclusion en faisant tendre ε vers zéro, on a approché le problème de Neumann (Q) par un problème de Dirichlet résolu dans un domaine plus grand D , tel que l'approximation soit convergente.

Problème formel équivalent à (Q_ε) (I-20), (I-41), (I-41')

On vérifie par application formelle de la formule de Green que (Q_ε) est équivalent à :

$$(P_\varepsilon) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad Au_\varepsilon = f \text{ dans } \Omega. \\ (2) \quad -Au_\varepsilon + u_\varepsilon = 0 \text{ dans } \Omega_1. \\ (3) \quad [u_\varepsilon]_{\Gamma, \Omega} = [u_\varepsilon]_{\Gamma, \Omega_1}. \\ (4) \quad \left[\frac{du_\varepsilon}{d\nu_A} \right]_{\Gamma, \Omega} = \varepsilon \left[\frac{du_\varepsilon}{dn} \right]_{\Gamma, \Omega_1}. \end{array} \right.$$

Remarque I-2 : D'autres choix de A_{ij} , A_0 sont possibles, pour lesquels on obtient des résultats de convergence moins forts ; par

exemple :

$$\begin{cases} A_{ij} = \{a_{ij} \text{ dans } \Omega, \delta_{ij} \text{ dans } \Omega_1\} \\ A_0 = \{a_0 \text{ dans } \Omega, \varepsilon \text{ dans } \Omega_1\} \\ A_{ij} = \{a_{ij} \text{ dans } \Omega, \varepsilon \delta_{ij} \text{ dans } \Omega_1\} \\ A_0 = \{a_0 \text{ dans } \Omega, 0 \text{ dans } \Omega_1\}. \end{cases}$$

4.5. Approximation d'un problème mêlé :

Problème initial : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cdot (P)$ s'écrit :

$$(I-11) \quad Au = f \text{ dans } \Omega$$

$$(I-14) \quad u = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \quad \frac{du}{d\nu_A} = 0 \text{ sur } \Gamma_2$$

et le problème variationnel associé (Q) :

$$(I-46) \quad \begin{cases} a(u, v) = (f, v)_{L^2(\Omega)} & \text{pour tout } v \in V_0, u \in V_0 ? \\ \text{avec } V_0 = \{v \mid v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}. \end{cases}$$

On a démontré que (Q) admettait une solution unique.

Problème approché (Q_ε) :

Soit Ω_1 ouvert $\subset \mathbb{C} \bar{\Omega}$ tel que Ω_1 ait Γ_1 comme frontière commune avec Ω . Puis Ω_2 ouvert $\subset \mathbb{C} (\bar{\Omega} \cup \bar{\Omega}_1)$, de frontière extérieure S .

Posons :

$$D = \Omega \cup \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \overset{0}{\Gamma_1} \cup \overset{0}{\Sigma} \cup \overset{0}{\Gamma_2}. \quad (\text{figure 3})$$

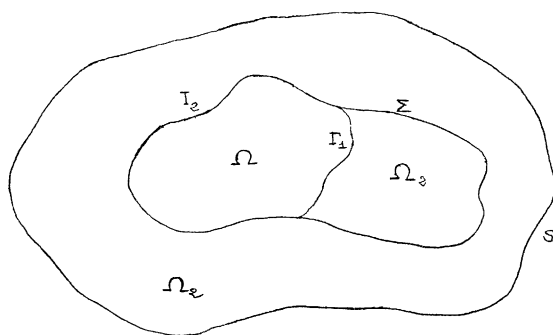


Fig. 3

Considérons toujours $A_\varepsilon(u, v)$ défini en (I-21). Le problème approché variationnel (Q_ε) s'écrit :

$$(I-47) \quad \begin{cases} \text{Déterminer } u_\varepsilon \in H_0^1(D) \text{ tel que :} \\ A_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = (f, v)_{L^2(D)} \text{ pour tout } v \in H_0^1(D) \end{cases}$$

où :

$$(I-48) \quad A_{ij} = \left\{ a_{ij} \text{ dans } \Omega, \frac{1}{\varepsilon} \delta_{ij} \text{ dans } \Omega_1, \varepsilon \delta_{ij} \text{ dans } \Omega_2 \right\}$$

$$(I-49) \quad A_0 = \left\{ a_0 \text{ dans } \Omega, \frac{1}{\varepsilon} \text{ dans } \Omega_1, \varepsilon \text{ dans } \Omega_2 \right\}.$$

Résultat I-9 : (Q_ε) admet une solution unique pour tout ε positif fixé.

DÉMONSTRATION : On vérifie les hypothèses du théorème I-2. La seule chose non triviale est la coercivité ; mais on a :

$$\operatorname{Re} A_\varepsilon(v, v) \geq \inf \left(\alpha, \alpha_0, \varepsilon, \frac{1}{\varepsilon} \right) \|v\|_{H^1(D)}^2$$

d'où le résultat pour ε fixé.

On démontre alors le théorème suivant (voir [9]).

THÉORÈME I-7. de convergence faible : Quand $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$(I-50) \quad u_\varepsilon|_\Omega \rightharpoonup u \text{ dans } H^1(\Omega) \text{ faible.}$$

$$(I-51) \quad \frac{u_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}|_{\Omega_1} \rightharpoonup g \text{ dans } H^1(\Omega_1) \text{ faible.}$$

$$(I-52) \quad \sqrt{\varepsilon} u_\varepsilon|_{\Omega_2} \rightharpoonup h \text{ dans } H^1(\Omega_2) \text{ faible}$$

où g et h sont des fonctions de $H^1(\Omega_1)$ et $H^1(\Omega_2)$ respectivement.

Démontrons à partir de ce théorème le :

THÉOREME I-8. *de convergence forte* : Quand $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$(I-53) \quad u_\varepsilon|_\Omega \rightarrow u \text{ dans } H^1(\Omega) \text{ fort}$$

$$(I-54) \quad \frac{u_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}|_{\Omega_1} \rightarrow 0 \text{ dans } H^1(\Omega_1) \text{ fort}$$

$$(I-55) \quad \sqrt{\varepsilon} u_\varepsilon|_{\Omega_2} \rightarrow 0 \text{ dans } H^1(\Omega_2) \text{ fort.}$$

DÉMONSTRATION : Soit u solution de (I-46) et $\tilde{u}$ défini dans $H^1(\Omega \cup \overset{0}{\Omega_1} \cup \overset{0}{\Gamma_1})$ par :

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \{u \text{ dans } \Omega, 0 \text{ dans } \Omega_1\} \\ \implies \tilde{u} &= 0 \text{ sur } \Sigma. \end{aligned}$$

Posons $\Omega^* = \Omega \cup \Omega_1 \cup \overset{0}{\Gamma_1}$ et prolongeons $\tilde{u}$ de Ω^* à D :

Il existe (Résultat I-2) une application linéaire continue P

$$v \mapsto Pv$$

de $H^1(\Omega^*) \rightarrow H^1(R^n)$ telle que : $Pv = v$ dans Ω^*
(pour Ω^* , donc Ω et Ω_1 assez réguliers).

Soit $\Psi \in C^1(D)$ telle que $\Psi = \begin{cases} 1 & \text{sur } \Omega^* \\ 0 & \text{sur } S = \partial D \end{cases}$

et posons :

$$\theta u = \Psi \cdot (P\tilde{u})$$

$\theta u \in H_0^1(D)$ d'après le choix de Ψ et le fait que $P\tilde{u} \in H^1(R^n)$

$$\theta u = P\tilde{u} = u \text{ sur } \Omega.$$

$$\theta u = \Psi(P\tilde{u}) = 0 \text{ sur } \Omega_1 \text{ car } \tilde{u} = 0 \text{ dans } \Omega_1.$$

Considérons Z_ε :

$$Z_\varepsilon = A_\varepsilon(u_\varepsilon - \theta u, u_\varepsilon - \theta u)$$

$$Z_\varepsilon = A_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) - 2 \operatorname{Re} A_\varepsilon(u_\varepsilon, \theta u) + A_\varepsilon(\theta u, \theta u)$$

u_ε étant solution de (I-47) on a :

$$\operatorname{Re} Z_\varepsilon = \operatorname{Re} (\tilde{f}, u_\varepsilon) - 2 \operatorname{Re} (\tilde{f}, \theta u) + \operatorname{Re} A_\varepsilon (\theta u, \theta u).$$

Montrons que $\operatorname{Re} Z_\varepsilon \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$:

— D'après (I-50) :

$$(\tilde{f}, u_\varepsilon)_{L^2(D)} = (f, u_\varepsilon|_\Omega)_{L^2(\Omega)} \rightarrow (f, u)_{L^2(\Omega)}$$

$$- (\tilde{f}, \theta u)_{L^2(D)} = (f, u)_{L^2(\Omega)} \text{ car } \tilde{f} = 0 \text{ en dehors de } \Omega.$$

$$- \operatorname{Re} A_\varepsilon (\theta u, \theta u) = \operatorname{Re} a(u, u) + \varepsilon \|\theta u\|_{H^1(\Omega_2)}^2$$

car $\theta u = u$ dans Ω , 0 dans Ω_1 .

Par conséquent :

$\operatorname{Re} A_\varepsilon (\theta u, \theta u) \rightarrow \operatorname{Re} a(u, u) = \operatorname{Re} (f, u)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.
d'où :

$$\operatorname{Re} Z_\varepsilon \rightarrow \operatorname{Re} (f, u) - 2 \operatorname{Re} (f, u) + \operatorname{Re} (f, u) = 0.$$

Minorons $\operatorname{Re} Z_\varepsilon$:

$$\operatorname{Re} Z_\varepsilon = \operatorname{Re} a(u_\varepsilon|_\Omega - u, u_\varepsilon|_\Omega - u) + \|\sqrt{\varepsilon}(u_\varepsilon - \theta u)\|_{H^1(\Omega_2)}^2 + \left\| \frac{u_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} \right\|_{H^1(\Omega_1)}^2$$

$$\operatorname{Re} Z_\varepsilon \geq \beta \|u_\varepsilon|_\Omega - u\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\sqrt{\varepsilon}(u_\varepsilon - \theta u)\|_{H^1(\Omega_2)}^2 + \left\| \frac{u_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} \right\|_{H^1(\Omega_1)}^2.$$

D'où (I-53), (I-54), (I-55) puisque $\operatorname{Re} Z_\varepsilon \rightarrow 0$.

V. Généralisation aux Problèmes aux limites d'ordre $2m$.

Soit l'opérateur :

$$(I-56) \quad A = \sum_{|p|, |q| \leq m} (-1)^{|p|} D^p (a_{pq} D^q) \text{ défini dans l'ouvert } \Omega$$

$$\text{où } D^p u = \frac{\partial^p u}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}} \text{ avec } |p| = p_1 + \dots + p_n.$$

et $a(u, v)$ la forme sesquilinéaire associée :

$$(I-57) \quad a(u, v) = \sum_{|p|, |q| \leq m} \int_{\Omega} a_{pq} D^p u \cdot D^q \bar{v} dx.$$

Hypothèse R : $a_{pq} \in L^{\infty}(\Omega)$ pour tout p, q ; $f \in L^2(\Omega)$.

Les problèmes aux limites *homogènes* associés à A s'écrivent sous forme variationnelle :

$$(I-58) \quad \begin{cases} a(u, v) = (f, v)_{L^2(\Omega)} \text{ pour tout } v \in V \\ u \text{ cherché dans } V. \end{cases} \quad (Q)$$

où V est un espace de Hilbert, sous espace vectoriel fermé de $H^m(\Omega)$ tel que :

$$H_0^m(\Omega) \subset V \subset H^m(\Omega).$$

Résultat I-10 : Si $a(u, v)$ est V -coercive le problème (Q) admet une solution unique.

Nous ne considérons ici que les deux cas limites $V = H_0^m(\Omega)$ et $V = H^m(\Omega)$ correspondant au problème de DIRICHLET et à un problème de NEUMANN.

5.1. *Problème initial formel (P)* (voir [13]).

Le problème variationnel (I-58) équivaut à :

$$(I-59) \quad Au = f \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ (} Au \text{ calculé au sens de } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ appartient à } L^2(\Omega) \text{ et égale } f)$$

$$(I-60) \quad \int_{\Omega} Au \cdot \bar{v} dx = a(u, v) \text{ pour tout } u, v \in V.$$

Appliquons la formule de Green (formellement) :

$$(I-61) \quad \int_{\Omega} Au \cdot \bar{v} dx = a(u, v) + \sum_{j=0}^{m-1} \langle S_j u, \gamma_j \bar{v} \rangle$$

où les S_j sont des opérateurs d'ordre $2m - j - 1$ sur Γ et $\gamma_j v = \frac{d^j u}{dn_j}$

est la dérivée normale d'ordre j de v sur Γ

$$\text{avec : } \begin{cases} \gamma_j v \in H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma) \text{ et } S_j u \in H^{-m+j+\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ 0 \leq j \leq m-1. \end{cases}$$

Pour $V = H_0^m(\Omega)$, la somme de droite est nulle dans (I-61) et (P) s'écrit :

$$(I-62) \quad \begin{cases} Au = f \text{ dans } \Omega \\ \gamma_j u = 0 \text{ sur } \Gamma, 0 \leq j \leq m-1 \end{cases}$$

(correspondant à l'appartenance de u à $H_0^m(\Omega)$).

Pour $V = H^m(\Omega)$ (un problème de NEUMANN)

$$S_j u = 0 \text{ pour } 0 \leq j \leq m-1, \text{ sur } \Gamma$$

et (P) s'écrit :

$$(I-63) \quad \begin{cases} Au = f \text{ dans } L^2(\Omega) \\ S_j u = 0, 0 \leq j \leq m-1 \text{ sur } \Gamma. \end{cases}$$

5.2. Les problèmes approchés (Q_ε) :

Nous approchons maintenant (I-62) et (I-63) par un problème de DIRICHLET résolu dans un domaine plus grand $D \supset \Omega$. (figure 4)

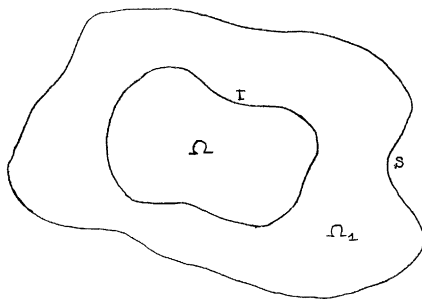


Fig. 4

Soit toujours Ω_1 le « domaine auxiliaire » et $D = \Omega \cup \overset{\circ}{\Gamma} \cup \Omega_1$; posons :

$$(I-64) \quad A_\varepsilon(u, v) = \sum_{|p|, |q| \leq m} \int_D A_{pq} D_p u \cdot D_q \bar{v} dx.$$

Le problème approché variationnel (Q_ε) s'écrira :

$$(I-65) \quad \begin{cases} A_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = (f, v)_{L^2(D)} \text{ pour tout } v \in H_0^m(D). \\ u_\varepsilon \text{ cherché dans } H_0^m(D) \end{cases}$$

les coefficients A_{pq} dépendant des problèmes (P) considérés.

5.3. *Problème approché correspondant au problème de DIRICHLET* (I-62) :

On prendra par exemple :

$$(I-66) \quad A_{pq} = \left\{ a_{pq} \text{ dans } \Omega, \frac{1}{\varepsilon} \delta_{pq} \text{ dans } \Omega_1 \right\}$$

où $\delta_{pq} = \{1 \text{ si } p = q, 0 \text{ si } p \neq q\}$.

On démontre de manière analogue au § III les résultats suivants pour (Q_ε) défini par (I-65)-(I-66) :

Résultat I-11 : Pour tout ε positif fixé (Q_ε) admet une solution unique.

THÉORÈME I-9 : Quand ε tend vers 0 :

$$(I-67) \quad \|u_\varepsilon|_\Omega - u\|_{H^m(\Omega)} \leq C \sqrt{\varepsilon}$$

$$(I-68) \quad \|u_\varepsilon|_{\Omega_1}\|_{H^m(\Omega_1)} \leq C_1 \sqrt{\varepsilon} \text{ où } C \text{ et } C_1 \text{ sont des constantes.}$$

5.4. *Problème approché correspondant au problème de NEUMANN* (I-63) :

On choisit pour A_{pq} :

$$(I-69) \quad A_{pq} = \{a_{pq} \text{ dans } \Omega, \varepsilon \delta_{pq} \text{ dans } \Omega_1\}$$

(Q_ε) devient (I-65), (I-69). On démontre encore les résultats :

Résultat I-12 : Pour tout ε positif fixé le problème approché (Q_ε) admet une solution unique.

THÉORÈME I-10 : quand ε tend vers 0 :

$$(I-70) \quad \|u_\varepsilon|_\Omega - u\|_{H^m(\Omega)} \leq C \sqrt{\varepsilon}$$

$$(I-71) \quad \|u_\varepsilon|_{\Omega_1}\|_{H^m(\Omega_1)} \leq K \text{ où } C \text{ et } K \text{ sont des constantes.}$$

VI. Exemples correspondant à l'opérateur biharmonique Δ^2 :

6.1. PROBLÈME DE DIRICHLET :

Formellement considérons le problème aux limites suivant :

$$(I-72) \quad \begin{cases} \Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = f \text{ dans } \Omega ; f \in L^2(\Omega). \\ u = 0 \text{ et } \frac{du}{dn} = 0 \text{ sur } \Gamma \text{ frontière de } \Omega. \end{cases}$$

Posons le problème (I-72) de façon précise, sous forme variationnelle.

Soit : $H(\Delta, \Omega) = \{u \mid u, \Delta u \in L^2(\Omega)\}$: Δu étant pris au sens des distributions. On montre que c'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$(I-73) \quad ((u, v))_{H(\Delta, \Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)}$$

et qu'on peut définir $u|_\Gamma$ et $\frac{du}{dn}|_\Gamma$ dans $H^{3/2}(\Gamma)$ et $H^{1/2}(\Gamma)$ respectivement pour tout $u \in H(\Delta, \Omega)$.

Posons

$$V_0 = \left\{ u \mid u \in H(\Delta, \Omega), u = 0 \text{ et } \frac{du}{dn} = 0 \text{ sur } \Gamma \right\}$$

V_0 muni de la norme induite par (I-73) est isomorphe à $H_0^2(\Omega)$. En effet pour tout $u \in H_0^2(\Omega)$ on a :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|\text{grad } u\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\|\text{grad } u\|_{L^2(\Omega)} \leq c_1 \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$$

d'après l'inégalité de Friedrichs appliquée à u et $\text{grad } u$.

Le problème variationnel (Q) s'écrit alors :

$$(I-74) \quad \begin{cases} \text{Déterminer } u \in V_0 \text{ tel que :} \\ (\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)} = (f, v)_{L^2(\Omega)} \text{ pour tout } v \in V_0. \end{cases}$$

Résultat I-13. Le problème (I-74) admet une solution unique.

DÉMONSTRATION : il suffit de vérifier les hypothèses du théorème I-2 et en particulier la coercivité :

$$\begin{aligned} (\Delta v, \Delta v)_{L^2(\Omega)} &= \|\Delta v\|^2 \geq \frac{1}{2} \left(\|\Delta v\|^2 + \frac{1}{cc_1} \|v\|^2 \right) \\ \|\Delta v\|^2 &\geq \inf \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2cc_1} \right) \|v\|_{H(\Delta, \Omega)}^2. \end{aligned}$$

Construisons maintenant le problème approché (Q_ε) .

$$\text{Soit } A_\varepsilon = \left\{ 1 \text{ dans } \Omega, \frac{1}{\varepsilon} \text{ dans } \Omega_1 \right\}$$

$$B_\varepsilon = \left\{ 1 \text{ dans } \Omega, \frac{1}{\varepsilon} \text{ ou } 0 \text{ dans } \Omega_1 \right\}.$$

On pose :

$$(I-75) \quad A_\varepsilon(u, v) = \int_D (A_\varepsilon \cdot \Delta u_\varepsilon \cdot \Delta \bar{v} + B_\varepsilon u_\varepsilon \bar{v}) dx.$$

Problème (Q_ε) : Déterminer $u_\varepsilon \in V_0(D)$ tel que :

$$(I-76) \quad A_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = (\tilde{f}, v)_{L^2(D)} \text{ pour tout } v \in V_0(D)$$

où $V_0(D)$ désigne l'analogue de V_0 mais dans D au lieu de Ω .

On démontre de façon analogue à ce qui précède :

Résultat I-14 : Pour $\varepsilon > 0$ fixé, le problème (Q_ε) admet une solution unique.

THÉORÈME I-11 : Quand $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$(I-77) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|u_\varepsilon|_\Omega - u\|_{H(\Delta, \Omega)} \leq C_3 \sqrt{\varepsilon} \\ \|u_\varepsilon|_{\Omega_1}\|_{H(\Delta, \Omega_1)} \leq C_4 \sqrt{\varepsilon}. \end{array} \right.$$

6.2. PROBLÈME DE NEUMANN :

Considérons le problème initial (P) (*formel*) :

$$(I-78) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta^2 u + \lambda u = f \text{ dans } \Omega, \lambda > 0, f \in L^2(\Omega). \\ \frac{\partial(\Delta u)}{\partial n} = 0 \text{ et } \Delta u = 0 \text{ sur } \Gamma = \partial\Omega. \end{array} \right.$$

On montre que (I-78) est équivalent formellement au problème variationnel (Q) :

$$(I-79) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H(\Delta, \Omega) \text{ tel que :} \\ a(u, v) = \int_{\Omega} (\Delta u \Delta \bar{v} + \lambda u \bar{v}) dx = \int_{\Omega} f \cdot \bar{v} dx \text{ pour tout } v \in H(\Delta, \Omega). \end{array} \right.$$

Résultat I-15 : Le problème (I-79) admet une solution unique.

Problème approché (Q_ε) :

Soit : $A_\varepsilon = \{1 \text{ dans } \Omega, \varepsilon \text{ dans } \Omega_1\}$

$B_\varepsilon = \{1 \text{ dans } \Omega, \varepsilon \text{ dans } \Omega_1\}$

et $A_\varepsilon(u, v) = \int_D (A_\varepsilon \Delta u \Delta \bar{v} + \lambda B_\varepsilon u \bar{v}) dx \cdot (Q_\varepsilon)$ s'écrit :

$$(I-80) \quad \begin{cases} \text{Déterminer } u_\varepsilon \in V_0(D) \text{ tel que :} \\ A_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = (\tilde{f}, v)_{L^2(D)} \text{ pour tout } v \in V_0(D). \end{cases}$$

On montre encore les deux résultats :

Résultat I-16 : (Q_ε) admet une solution unique pour ε positif fixé.

THÉORÈME I-12 : quand $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$(I-81) \quad \begin{cases} u_\varepsilon|_\Omega \rightarrow u \text{ dans } H(\Delta, \Omega) \text{ fort.} \\ \sqrt{\varepsilon} u_\varepsilon|_{\Omega_1} \rightarrow 0 \text{ dans } H(\Delta, \Omega_1) \text{ fort.} \end{cases}$$

VII. Conclusion.

On vient donc de démontrer qu'à tout problème aux limites elliptique, homogène, posé dans un domaine Ω , on peut associer un problème de DIRICHLET à coefficients discontinus, résolu dans un domaine plus simple, et dont la solution approche celle du problème initial.

On pourrait encore généraliser cette méthode pour d'autres conditions aux limites (en particulier non homogènes) ainsi que pour des problèmes de transmission [9]. Une autre possibilité est donnée par la remarque qui suit.

VIII. Remarque sur la régularisation des coefficients :

Il peut être intéressant, dans certains cas, de ne pas introduire de coefficients discontinus dans le problème approché (Q_ε) . Par exemple si a_{ij} et a_0 sont donnés de classe $C^p(\Omega)^1$ ($p \geq 0$), il est possible de construire A_{ij}, A_0 appartenant à $C^p(D)$.

¹⁾ $C^p(\Omega)$ = espace des fonctions p fois continûment différentiable dans Ω .

Les résultats de convergence sont plus faibles mais en appliquant une méthode de résolution appropriée (méthode variationnelle des différences finies [4]) les résultats numériques sont bons.

Un des avantages de ce procédé est que la méthode d'extrapolation de RICHARDSON ([6], [16]) s'applique ce qui améliore nettement les résultats.

Nous donnons dans le cas du problème de DIRICHLET pour l'opérateur self-adjoint (I-7) les résultats théoriques correspondants.

Reprenons le problème variationnel (Q) qui lui correspond :

$$(I-16) \quad \begin{cases} \text{Déterminer } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u, v) = (f, v)_{L^2(\Omega)} \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Nous conservons l'hypothèse de coercivité (I-9), (I-10) ; (I-8) étant remplacée par :

Hypothèse R 1 : $a_{ij}, a_0 \in C^p(\Omega), p \geq 0, f \in C^p(\Omega).$

sous ces hypothèses (I-16) admet une solution unique.

Problème approché (Q_ε) :

En gardant les mêmes notations (Ω_1 domaine auxiliaire, D domaine complété...) nous ferons l'hypothèse suivante, vérifiée si $\Gamma = \partial\Omega$ est assez régulière.

Hypothèse R2 : il existe des fonctions A_{ij}, A_0, F de classe $C^p(D)$ prolongeant a_{ij}, a_0, f à D et vérifiant :

$$(I-82) \quad A_{ij} = a_{ij}, A_0 = a_0, F = f \text{ dans } \Omega.$$

$$(I-83) \quad \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \xi_j \bar{\xi}_i \geq \alpha' \sum_{i=1}^n |\xi_i|^2, \alpha' > 0, \text{ dans } D.$$

$$(I-84) \quad \operatorname{Re} A_0(x) \geq 0.$$

Hypothèse R3 : Il existe une fonction $g(x)$ définie dans $\bar{\Omega}_1$ telle que :

$$D^k g(x) = 0 \text{ sur } \Gamma = \partial\Omega \text{ où } |k| \leq p$$

$$g(x) \in C^p(\Omega_1)$$

$$g(x) \geq 0.$$

Le problème approché peut s'écrire :

$$(I.85) \quad \begin{cases} A_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = (F, v)_{L^2(D)} \text{ pour tout } v \in H_0^1(D) \\ u \in H_0^1(D) ? \end{cases}$$

avec :

$$(I.86) \quad A_\varepsilon(u, v) = \sum_{i,j=1}^n \int_D A_{ij} D_j u \cdot D_i \bar{v} \, dx + \int_D A_0 u \bar{v} \, dx + \int_{\Omega_1} g(x) u \bar{v} \, dx.$$

Sous les hypothèses $R, R1, R2, R3$, on a :

Résultat I-17 : Pour $\varepsilon > 0$ fixé, le problème (Q_ε) admet une solution unique.

THÉORÈME I-13 : Quand $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$u_\varepsilon|_\Omega \rightarrow u \text{ dans } H^1(\Omega) \text{ fort.}$$

$$\sqrt{g} \cdot \frac{u_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(\Omega_1) \text{ fort.}$$

Les démonstrations sont analogues à celles exposées précédemment. Nous ne les ferons pas.

On est donc ramené à résoudre un problème de DIRICHLET dans D à coefficients de classe $C^p(D)$. D'autres prolongements sont possibles ; par exemple :

$$A_{ij} = \left\{ a_{ij} \text{ dans } \Omega, O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \text{ dans } \Omega_1, A_{ij} \in C^p(D) \right\}.$$

Tout ceci s'applique aux problèmes de NEUMANN et mêlés.

CHAPITRE II

APPLICATIONS. CAS ELLIPTIQUE

I. Généralités :

Les méthodes exposées au chapitre I donnent lieu à deux sortes d'applications. La première, étudiée par SAULIEV [19], consiste à composer un « programme universel » permettant d'approcher toute une classe de problèmes elliptiques homogènes par l'un des procédés précédents. Ceci présente un intérêt spécial lorsqu'on a à résoudre des problèmes de même type un grand nombre de fois (par exemple pour l'étude du comportement de la solution quand on déplace la frontière [24]). Dans le cas traité, SAULIEV considère la classe de tous les problèmes de Dirichlet dont la frontière est formée de segments de droites parallèles aux axes.

La seconde possibilité consiste à approcher un problème donné, de type elliptique et homogène, par un autre résolu dans un domaine plus simple. Ceci permet de simplifier la programmation dans certains cas et de rendre plus régulier le conditionnement des matrices.

Nous donnerons d'abord quelques exemples d'approximation de problèmes simples, en dimension deux, pour lesquels nous construirons le problème approché et comparerons les résultats numériques obtenus par résolution des problèmes initial et approché.

Puis au paragraphe VII nous décrirons brièvement le programme universel de SAULIEV [19].

II. Approximation d'un problème de DIRICHLET dans un trapèze.

2.1. *Problème initial* : (cf. figure 1).

Soit Ω le trapèze $OABC$ et u la solution de :

$$(II-1) \quad \begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ u|_r = 0 \end{cases}$$

où

$$\Gamma = \partial\Omega = (0A) \cup (AB) \cup (BC) \cup (CO)$$

Nous nous sommes donné la solution exacte :

$$u(x, y) = y(1-x) \left(\frac{1}{2} - y \right) (x-y)$$

d'où :

$$\begin{aligned} f(x, y) = 2y \left(\frac{1}{2} - y \right) - 2(1-x) \left(3y - x - \frac{1}{2} \right) \\ + y(1-x) \left(\frac{1}{2} - y \right) (x-y). \end{aligned}$$

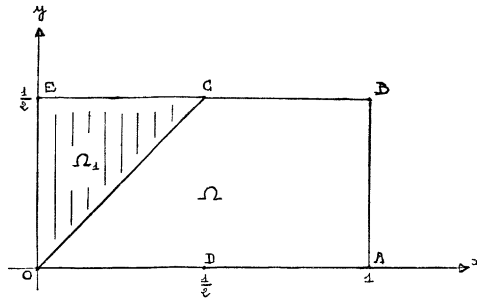


Figure 1

Problème variationnel (Q) associé :

$$(II-2) \quad \int_{\Omega} \text{grad } u \text{ grad } \bar{v} \, dx + \int_{\Omega} u \bar{v} \, dx = \int_{\Omega} f \bar{v} \, dx$$

pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$; u cherché dans $H_0^1(\Omega)$.

2.2. Le problème approché :

Introduisons le « triangle auxiliaire » $\Omega_1 = OEC$ de façon à obtenir pour D , domaine complété, le rectangle $OABE$.

Nous avons pris le choix (I-22) des coefficients A_{ij} , A_0 , ce qui donne pour (P_ε) (formel) :

$$(II.3) \quad \begin{cases} -\Delta u_\varepsilon + u_\varepsilon + \frac{N u_\varepsilon}{\varepsilon} = \tilde{f} \text{ dans } D \\ u_\varepsilon|_S = 0 \text{ où } S = \partial D \end{cases}$$

$$\text{avec : } N = \begin{cases} 0 & \text{dans } \Omega \\ 1 & \text{dans } \Omega_1 \end{cases} \quad \tilde{f} = \begin{cases} f(x, y) & \text{dans } \Omega. \\ 0 & \text{dans } \Omega_1. \end{cases}$$

Problème variationnel (Q_ε) correspondant :

$$(II.4) \quad \int_D \text{grad } u_\varepsilon \text{ grad } \bar{v} \, dx + \int_D u_\varepsilon \bar{v} \, dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_1} u_\varepsilon \bar{v} \, dx = \int_D \tilde{f} \bar{v} \, dx$$

pour tout $v \in H_0^1(D)$; u_ε cherché dans $H_0^1(D)$.

On vérifie sans difficulté les hypothèses du théorème d'existence et unicité pour (Q) et (Q_ε) ainsi que du théorème de convergence forte de u_ε vers u quand ε tend vers zéro.

Les deux problèmes (Q) et (Q_ε) ont été résolus par la méthode des différences finies en appliquant un réseau de pas $h = \frac{1}{14}$, ce qui donne des systèmes d'ordre 57 et 78 respectivement. Les formules d'approximation s'écrivent pour (P) :

$$- \frac{u(M+h_1) + u(M+h_2) + u(M-h_1) + u(M-h_2) - 4u(M)}{h^2} + \\ + u(M) = f(M) \text{ avec } M \in \Omega_h$$

et pour (Q_ε) :

$$- \frac{u_\varepsilon(M+h_1) + u_\varepsilon(M+h_2) + u_\varepsilon(M-h_1) + u_\varepsilon(M-h_2) - 4u_\varepsilon(M)}{h^2} + \\ + u_\varepsilon(M) + \frac{N(M)}{\varepsilon} u_\varepsilon(M) = \tilde{f}(M) \text{ avec } M \in D_h$$

où $h_1 = \Delta x$, $h_2 = \Delta y$, $h = h_1 = h_2$ (réseau uniforme)

$$\text{et } N(M) = \left\{ 0 \text{ dans } \Omega, 1 \text{ dans } \Omega_1, \frac{1}{2} \text{ sur } 0C \right\}$$

$$\tilde{f}(M) = \left\{ f(M) \text{ dans } \Omega, 0 \text{ dans } \Omega_1, \frac{1}{2} f(M) \text{ sur } 0C \right\}$$

Ω_h et D_h étant les domaines approchés.

2.3. Résultats numériques :

Il se trouve, après calcul, que la solution approchée par les différences finies de (Q) coïncide avec la solution exacte aux points du réseau Ω_h . Le problème approché (Q_ε) a été résolu pour deux valeurs de ε :

$$\varepsilon = 10^{-4} \text{ et } \varepsilon = 10^{-6}.$$

On obtient :

	$\varepsilon = 10^{-4}$	$\varepsilon = 10^{-6}$
$\text{Max}_{x \in \Omega_h} \left \frac{u_\varepsilon^h - u}{u} \right $	3 ‰	0,07 ‰
erreur relative moyenne	0,5 ‰	0,005 ‰
$\text{Max } u_\varepsilon \text{ sur } 0C \text{ où } u = 0$	0,024	0,00025
$\text{Max } u_\varepsilon \text{ dans } \Omega_1$	0,08	0,00009

- on constate que l'erreur relative est maximale au voisinage de la frontière commune $0C$ entre Ω et Ω_1 , et que u_ε décroît très vite dans Ω_1 dès qu'on s'en éloigne.

- le choix $\varepsilon = 10^{-4}$ est insuffisant pour obtenir une bonne précision. Il faut prendre ε de l'ordre de h^4 pour ne pas introduire d'erreur supplémentaire lors de la résolution.
- le système associé à (Q_ε) n'a que certains coefficients diagonaux dépendant de ε (ceux correspondant à $\bar{\Omega}_1$), tous les autres étant les mêmes dans D ce qui simplifie la programmation.

III. Approximation d'un problème de DIRICHLET dans un triangle avec coefficients régularisés et extrapolation :

3.1. *Le problème initial* : (P) (figure 2).

Soit Ω le triangle OAC et u solution de :

$$(II-5) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u|_{\Gamma} = 0 & \text{où } \Gamma = (OA) \cup (AC) \cup (CO) \end{cases}$$

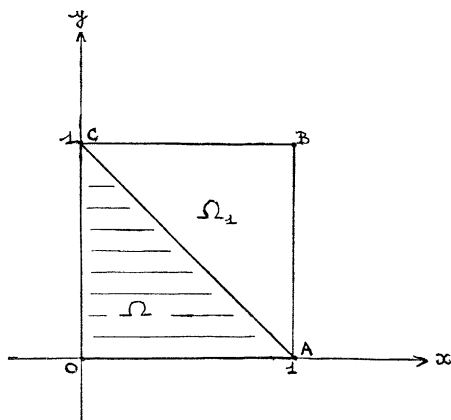


Fig 2

pour lequel nous avons pris :

$$(II-6) \quad u(x, y) = x^3 y^3 (1 - x - y)$$

d'où :

$$f(x, y) = 6xy(x + y - (x^2 + y^2)(1 - x - y))$$

Problème variationnel (Q) associé :

$$(II-7) \quad \int_{\Omega} \text{grad } u \text{ grad } \bar{v} \, dx = \int_{\Omega} f \bar{v} \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

u cherché dans $H_0^1(\Omega)$.

Nous avons testé pour ce problème la méthode d'extrapolation de Richardson (voir [6] pour une étude détaillée) qui fournit des améliorations de convergence très intéressantes dans ce cas. En utilisant le schéma de Neville on obtient les formules d'extrapolation suivantes sur deux, trois et quatre pas :

$$(II-8) \quad \text{Solution extrapolée sur } h \text{ et } \frac{h}{2} = \left(4 u \left(\frac{h}{2} \right) - u_h \right) / 3$$

$$(II-9) \quad \text{Sol. extrap. sur } h, \frac{h}{2}, \frac{h}{4} = \left(64 u \left(\frac{h}{4} \right) - 20 u \left(\frac{h}{2} \right) + u_h \right) / 45$$

$$(II-10) \quad \text{Sol. extrap. sur } h, \frac{h}{2}, \frac{h}{4}, \frac{h}{8} = \\ = \left(4096 u \left(\frac{h}{8} \right) - 1344 u \left(\frac{h}{4} \right) + 84 u \left(\frac{h}{2} \right) - u_h \right) / 2835.$$

Nous avons pris $h = \frac{1}{4}$ et $h = \frac{1}{3}$ ce qui nécessite la résolution des systèmes correspondant à : $h = \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ et $h = \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}$ respectivement. Nous donnerons quelques résultats numériques obtenus pour $h = \frac{1}{4}$. Des résultats analogues ont été obtenus pour $h = \frac{1}{3}$.

Les problèmes approchés ont été construits par la méthode variationnelle des différences finies qui consiste à chercher u_h sous la forme : $u_h = \sum_{M \in \Omega_h} \xi_M W_M$ où W_M est la fonction caractéristique du carré $\sigma_h(M)$ de centre M et côté h , et Ω_h est l'ensemble des points M du réseau tels que :

$$\sigma_h(M) \cup \sigma_h \left(M \pm \frac{h_i}{2} \right) \subset \Omega, \quad i = 1, 2; \text{ cf. [4].}$$

Le système approché devient :

$$(II-11) \quad \sum_{P \in \Omega_h} \xi_P a_h(W_P, W_M) = f_h(M), \quad M \in \Omega_h$$

$$\text{avec : } a_h(u_h, v_h) = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \delta_i u_h \delta_i v_h dx dy$$

$$f_h(M) = \int_{\Omega \cap \sigma_h(M)} f(x, y) dx dy \quad \delta_i u_h(x) = \left(u_h \left(x + \frac{h_i}{2} \right) - u_h \left(x - \frac{h_i}{2} \right) \right) / h_i.$$

Jusqu'à $h = \frac{1}{16}$, les matrices associées ont été inversées directement

(par la méthode du pivot maximum); pour $h = \frac{1}{32}$ on a construit un sous-programme de résolution de systèmes par la méthode itérative de surrelaxtion, avec calcul du paramètre optimum par Gauss-Seidel [5]. La solution u_1 a été obtenue après 162 itérations avec une erreur relative de $0,6.10^{-8}$ dans $l^2(\Omega_h)$.

3.2. Résultats numériques :

Extrapolation sur $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ pour $x = 0,5$ $y = 0,25$ $u(x, y) \times 10^3$

h	sol. exacte	sol. appr.	sol extrap.	erreur appr	erreur extrap.
1/4	0,488281	0,551714		— 0,063433	
1/8	0,488281	0,499072	0,481525	— 0,010791	— 0,006756
1/16	0,488281	0,490704	0,488341	— 0,002423	— 0,000060
1/32	0,488281	0,488870	0,488280	— 0,000589	0,000001

Extrapolation sur $h = \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$. (formule (II.9))

$$x = 0,125 \quad y = 0,125 \quad u \times 10^5$$

h	sol. exacte	sol. appr.	sol. extrap.	erreur. appr.	erreur extrap.
1/8	0,286102	— 0,088171		0,374273	
1/16	0,286102	0,193573	0,287721	0,092529	— 0,001619
1/32	0,286102	0,263067	0,286133	0,023035	— 0,000031

$$x = 0,375 \quad y = 0,125 \quad u \times 10^4$$

h	sol. exacte	sol. appr.	sol. extrap.	erreur appr.	erreur extrap.
1/8	0,514984	0,476628		0,038356	
1/16	0,514984	0,504694	0,514050	0,010290	0,000934
1/32	0,514984	0,512372	0,514990	0,002612	— 0,000006

$$x = 0,625 \quad y = 0,25 \quad u \times 10^3$$

h	sol. exacte	sol. appr.	sol. extrap.	erreur appr.	erreur extrap.
1/8	0,476837	0,482513		— 0,005676	
1/16	0,476837	0,478049	0,476561	— 0,001212	0,000276
1/32	0,476837	0,477127	0,476838	— 0,000290	— 0,000001

$$x = 0,5 \quad y = 0,375 \quad u \times 10^3$$

h	sol. exacte	sol. appr.	sol. extrap.	erreur appr.	erreur extrap.
1/8	0,823975	0,847383		— 0,023408	
1/16	0,823975	0,829537	0,823589	— 0,005562	0,000386
1/32	0,823975	0,825347	0,823975	— 0,001372	0.

De façon plus générale pour $h = \frac{1}{16}$ et $h = \frac{1}{32}$ on a :

$h = \frac{1}{16}$	(système d'ordre 56)
	erreur relative moyenne : 4 %
	erreur relative maximum (au voisinage de 0) : 10 %
	erreur relative après extrapolation sur $\frac{1}{8}, \frac{1}{16}$: $\begin{cases} 0,1 \% \text{ en moyenne.} \\ 0,6 \% \text{ au maximum.} \end{cases}$
	(calculée aux 12 points communs).

$h = \frac{1}{32}$	erreur relative moyenne : 0,9 %
	erreur relative maxima : 3 %
	après extrapolation sur $h = \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ (56 points) : $\begin{cases} 0,02 \% \text{ en moyenne} \\ 0,2 \% \text{ au maximum} \end{cases}$
	après extrapolation sur $h = \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ (12 points) : $\begin{cases} 0,004 \% \text{ en moyenne} \\ 0,05 \% \text{ au maximum.} \end{cases}$

3.3. Problème approché : (cf. fig. 2)

Nous prenons comme « domaine auxiliaire » le triangle ABC ce qui nous ramène à résoudre un problème de Dirichlet dans le carré $D = (OABC)$. Nous avons utilisé la méthode de prolongement des coefficients du § I-VII.

Problème opérationnel (P_e) :

$$(II-12) \quad \begin{cases} -\Delta u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \tilde{g}(x, y) u_\varepsilon = \tilde{f}(x, y) \text{ dans } D \\ u_\varepsilon|_S = 0 \text{ où } S = \partial D \end{cases}$$

avec :

$$\tilde{g}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{dans } \Omega \\ (1-x-y)^2 & \text{dans } \Omega_1 \end{cases} \quad \tilde{f} = \begin{cases} f & \text{dans } \Omega \\ 0 & \text{dans } \Omega_1. \end{cases}$$

Problème variationnel correspondant (Q_ε) :

$$(II-12) \quad A_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = \frac{1}{\varepsilon} \int_D \tilde{g} u_\varepsilon \bar{v} dx + \int_D \text{grad } u_\varepsilon \text{ grad } \bar{v} dx \\ = \int_D \tilde{f} \bar{v} dx \quad \forall v \in H_0^1(D); \quad u_\varepsilon \in H_0^1(D) ?$$

D'après le choix de $\tilde{g}(x, y)$ les coefficients de $A_\varepsilon(u, v)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ dans D . On vérifie sans peine les hypothèses R , R_1 et R_2 du § I-VII ce qui nous assure de l'existence et unicité de u_ε ainsi que de la convergence faible de u_ε vers u quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Nous avons pris comme pas du réseau $h = \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ et résolu (Q_ε) par la méthode variationnelle des différences finies [4] (formules analogues à (II-11)), en appliquant le schéma d'extrapolation paire sur ces 4 pas. Les systèmes correspondants auront 6, 28, 120 et 496 points respectivement.

ε a été pris égal à 10^{-5} et 10^{-8} . Nous ne donnerons les résultats que pour $\varepsilon = 10^{-8}$ car $\varepsilon = 10^{-5}$ est insuffisant pour $h = \frac{1}{32}$.

3.4. Résultats numériques :

$$x = 0,5 \quad y = 0,25 \quad u \times 10^3$$

h	sol. exacte	sol. appr.	sol. extrap.	erreur appr.	erreur extrap.
1/4	0,488281	0,551742		— 0,063461	
1/8	0,488281	0,499174	0,481681	— 0,010893	0,006600
1/16	0,488281	0,491393	0,489275	— 0,003112	—0,000994
1/32	0,488281	0,488954	0,488077	— 0,000673	0,000204

$$x = 0,125 \quad y = 0,125 \quad u \times 10^5$$

h	sol. exacte	sol. appr.	sol. extrap.	erreur appr.	erreur extrap.
1/8	0,286102	— 0,087583		0,373685	
1/16	0,286102	0,202386	0,299042	0,083716	— 0,012940
1/32	0,286102	0,264142	0,283773	0,021960	0,002329

$$x = 0,375 \quad y = 0,125 \quad u \times 10^4$$

h	sol. exacte	sol. appr.	sol. extrap.	erreur appr.	erreur extrap.
1/8	0,514984	0,477009		0,037975	
1/16	0,514984	0,507286	0,517379	0,007698	— 0,002395
1/32	0,514984	0,512688	0,514296	0,002296	0,000688

$x = 0,^c25 \qquad y = 0,25 \qquad u \times 10^3$

h	sol. exacte	sol. appr.	sol. extrap.	erreur appr.	erreur extrap.
1/8	0,476837	0,482630		— 0,005793	
1/16	0,476837	0,478823	0,477554	— 0,001986	— 0,000717
1/32	0,476837	0,477221	0,476629	— 0,000384	0,000208

$x = 0,500 \qquad y = 0,375 \qquad u \times 10^3$

h	sol. exacte	sol. appr.	sol. extrap.	erreur appr.	erreur extrap.
1/8	0,823975	0,847540		— 0,023565	
1/16	0,823975	0,830658	0,825029	— 0,006683	— 0,001054
1/32	0,823975	0,825484	0,823675	— 0,001509	0,000300

Les résultats obtenus pour $h = \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ et $\varepsilon = 10^{-8}$ sont très voisins de ceux du programme direct :

$$\boxed{h = \frac{1}{16}} \quad \begin{array}{l} \text{erreur relative moyenne : } 3,8\% \\ \text{erreur relative maxima : } 8\% \\ \text{Max } |u_\varepsilon| \text{ dans } \Omega_1 : 10^{-9} . \end{array}$$

$$\boxed{h = \frac{1}{32}} \quad \begin{array}{l} \text{erreur relative moyenne : } 1\% \\ \text{erreur relative maxima : } 3\% \\ \text{Max } |u_\varepsilon| \text{ dans } \Omega_1 : 10^{-9} . \end{array}$$

L'extrapolation est moins bonne sur le problème approché (Q_ε) que sur le problème direct. Néanmoins pour des domaines simples elle reste très efficace ; le prolongement de classe $\mathcal{C}^1(D)$ des coefficients de $A_\varepsilon(u, v)$ justifie son application sans pour cela compliquer la méthode du domaine auxiliaire. Elle nécessite un choix de ε de l'ordre de h^5 .

$$\begin{array}{l} \text{erreur relative après extrapolation sur } h = \frac{1}{16}, \frac{1}{32} \left\{ \begin{array}{l} 0,08\% \text{ en moyenne} \\ 0,5\% \text{ au maximum} \end{array} \right. \\ \text{erreur relative après extrapolation sur } h = \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32} : \left\{ \begin{array}{l} 0,01\% \text{ en moyenne} \\ 0,08\% \text{ au maximum.} \end{array} \right. \end{array}$$

IV. Approximation d'un problème de Dirichlet dans un cercle avec coefficients régularisés.

4.1. Problème initial (P) : (figure. 3)

Soit ($\mathcal{C}$) le cercle unité et u la solution de :

$$(II-14) \quad \begin{cases} -\Delta u = f(x, y) \text{ dans } \mathcal{C} \\ u|_{\Gamma} = 0 \text{ où } \Gamma = \partial\mathcal{C} \end{cases}$$

où nous avons pris :

$$u(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2)$$

soit :

$$f(x, y) = 12xy.$$

En tenant compte de la symétrie de la solution par rapport à $0x$ et $0y$, on est ramené à résoudre le problème mêlé suivant :

$$(II-15) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = f \text{ dans le domaine } 0DC = \Omega \\ u(x, 0) = 0 \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{du}{dn}(x, x) = 0 \quad 0 \leq x \leq \sqrt{2}/2 \\ u|_{\Gamma} = 0, \quad \Gamma = \widehat{DC} \end{array} \right.$$

ce qui nous permettra de choisir un pas plus fin sans compliquer le problème.

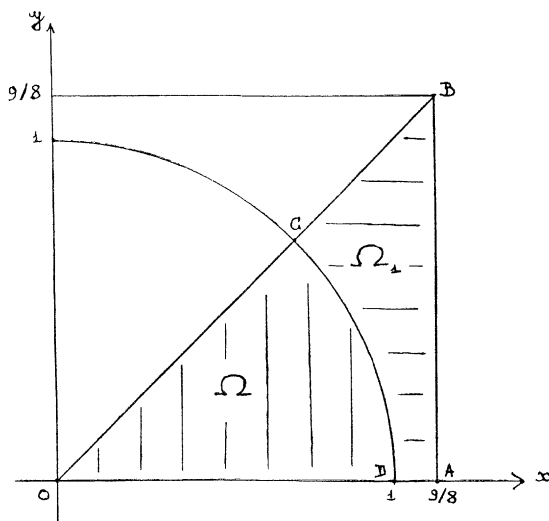


Fig. 3

Problème variationnel (Q) associé :

$$(II-16) \quad \int_{\Omega} \text{grad } u \cdot \text{grad } \bar{v} \, dx = \int_{\Omega} f \bar{v} \, dx$$

$$\forall v \in V = \{v \mid v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ sur } 0D \text{ et } \widehat{DC}\}; u \in V?$$

On vérifie facilement l'existence et l'unicité de la solution u de (II-16).

4.2. Résultats numériques :

Nous avons pris comme pas $h = \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ en approchant (II-16) par la méthode variationnelle des différences finies [4] (voir II-11) avec pour but de comparer les solutions des problèmes direct et approché plutôt que d'obtenir une très bonne approximation de la solution exacte. Les deux types d'extrapolation (paire et quelconque [6]) ont été appliqués sur ces trois valeurs du pas :

aux points de $h = \frac{1}{8}$:

erreur relative moyenne	erreur relative moyenne après extrapolation quelconque sur $\frac{1}{8}, \frac{1}{16}$	erreur relative moyenne après extrapolation paire sur $h = \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$
7 ⁰ / ₀	1,3 ⁰ / ₀	4,4 ⁰ / ₀

L'extrapolation générale donne une nette amélioration des résultats.

Elle est basée sur l'existence d'un développement de la forme :

$$u_h(x) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2} u''(x) + \dots \quad x \in \Omega_h$$

qui serait difficile à justifier théoriquement mais correspond à l'ordre d'erreur au voisinage de $\Gamma = \widehat{DC}$.

4.3. Construction du problème approché (P_ϵ) :

Nous allons nous ramener à un problème mêlé plus simple à coefficients continus.

Introduisons $\Omega_1 = ABCD$ et $D = \text{triangle } OAB$:

$$D = \left\{ (x, y) \mid x < \frac{9}{8}, x > y > 0 \right\}; \quad \text{cf fig. 3}$$

A partir du choix (I-22) des coefficients de la forme approchée et régularisation nous avons :

Problème (P_ε) :

$$(II-17) \quad \begin{cases} -\Delta u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \tilde{g} u_\varepsilon = \tilde{f} \text{ dans } D \\ u_\varepsilon = 0 \text{ sur } y = 0 \text{ et } x = \frac{9}{8} \\ \frac{du_\varepsilon}{dn} = 0 \text{ sur } x = y. \end{cases}$$

avec :

$$\tilde{g}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{dans } \Omega \\ x^2 + y^2 - 1 & \text{dans } \Omega_1 \end{cases} \quad \tilde{f} = \begin{cases} f & \text{dans } \Omega \\ 0 & \text{dans } \Omega_1. \end{cases}$$

Problème variationnel associé (Q_ε) :

$$(II-18) \quad \int_D \text{grad } u_\varepsilon \text{ grad } v \, dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_D \tilde{g} u_\varepsilon v \, dx = \int_D \tilde{f} v \, dx$$

pour tout $v \in V_1 = \{v \mid v \in H^1(D), v = 0 \text{ sur } OA \text{ et } AB\}$, $u_\varepsilon \in V_1$?

Comme $\tilde{g}$ est nul sur $\Gamma = \widehat{DC}$, les coefficients de $A_\varepsilon(u, v)$ sont continus ce qui nous permet d'appliquer l'extrapolation. En conservant les pas $h = \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ avec $\varepsilon = 10^{-9}$ le problème (II-18) a été approché par la méthode variationnelle des différences finies.

4.4. Résultats numériques :

erreur relative moyenne dans Ω	erreur relative après extrap. normale	erreur relative après extrap. paire
4,50/0	20/0	3,50/0

L'erreur relative moyenne est donc moins grande que pour le programme direct mais l'extrapolation donne de moins bons résultats.

Dans Ω_1 , domaine auxiliaire :

$$\text{Max } |u_\varepsilon| = 2 \cdot 10^{-7}.$$

Nous remarquons que seuls les coefficients diagonaux correspondant à $\Gamma \cup \Omega_1$ dépendent de ε dans la matrice.

La programmation en est plus simple.

V. Approximation d'un problème mêlé.

5.1. *Problème initial* : (figure 4)

Nous nous proposons de résoudre l'équation de Poisson avec des conditions aux limites mixtes dans le domaine « troué » composé

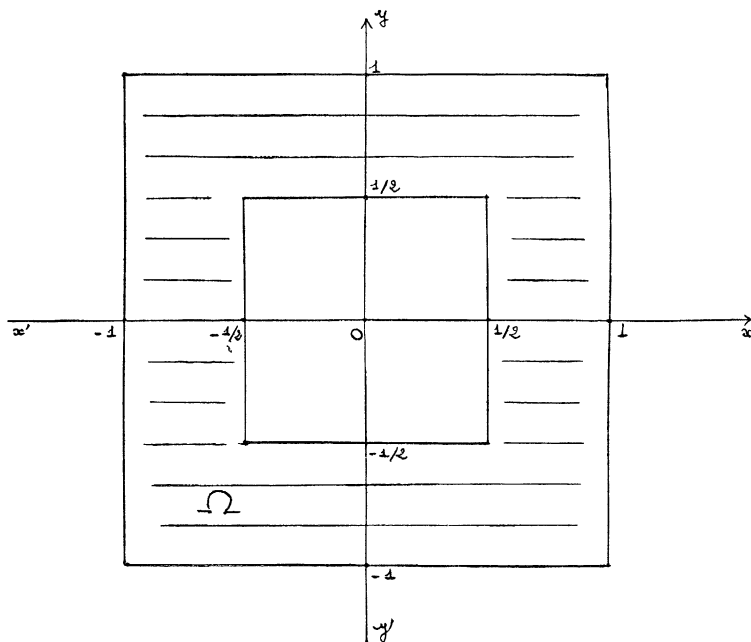


Fig. 4

de deux carrés homothétiques dans le rapport $\frac{1}{2}$:

$$(II-19) \quad \begin{cases} -\Delta u = f. \\ u = 0 \text{ sur } |x| = 1, |y| = 1. \\ \frac{du}{dn} = 0 \text{ sur } |x| = \frac{1}{2}, |y| = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Nous avons choisi $u(x, y)$ symétrique par rapport à $x' \circ x, y' \circ y$ et $x = y$

$$(II-20) \quad u(x, y) = x^2 y^2 (1 - x^2)^3 (1 - y^2)^3$$

u vérifie (II-19) avec :

$$f(x, y) = -2(1 - x^2)(1 - y^2)[(1 - x^2)(1 - y^2)\{x^2 y^2 + (1 - x^2)(1 - y^2) + 15x^2 y^2(x^2 + y^2 - 2)\} + 12x^2 y^2\{x^2(1 - y^2)^2 + y^2(1 - x^2)\}].$$

Par symétrie on est amené à résoudre : (P)

$$(II-21) \quad \begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega \text{ (voir figure 5)} \\ u(1, y) = 0, y \in [0, 1] \\ \frac{du}{dn} = 0 \text{ pour } x = y, \left(x = \frac{1}{2}, 0 < y < \frac{1}{2}\right) \cdot \left(y = 0, \frac{1}{2} < x < 1\right). \end{cases}$$

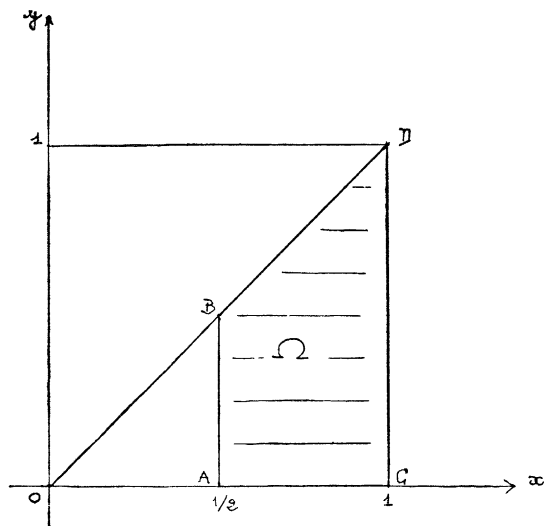


Fig. 5

Problème variationnel (Q)

$$(II-22) \quad \int_{\Omega} \text{grad } u \cdot \text{grad } \bar{v} \, dx = \int_{\Omega} f \bar{v} \, dx$$

pour tout $v \in V = \{v \mid v \in H^1(\Omega), v(1, y) = 0\}$ u cherché dans V , qui admet une solution unique (vérification immédiate).

5.2. Construction du problème approché (Q_ε).

Complétons le domaine troué donné par le carré de centre 0 et côté $\frac{1}{2}$, ce qui revient, en tenant compte de la symétrie, à introduire le « triangle auxiliaire » $\Omega_1 = OAB$ pour (Q_ε):

Nous donnons directement le problème approché sous sa forme variationnelle à partir du choix (I-41) des coefficients A_{ij} :

$$(II-23) \quad \int_D M_\varepsilon \text{grad } u_\varepsilon \cdot \text{grad } \bar{v} \, dx = \int_D \tilde{f} \bar{v} \, dx$$

$$\forall v \in V_1 = \{v \mid v \in H^1(D), v(1, y) = 0\}, u_\varepsilon \in V_1 ?$$

où :

$$M_\varepsilon = \{1 \text{ dans } \Omega, \varepsilon \text{ dans } \Omega_1\}$$

$$\tilde{f} = \{f \text{ dans } \Omega, 0 \text{ dans } \Omega_1\}$$

$$D = \text{triangle } ODC.$$

(II-23) admet une solution unique $u_\varepsilon \in V_1$ qui tend vers u quand $\varepsilon \rightarrow 0$ avec :

$$(II-24) \quad \|u|_\Omega - u\|_{H^1(\Omega)} \leq c \sqrt{\varepsilon}.$$

Les deux problèmes (Q) et (Q_ε) ont été résolus par la méthode variationnelle des différences finies [4] avec $h = \frac{1}{16}$ et $\varepsilon = 10^{-6}$, ce qui donne des systèmes linéaires d'ordre 92 et 120 respectivement.

5.3. Résultats numériques :

Problème initial (Q) : pour $h = \frac{1}{16}$, l'erreur relative est de 1 % au maximum pour $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}$ et devient plus forte au voisinage de $x = 1$ où la solution est beaucoup plus petite $u \sim 2 \cdot 10^{-4}$.

L'erreur dans $l^2(\Omega_h)$ est donnée par :

$$(II-25) \quad \left(\frac{\sum_{M \in \Omega_h} |u_h(M) - u(M)|^2}{\sum_{M \in \Omega_h} |u(M)|^2} \right)^{1/2} = 0,998 \% .$$

Problème approché (Q_ε) :

Les résultats numériques sont sensiblement les mêmes que pour (Q). Plus précisément pour $\varepsilon = 10^{-6}$:

$$\max_{M \in \Omega_h} \frac{|u_h^\varepsilon - u_h|}{|u_h|} = 2 \cdot 10^{-6}$$

où u_h et u_h^ε sont respectivement les solutions approchées de (Q) et (Q_ε).

La convergence de u_ε vers u est aussi bonne :

$$\left(\frac{\sum_{M \in \Omega_h} |u_h^\varepsilon(M) - u(M)|^2}{\sum_{M \in \Omega_h} |u(M)|^2} \right)^{1/2} = 0,996 \% .$$

Dans ce problème tous les coefficients de la matrice dépendent de ε dans Ω_1 et on vérifie que u_ε reste bornée dans Ω_1 comme on l'a démontré au chapitre I.

VI. Approximation d'un problème de DIRICHLET correspondant à Δ^2 :

6.1. Problème initial: (figure 6).

Soit Ω le trapèze $OABC$ et u la solution de: (P)

$$(II-26) \quad \begin{cases} \Delta^2 u = f \text{ dans } \Omega \\ u|_F = \frac{du}{dn}|_F = 0 \text{ où } F = \partial\Omega. \end{cases}$$

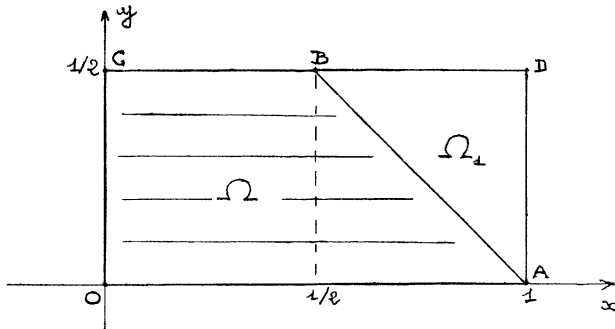


Fig. 6

Nous nous sommes donné:

$$u(x, y) = x^2 y^2 \left(\frac{1}{2} - y \right)^2 (1 - x - y)^2$$

qui vérifie (II-26) avec:

$$\begin{aligned} f(x, y) = & 24 y^2 t^2 + 24 x^2 ((y + t + z)^2 + 2(yt + yz + tz)) \\ & + 8[(yt + yz + tz)^2 + 2ytz(y + t + z) + 4x((y + t)(yt + yz + tz) \\ & + yt(y + t + z)) + x^2((y + t)^2 + 2yt)] \end{aligned}$$

où on a posé :

$$t = y - \frac{1}{2}; \quad z = x + y - 1.$$

Problème variationnel associé à (P) :

Trouver $u \in H_0^2(\Omega)$ tel que :

$$(II-27) \quad \int_{\Omega} \Delta u \cdot \Delta \bar{v} \, dx = \int_{\Omega} f \bar{v} \, dx, \quad \forall v \in H_0^2(\Omega).$$

On a démontré au Chapitre I l'existence et unicité de la solution u si $f \in L^2(\Omega)$ ce qui se vérifie facilement ici. (II-26) a été approché directement, par la méthode des différences finies avec un pas $h = \frac{1}{40}$.

Pour les points « intérieurs » au domaine (i. e. à distance $> h$ de la frontière) l'équation générale est approchée par :

$$(II-28) \quad \Delta_h^2 u = \frac{1}{h^4} [20 u(x, y) - 8 u(x + h, y) - 8 u(x - h, y) \\ - 8 u(x, y + h) - 8 u(x, y - h) + 2 u(x + h, y + h) \\ + 2 u(x + h, y - h) + 2 u(x - h, y + h) + 2 u(x - h, y - h) \\ + u(x + 2h, y) + u(x - 2h, y) + u(x, y + 2h) \\ + u(x, y - 2h)] = \Delta^2 u + O(h^2).$$

Pour les points voisins de la frontière ($x = h$ ou $y = h$ par exemple) on a construit des formules d'approximation du même ordre d'erreur ($O(h^2)$) que pour les points « intérieurs » en tenant compte de $u = 0$ et $\frac{du}{dn} = 0$ sur la frontière.

On obtient ainsi un système de 570 équations linéaires que l'on a résolu par la méthode itérative de surrelaxation avec une précision de 10^{-6} (pour la norme de $l^2(\Omega_h)$ donnée en (II-25)) après

800 itérations. Le rayon spectral de la matrice de GAUSS-SEIDEL associée est proche de 1 ce qui explique le grand nombre d'itérations nécessaire.

6.2 Résultats numériques :

Si nous posons :

$$(II-29) \quad \eta = \left(\frac{\sum_M |u_h(M) - u(M)|^2}{\sum_M |u(M)|^2} \right)^{1/2}, \quad M \in \text{réseau } \Omega_h$$

où u et u_h sont les solutions exacte et approchée de (P) .

Après 800 itérations nous avons :

$$\eta = 0,0123.$$

L'erreur relative est maximum au voisinage de AB (5 %) et est d'environ 0,8 % au centre du domaine. Il est probable que pour 800 itérations le système n'est pas complètement résolu.

6.3 Le problème approché :

Complétons Ω par le « triangle auxiliaire » $\Omega_1 = ABD$ de façon à obtenir le rectangle $0ADC$ pour domaine complété.

Formellement (P_ε) s'écrit :

$$(II-30) \quad \begin{cases} \Delta^2 u_\varepsilon + \frac{M u_\varepsilon}{\varepsilon} = \tilde{f} \text{ dans } D = (0ADC) \\ u_\varepsilon|_S = \frac{du_\varepsilon}{dn} \Big|_S = 0 \text{ où } S = \partial D \end{cases}$$

avec :

$$M = \{0 \text{ dans } \Omega, 1 \text{ dans } \Omega_1\}$$

$$\tilde{f} = \{f \text{ dans } \Omega, 0 \text{ dans } \Omega_1\}.$$

Problème variationnel (Q_ε) :

Déterminer $u_\varepsilon \in H_0^2(D)$ tel que :

$$(II-31) \quad \int_D \left(\Delta u_\varepsilon \cdot \Delta \bar{v} + \frac{M}{\varepsilon} u_\varepsilon \bar{v} \right) dx = \int_D \tilde{f} \bar{v} dx, \quad \forall v \in H_0^2(D).$$

D'après les résultats du Chapitre I, (II-31) admet une solution unique et $u_\varepsilon|_\Omega \rightarrow u$ dans $H^2(\Omega)$ fort quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

En conservant le même pas $h = \Delta x = \Delta y = \frac{1}{40}$ nous avons approché (P_ε) par la méthode des différences finies qui conduit pour les points intérieurs au domaine D , à la formule :

$$(II-32) \quad \Delta_h^2 u_\varepsilon^h(P) + \frac{Mu_\varepsilon^h(P)}{\varepsilon} = \tilde{f}(P)$$

pour $P \in$ réseau D_h , où $\Delta_h^2 u$ a été défini en (II-28) et :

$$M = \left\{ 0 \text{ dans } \Omega, \frac{1}{2} \text{ sur } AB, 1 \text{ dans } \Omega_1 \right\}.$$

De même que pour (P) on a construit des formules d'approximation d'ordre h^2 pour les points à la distance h de la frontière.

Le système correspondant (d'ordre 741) a été résolu par la sur-relaxation avec la précision de $4 \cdot 10^{-6}$ après 700 itérations.

6.4 Résultats numériques :

ε a été pris égal à 10^{-5} .

L'erreur relative dans $l^2(\Omega_h)$ (formule (II-29)) est :

$$\eta = 0.0167.$$

L'erreur relative $\left| \frac{u_\varepsilon^h - u}{u} \right|$ est plus faible à l'intérieur de Ω_h (0,5 % en moyenne) mais est plus forte au voisinage de AB (jusqu'à 8 %). Dans le domaine auxiliaire Ω_1 :

$$\max_{x \in \Omega_1} |u_\varepsilon^h| = 0.5 \cdot 10^{-9}.$$

Nous donnons quelques valeurs obtenues pour u, u_h, u_h^e en certains points du réseau :

x	y	sol. exacte $\times 10^5$	sol. de $(P_h) \times 10^5$	sol. de $(P_h^e) \times 10^5$
1/2	1/40	0.795416	0.792327	0.796514
7/40	3/20	2.59861	2.57960	2.58178
19/40	1/5	9.21150	9.11342	9.20288
1/20	7/20	0.315895	0.312435	0.312719
1/40	19/40	0.0087209	0.0086719	0.0086650

Les précisions obtenues sur u_h et u_h^e sont sensiblement du même ordre mais la programmation de (P_h^e) est un peu plus simple.

VII. Description succincte du programme universel : [19]

Considérons la classe des problèmes de DIRICHLET dont la frontière du domaine est constituée de segments de droites parallèles aux axes de coordonnées.

On complète le domaine par des « rectangles auxiliaires » de façon à se ramener à un domaine carré ou rectangulaire. (rectangles I et II sur la figure 7).

On prolonge ensuite les « frontières intérieures » (AH, GH, DC, ED) jusqu'à leur intersection avec celle du domaine complété ($0 BJJ$).

Le domaine D se présente alors comme somme de « rectangles élémentaires » ($GDEF, EDCJ, \dots$) auxquels correspondent des valeurs $A_{ij}, A_o, \tilde{f}$ (pour l'opérateur (I-7) et l'équation (I-11)) suivant leur appartenance au domaine initial ou auxiliaire, ainsi que des conditions de passage entre eux. Pour chacun de ces rectangles on discrétise l'opérateur (I-7) et les conditions limites de la solution.

Dans un premier temps on calcule les coefficients du système linéaire associé par cycles correspondant aux rectangles élémentaires situés sur une même ligne, tandis que les conditions limites sont approchées suivant qu'elles viennent de Ω ou du domaine auxiliaire. Dans un deuxième temps on résout le système obtenu pour un certain choix de ε par la méthode des directions alternées.

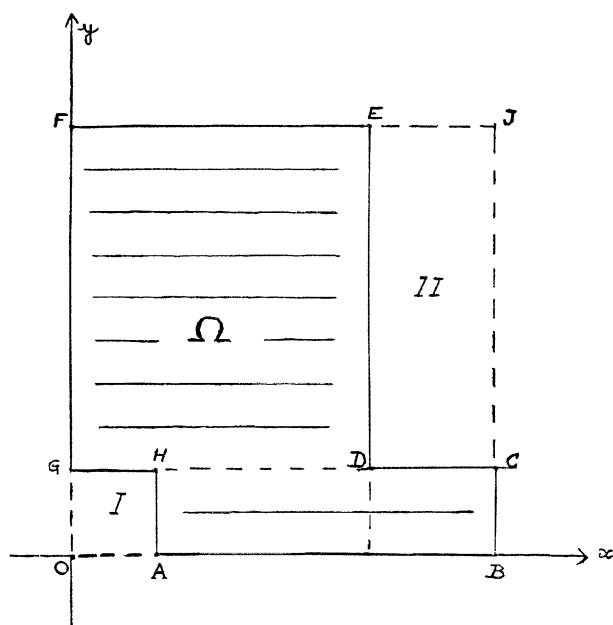


Fig. 7

On peut aussi bien résoudre par ce programme des problèmes elliptiques de DIRICHLET avec coefficients discontinus (bornés) et se servir de réseaux non homogènes.

Nous donnons un exemple de résolution d'un problème de DIRICHLET par ce programme [19].

Considérons le problème de la torsion d'une poutre en T dont la section se compose de 7 carrés unitaires.

Le potentiel satisfait l'équation de Poisson :

$$(P) \quad \begin{cases} -\Delta u = 2 \text{ dans } \Omega \\ u|_S = 0, S = \partial\Omega; \text{ cf. figure 8.} \end{cases}$$

En tenant compte des symétries on ne considérera qu'un quart du domaine, situé dans le premier quadrant: $0 A B C D E$.

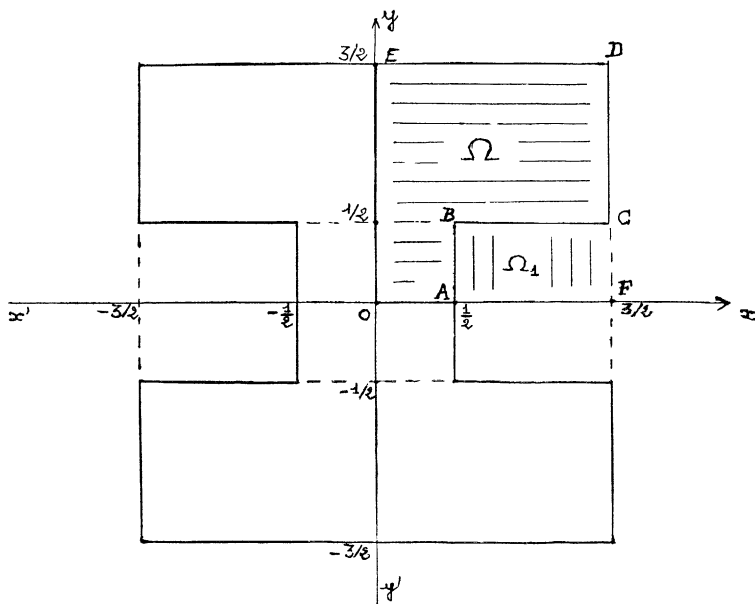


Figure 8

On complète ensuite le domaine par le « rectangle auxiliaire » $A B C F$ et on résout le problème approché (P_ε) :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u_\varepsilon = 2 \text{ dans } \Omega = 0 A B C D E \\ -\Delta u_\varepsilon = 0 \text{ dans } A B C F = \Omega_1 \\ \left[\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y} \right]_{\Omega, BC} = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y} \right]_{\Omega_1, BC} ; \quad \left[\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} \right]_{\Omega, AB} = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} \right]_{\Omega_1, AB} \\ [u_\varepsilon]_{\Omega, BC} = [u_\varepsilon]_{\Omega_1, BC} ; \quad [u_\varepsilon]_{\Omega, AB} = [u_\varepsilon]_{\Omega_1, AB} \\ u_\varepsilon = 0 \text{ sur } S = (FD, ED). \end{array} \right.$$

Les crochets $[f]_{\Omega_i, \Gamma}$ désignant la valeur de la fonction f prise sur Γ du côté de Ω_i .

Le problème (P) a été résolu par la méthode des différences finies pour $h = \frac{1}{4}$ et $\frac{1}{8}$, et (P_ε) pour $h = \frac{1}{4}$, $\varepsilon = 10^{-4}$ sur le programme universel.

Résultats numériques :

Les résultats supérieurs correspondent au problème (P) résolu directement, les résultats inférieurs à (P_ε) résolu par le programme universel pour $\varepsilon = 10^{-4}$:

$$\frac{0,2250}{0,2222} \quad \frac{0,2192}{0,2157} \quad \frac{0,2000}{0,1995} \quad \frac{0,1808}{0,1799} \quad \frac{0,15412}{0,15239} \quad \frac{0,10391}{0,10264} \quad \frac{0}{0}$$

$$\frac{0,3362}{0,3323} \quad \frac{0,3195}{0,3163} \quad \frac{0,2796}{0,2774} \quad \frac{0,2495}{0,2429} \quad \frac{0,20438}{0,20195} \quad \frac{0,1356}{0,13319} \quad \frac{0}{0}$$

$$\frac{0,356}{0,349} \quad \frac{0,3210}{0,3146} \quad \frac{0,2321}{0,2261} \quad \frac{0,1906}{0,1871} \quad \frac{0,15613}{0,15436} \quad \frac{0,10432}{0,10316} \quad \frac{0}{0}$$

$$\frac{0,321}{0,311} \quad \frac{0,251}{0,241} \quad \frac{0}{0,3E-03} \quad \frac{0}{0,3E-03} \quad \frac{0}{0,2E-03} \quad \frac{0}{0,9E-04} \quad \frac{0}{0}$$

$$\frac{0,297}{0,286} \quad \frac{0,223}{0,215} \quad \frac{0}{0,2E-03}$$

$$\frac{0,287}{0,279} \quad \frac{0,214}{0,208} \quad \frac{0}{0,2E-03}.$$

L'erreur est maxima au voisinage de l'origine et est d'environ 2 % en moyenne sur l'ensemble du domaine.

De façon générale l'erreur $\left| \frac{u - u_h^\varepsilon}{u} \right|$ est de l'ordre de 2 à 3 % sur le programme universel ce qui limite son emploi à des problèmes pour lesquels on ne désire pas une grande précision.

VIII. Quelques conclusions :

L'étude que nous venons de faire sur des exemples numériques simples nous montre qu'il peut être intéressant, dans le cas de conditions limites homogènes, de se ramener à un domaine plus simple. Le problème approché construit par l'une des méthodes précédentes donne, pour ε de l'ordre de h^4 , une approximation de u équivalente à celle obtenue par le problème initial. La programmation en est plus simple car souvent seuls les coefficients diagonaux dépendent du paramètre ε introduit.

Cette méthode présente un intérêt particulier dans le cas de domaines troués [22], ou dans le cas où on étudie l'influence sur la solution de la position de la frontière.

Un des désavantages est d'augmenter le nombre de points intérieurs au domaine, d'où des matrices d'ordre plus élevé.

La régularisation des coefficients, si elle donne lieu à de bons résultats, nécessite des valeurs de ε plus petites ce qui peut être gênant sur machine ; par contre elle permet d'appliquer une méthode d'extrapolation sur 2 ou 3 pas qui améliore nettement les résultats. Ceci n'est pas toujours possible sur le problème direct quand la frontière n'est pas une courbe simple.

CHAPITRE III

ÉQUATIONS PARABOLIQUES LINÉAIRES

I. Introduction :

Nous allons donner dans ce Chapitre des procédés d'approximation des équations paraboliques linéaires dans un domaine cylindrique, et non cylindrique (frontière indépendante ou non du temps).

Dans un premier stade nous adapterons la méthode du domaine

auxiliaire aux équations paraboliques dans un domaine cylindrique du type :

$$(1) \quad \begin{cases} u'(t) + A(t)u(t) = f(t), t \geq 0, x \in \Omega \\ u(x, 0) = u_0(x), x \in \Omega \end{cases}$$

où nous supposons que Ω est un ouvert borné de R^n , $A(t)$ un opérateur différentiel elliptique d'ordre $2m$ en x , et u vérifie des conditions aux limites homogènes de type *Dirichlet*, *Neumann* ou mêlées sur la frontière Γ de Ω . Dans chacun des cas nous construisons un « problème approché » de manière analogue au chapitre I dont la solution convergera vers celle du problème initial (1) en un certain sens.

Dans un second stade nous étudierons l'équation (1) dans un domaine non cylindrique $((x, t) \in \Omega(t), t \geq 0)$ pour le problème de *Dirichlet* homogène.

Nous en donnerons quatre procédés d'approximation : l'un basé sur la méthode du domaine auxiliaire qui nous ramènera à un problème de même type dans un domaine cylindrique ; le second généralisant la méthode de *Galerkin* au cas non cylindrique ; le troisième obtenu en adaptant la méthode variationnelle des différences finies, décrite dans [15] pour un domaine cylindrique, au cas où le domaine dépend du temps.

Dans le cas d'un domaine cylindrique avec des conditions aux limites dépendant du temps, nous renvoyons à [2] et [3] pour l'étude de ce problème et son approximation.

Le dernier utilise la régularisation elliptique [12] qui nous ramènera à un problème aux limites de type elliptique dans le domaine

$$Q_T = \bigcup_{t \in]0, T[} \Omega(t) \quad \text{de} \quad R_x^n \times R_t \quad (T \text{ positif fixé}).$$

Ces quatre procédés nous fournissent en même temps qu'une approximation de la solution du problème initial, une démonstration de l'existence de cette solution pour $u_0(x) \neq 0$.

II. Equations paraboliques dans un domaine cylindrique.

II-1. Le problème initial :

On se donne :

V et H deux espaces de Hilbert avec $V \subset H$ algébriquement et topologiquement, V dense dans H .

$a(t; u, v)$ une famille de formes sesquilinéaires continues sur $V \times V$, dépendant du paramètre $t, t \geq 0$.

Nous faisons les hypothèses suivantes :

Hypothèse H0 : $t \rightarrow a(t; u, v)$ est une fonction mesurable pour tout

$$t \in [0, T], u, v \in V,$$

avec :

$$|a(t; u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V,$$

M indépendant de t, u, v .

Hypothèse H1 : Il existe $\lambda > 0$ et $\alpha > 0$ tels que :

$$\operatorname{Re} a(t; v, v) + \lambda \|v\|_H^2 \geq \alpha \|v\|_V^2, \quad \forall v \in V;$$

λ, α indépendants de $t \geq 0$.

Hypothèse H2 : Soit V' l'anti-dual de V . En identifiant H à son antidual nous avons : $V \subset H \subset V'$. Nous supposons :

$$f \in L^2(0, T; V') \text{ et } u_0 \in H$$

où :

$$L^2(0, T; X) = \{u(x, t) \mid x \rightarrow u(x, t) \in X, t \geq 0 \text{ et } t \rightarrow u(t)$$

appartient à L^2 de $[0, T]$ à valeurs dans $X\}$.

Notations : (u, v) = produit scalaire dans H . Norme : $|u|$

$((u, v))$ = produit scalaire dans V . Norme : $\|u\|$

$\langle u, v \rangle$ = dualité entre V et V' , pour $u \in V, v \in V'$.

Le problème initial s'écrit :

Problème (Q) : Déterminer $u \in L^2(0, T; V)$ tel que :

$$(III-1) \quad \int_0^T [-\langle u(t), \varphi'(t) \rangle + a(t; u(t), \varphi(t))] dt = \int_0^T \langle f(t), \varphi(t) \rangle dt + (u_0, \varphi(0))$$

pour tout $\varphi \in \Phi = \{\varphi \mid \varphi \in L^2(0, T; V); \varphi' \in L^2(0, T; H); \varphi(T) = 0\}$.

On démontre alors le :

Résultat III-1 : Sous les hypothèses $H0, H1, H2$ le problème (Q) admet une solution unique, et $u' \in L^2(0, T; V')$, [10]

u est alors égale presque partout à une fonction continue de $[0, T]$ à valeurs dans H , notée encore u , et $u(0) = u_0$.

La forme $v \rightarrow a(t; u, v)$ anti-linéaire continue sur V définit un opérateur linéaire continu de V dans V' noté $A(t)$ et :

$$a(t; u, v) = \langle A(t) u, v \rangle, \quad \forall u, v \in V.$$

u vérifie alors :

$$(III-2) \quad \begin{cases} u \in L^2(0, T; V), u' \in L^2(0, T; V') \\ u'(t) + A(t) u(t) = f(t) \text{ dans } L^2(0, T; V') \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Soit maintenant Ω un ouvert borné de R^n de frontière Γ assez régulière (de classe C^1 par morceaux par exemple). Nous prenons :

$$H = L^2(\Omega)$$

$H_0^1(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega)$, V muni de la norme de $H^1(\Omega)$, sous-espace vectoriel fermé dans $H^1(\Omega)$.

$$a(t; u, v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x, t) D_j u \cdot D_i \bar{v} dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} a_i D_i u \cdot \bar{v} dx + \int_{\Omega} a_0 u \bar{v} dx.$$

Hypothèse (III-3) :

$a_{ij}(x, t), a_i(x, t), a_0(x, t) \in L^\infty(Q_T)$ (mesurables et bornés) pour tout T fini ; où $Q_T = \Omega \times [0, T]$.

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_j \bar{\xi}_i \geq \alpha \sum_{i=1}^n |\xi_i|^2, \alpha > 0 \quad \forall (x, t) \in Q_T$$

pour tout $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in C^n$.

$$u_0 \in L^2(\Omega)$$

$$f \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) = L^2(Q_T).$$

Résultat III-2. Sous les hypothèses (III-3), le problème (Q) associé admet une solution unique.

Les hypothèses $H0$, $H1$ et $H2$ se vérifient facilement à partir de (III-3).

Interprétons les problèmes résolus suivant le choix de V .

u vérifie :

$$u'(t) + A(t)u(t) = f(t) \text{ dans } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$$

avec :

$$(III-4) \quad A(t) = - \sum_{i,j=1}^n D_i(a_{ij}(x, t) D_j) + \sum_{i=1}^n a_i D_i + a_0(x, t)$$

associé à la forme $a(t; u, v)$ donnée.

$$u(0) = u_0 \text{ dans } L^2(\Omega).$$

pour $V = H_0^1(\Omega) : u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), u' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ d'où :
 $u(x, t) = 0$ pour $(x, t) \in \Gamma \times [0, T]$ dans $L^2(0, T; H^{1/2}(\Gamma))$

(III-5) (Q) : *problème de Dirichlet*

$$V = H^1(\Omega) : u \in L^2(0, T; H^1(\Omega)), u' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$$

u vérifie formellement :

$$\frac{du}{d\nu_{A(t)}} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) D_j u \cos(\vec{n}, x_i) = 0 \text{ sur } \Gamma \times [0, T]$$

($\vec{n}$: normale extérieure à Ω sur Γ).

(III-6) (Q): *Problème de Neumann*

$$V = \{v \mid v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\} \text{ où } \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$

avec $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, Γ_1, Γ_2 de capacité positive.

u vérifie alors : $u \in L^2(0, T; V)$, $u' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$.

$u(x, t) = 0$ pour $(x, t) \in \Gamma_1 \times [0, T]$ dans $L^2(0, T; H^{1/2}(\Gamma_1))$

$$\frac{du}{d\nu_{A(t)}} = 0 \text{ pour } (x, t) \in \Gamma_2 \times [0, T] \text{ (formel)}$$

(III-7) (Q): *problème MÊLÉ.*

Nous ferons toutes nos démonstrations dans le cas où $A(t)$ est l'opérateur différentiel d'ordre deux donné au dessus; elles se généralisent facilement pour un opérateur d'ordre $2m$, en prenant :

$$H_0^m(\Omega) \subset V \subset H^m(\Omega), H = L^2(\Omega)$$

$$a(t; u, v) = \sum_{|p|, |q| \leq m} \int_{\Omega} a_{pq} D^p u \cdot D^q \bar{v} \, dx$$

soit :

$$(III-4') \quad A(t) = \sum_{\substack{|p| \leq m \\ |q| \leq m}} (-1)^{|q|} D^q (a_{pq}(t) D^p).$$

II-2. *Construction d'un problème approché :*

Idées générales :

Comme au Chapitre I nous considérons un ouvert $\Omega' \subset \overset{0}{\mathbb{C}} \bar{\Omega}$,

borné ou non et : $D = \overline{\bar{\Omega} \cap \bar{\Omega}'}$, de frontière S (cf. figure 1). On choisira le « domaine auxiliaire » Ω' de façon que D soit un domaine « simple ».

Nous allons approcher les trois problèmes (III-5), (III-6) et (III-7) par un problème plus simple résolu dans $D \times [0, T]$.

De manière générale nous construirons une forme $A_\varepsilon(t, u, v)$ ayant les propriétés suivantes :

(III-8) $A_\varepsilon(t, u, v)$ est une forme sesquilinéaire continue sur $H^1(D) \times H^1(D)$

$$|A_\varepsilon(t, u, v)| \leq N \|u\|_{H^1(D)} \cdot \|v\|_{H^1(D)}$$

et $t \rightarrow A_\varepsilon(t, u, v)$ mesurable sur $[0, T]$.

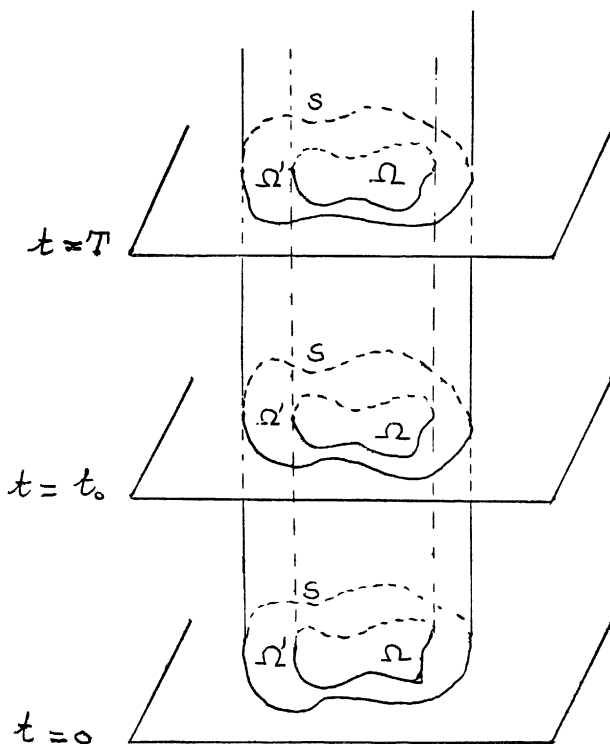


Fig. 1

(III-9) Il existe $\lambda' > 0$ et $\alpha' > 0$, indépendants de $t \in [0, T]$ tels que :

$$\operatorname{Re} A_\varepsilon(t, v, v) + \lambda' \|v\|_{L^2(D)}^2 \geq \alpha' \|v\|_{H^1(D)}^2, \quad \forall v \in V(D)$$

où $V(D)$ est défini en dessous

(III-10) $A_\varepsilon(t, u, v)$ restreinte à $V \times V$ (défini au § II-1) coïncide avec $a(t; u, v)$, au même sens qu'au Chapitre I.

Problème approché (Q_ε):

Déterminer $u_\varepsilon \in L^2(0, T; V(D))$ tel que :

$$\begin{aligned} \int_0^T [-(C_\varepsilon u_\varepsilon(t), \varphi'(t))_{L^2(D)} + A_\varepsilon(t, u_\varepsilon(t), \varphi(t))] dt = \\ \text{(III-11)} \quad \quad \quad = \int_0^T \langle \tilde{f}(t), \varphi(t) \rangle dt + (\tilde{u}_0, \varphi(0))_{L^2(D)} \end{aligned}$$

$$\forall \varphi \in \Phi(D) = \{\varphi \mid \varphi \in L^2(0, T; V(D)), \varphi' \in L^2(0, T; L^2(D)); \varphi(T) = 0\}$$

avec :

$$C_\varepsilon \in \mathcal{L}(L^2(D), L^2(D))^2 \text{ avec } (C_\varepsilon u, u)_{L^2(D)} \geq C_1(\varepsilon) \|u\|_{L^2(D)}^2$$

$$\tilde{f} = \{f(x, t) \text{ dans } \Omega \times [0, T], 0 \text{ ailleurs}\}$$

$$\tilde{u}_0 = \{u_0(x) \text{ dans } \Omega, 0 \text{ ailleurs}\}.$$

Nous avons le choix de $V(D)$ suivant que nous voulons approcher (Q) par un problème de *Dirichlet* ou de *Neumann*. Nous prendrons ici $V(D) = H_0^1(D)$: les démonstrations resteraient identiques dans les autres cas.

On a le :

Résultat III-3. Sous les hypothèses (III-8), (III-9), (III-10) le problème approché (Q_ε) admet une solution unique pour $\varepsilon > 0$ et :

$$u'_\varepsilon \in L^2(0, T; H^{-1}(D))$$

²⁾ $\mathcal{L}(E, F)$ = espace des opérateurs linéaires continus de E dans F .

puis Ω_2 ouvert $\subset \mathbf{C} \bar{\Omega}^*$; on pose :

$$D = \Omega \cup \Omega_1 \cup \overset{0}{\Gamma_1} \cup \overset{0}{\Sigma} \cup \Omega_2 \cup \overset{0}{\Gamma_2}$$

où $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\partial\Omega_1 = \Gamma_1 \cup \Sigma$, $\partial\Omega_2 = \Sigma \cup \Gamma_2 \cup S$, $\partial D = S$.

Soit :

$$A_\varepsilon(t, u, v) = \sum_{i,j=1}^n \int_D A_{ij} D_j u \cdot D_i \bar{v} dx + \sum_{i=1}^n \int_D A_i D_i u \cdot \bar{v} dx + \int_D A_0 u \bar{v} dx$$

où A_{ij} , A_i , A_0 sont définis dans $D \times [0, T]$, T fini quelconque.

Comme au Chapitre I plusieurs choix de A_{ij} , A_i , A_0 sont possibles.

Nous nous limiterons à celui qui donne le résultat de convergence le plus fort :

Choix de A_{ij} , A_i , A_0 :

$$A_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} a_{ij}(x, t) \text{ dans } \Omega \times [0, T], \frac{1}{\varepsilon} \delta_{ij} \text{ dans } \Omega_1 \times [0, T], \\ \varepsilon \delta_{ij} \text{ dans } \Omega_2 \times [0, T] \end{array} \right\}.$$

$$A_i = \{a_i(x, t) \text{ dans } \Omega \times [0, T], 0 \text{ ailleurs}\}$$

$$A_0 = \left\{ \begin{array}{l} a_0(x, t) \text{ dans } \Omega \times [0, T], \frac{1}{\varepsilon} \text{ dans } \Omega_1 \times [0, T], \\ \varepsilon \text{ dans } \Omega_2 \times [0, T] \end{array} \right\}$$

Choix de C_ε :

$$C_\varepsilon(x, t) = \left\{ \begin{array}{l} u(x, t) \text{ dans } \Omega^* \times [0, T] \\ \varepsilon u(x, t) \text{ dans } \Omega_2 \times [0, T]. \end{array} \right.$$

Pour $\varepsilon > 0$ fixé, $A_\varepsilon(t, u, v)$, définie ci-dessus, vérifie les hypothèses (III-8), (III-9) et (III-10) avec $\lambda' = \lambda$:

$$\operatorname{Re} A_\varepsilon(t, v, v) + \lambda \|v\|_{L^2(D)}^2 \geq \inf(\alpha, \varepsilon) \|v\|_{H^1(D)}^2.$$

et :

$$(C_\varepsilon u, u)_{L^2(D)} = \|u\|_{L^2(\Omega^*)}^2 + \varepsilon \|u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \geq \inf(1, \varepsilon) \|u\|_{L^2(D)}^2$$

pour tout $u \in L^2(D)$.

On déduit du Résultat III-3 que (Q_ε) admet une solution unique u_ε , pour tout ε positif fixé.

Dans toute la suite nous supposons que $\lambda = 0$ dans la coercivité de $a(t; u, v)$ et $A_\varepsilon(t, u, v)$ ce qui peut se faire en changeant u et u_ε en ue^{kt} , $u_\varepsilon e^{kt}$, avec $k \geq \lambda$.

Nous avons alors le :

THÉORÈME III-1. (*de convergence faible*) : Quand $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$(III-12) \quad u_\varepsilon|_{\Omega \times [0, T]} \rightharpoonup u \text{ dans } L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ faible}$$

$$(III-13) \quad \frac{u_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}|_{\Omega_1 \times [0, T]} \rightharpoonup g \text{ dans } L^2(0, T; H^1(\Omega_1)) \text{ faible}$$

$$(III-14) \quad \sqrt{\varepsilon} u_\varepsilon \rightharpoonup h \text{ dans } L^2(0, T; H^1(\Omega_2)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega_2)) \text{ faible}$$

où :

$$g \in L^2(0, T; H^1(\Omega_1)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega_1))$$

$$h \in L^2(0, T; H^1(\Omega_2)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega_2)).$$

DÉMONSTRATION :

$$u_\varepsilon \text{ vérifie dans } L^2(0, T; H^{-1}(D)) :$$

$$(III-15) \quad \frac{d}{dt} (C_\varepsilon u_\varepsilon(t)) + A_\varepsilon(t) u_\varepsilon(t) = \tilde{f}(t)$$

les dérivées étant prises au sens des distributions avec :

$$A_\varepsilon(t) = - \sum_{i,j=1}^n D_i (A_{ij} D_j) + \sum_{i=1}^n A_i D_i + A_0.$$

En prenant le produit scalaire de (III-15) avec u_ε il vient :

$$\int_0^s \left\langle \frac{d}{dt} (C_\varepsilon u_\varepsilon(t)), u_\varepsilon(t) \right\rangle dt + \int_0^s A_\varepsilon(t, u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)) dt = \int_0^s \langle \tilde{f}(t), u_\varepsilon(t) \rangle dt$$

les crochets désignant la dualité entre $H^1(D)$ et $H^{-1}(D)$, $0 < s \leq T$.

Mais on voit facilement que :

$$\begin{aligned} \int_0^s \left\{ \left\langle \frac{d}{dt} (C_\varepsilon u_\varepsilon(t)), u_\varepsilon(t) \right\rangle + \left\langle u_\varepsilon(t), \frac{d}{dt} (C_\varepsilon u_\varepsilon(t)) \right\rangle \right\} dt = \\ = \|u_\varepsilon(s)\|_{L^2(\Omega^*)}^2 + \varepsilon \|u_\varepsilon(s)\|_{L^2(\Omega_2)}^2 - \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

d'où l'égalité de l'énergie pour u_ε :

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon(s)\|_{L^2(\Omega^*)}^2 + \varepsilon \|u_\varepsilon(s)\|_{L^2(\Omega_2)}^2 + 2 \operatorname{Re} \int_0^s A_\varepsilon(t, u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)) dt = \\ = 2 \operatorname{Re} \int_0^s \langle \tilde{f}(t), u_\varepsilon(t) \rangle dt + \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \int_0^s A_\varepsilon(t, u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)) dt = \int_0^s a(t; u_\varepsilon|_\Omega, u_\varepsilon|_\Omega) dt + \int_0^s \left\| \frac{u_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}|_{\Omega_1} \right\|_{H^1(\Omega_1)}^2 dt + \\ + \int_0^s \left\| \sqrt{\varepsilon} u_\varepsilon|_{\Omega_2} \right\|_{H^1(\Omega_2)}^2 dt. \end{aligned}$$

En minorant $a(t; u_\varepsilon, u_\varepsilon)$ à partir de la coercivité il vient :

$$\frac{1}{2} \|u_\varepsilon(s)\|_{L^2(\Omega^*)}^2 + \frac{1}{2} \|\sqrt{\varepsilon} u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_2)}^2 + \alpha \int_0^s \|u_\varepsilon|_\Omega\|_{H^1(\Omega)}^2 dt +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^s \left\| \frac{u_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} \right\|_{\Omega_1}^2 \|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_1)}^2 dt + \int_0^s \left\| \sqrt{\varepsilon} u_\varepsilon \right\|_{\Omega_2}^2 \|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_2)}^2 dt \leq \\
& \leq \|f\| \left(\int_0^s \|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2} + \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2
\end{aligned}$$

où $\|f\|$ = norme de f dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$.

On en déduit que :

$$(1) \quad u_\varepsilon|_{\Omega^* \times [0, T]} \text{ est borné dans } L^2(0, T; H^1(\Omega^*)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega^*))$$

$$(2) \quad \frac{u_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}|_{\Omega_1 \times [0, T]} \text{ est borné dans } L^2(0, T; H^1(\Omega_1)).$$

$$(3) \quad \sqrt{\varepsilon} u_\varepsilon|_{\Omega_2 \times [0, T]} \text{ est borné dans } L^2(0, T; H^1(\Omega_2)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega_2))$$

$$(4) \quad u_\varepsilon|_{\Omega_1 \times [0, T]} \text{ est borné dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega_1)).$$

On peut alors extraire de la suite $\varepsilon \rightarrow 0$ une sous-suite $\varepsilon' \rightarrow 0$ telle que dans les espaces correspondant à (1), (2), (3), (4) :

$$(1') \quad u_{\varepsilon'}|_{\Omega^* \times [0, T]} \rightharpoonup w \text{ faiblement}$$

$$(2') \quad \frac{u_{\varepsilon'}}{\sqrt{\varepsilon'}}|_{\Omega_1 \times [0, T]} \rightarrow g \quad \gg$$

$$(3') \quad \sqrt{\varepsilon'} u_{\varepsilon'}|_{\Omega_2 \times [0, T]} \rightarrow h \quad \gg$$

$$(4') \quad u_{\varepsilon'}|_{\Omega_1 \times [0, T]} \rightarrow \theta \quad \gg$$

De (1') et (2') on voit que : $w|_{\Omega_1 \times [0, T]} \equiv 0$. D'où $w|_{\Gamma_1} = 0$ et $w|_{\Omega \times [0, T]} \in L^2(0, T; V_0)$.

Il reste à montrer que $w|_{\Omega \times [0, T]}$ est solution du problème initial.

Alors $w \equiv u$ dans $\Omega \times [0, T]$ en vertu de l'unicité de (Q).

$w|_{\Omega \times [0, T]}$ est solution de (Q) :

Prenons dans (III-11) $\varphi \in \Phi(D)$ telle que :

$\varphi(x, t) \equiv 0$ dans $\Omega_1 \times [0, T]$; il vient pour $\varepsilon = \varepsilon'$:

$$\int_0^T \{ - (u_{\varepsilon'} |_{\Omega}, \varphi')_{L^2(\Omega)} - \sqrt{\varepsilon'} (\sqrt{\varepsilon'} u_{\varepsilon'} |_{\Omega_2}, \varphi')_{L^2(\Omega_2)} + a(t; u_{\varepsilon'} |_{\Omega}, \varphi |_{\Omega}) + \\ + \sqrt{\varepsilon'} ((\sqrt{\varepsilon'} u_{\varepsilon'} |_{\Omega_2}, \varphi |_{\Omega_2}))_{H^1(\Omega_2)} \} dt = \int_0^T (f, \varphi)_{L^2(\Omega)} dt + (u_0, \varphi(0))_{L^2(\Omega)}.$$

Faisons tendre ε' vers 0. D'après (1') et (3') il reste à la limite :

$$(5) \quad \int_0^T \{ - (w, \varphi')_{L^2(\Omega)} + a(t; w |_{\Omega}, \varphi(t)) \} dt = \int_0^T (f, \varphi)_{L^2(\Omega)} dt + (u_0, \varphi(0))$$

$$\forall \varphi \in \Phi(D), \varphi \equiv 0 \text{ dans } \Omega_1 \times [0, T].$$

Soit $\begin{cases} \Psi \in \Phi_0 \text{ (voir (Q)) telle que :} \\ \Psi \equiv 0 \text{ dans un voisinage de } \Gamma_1 \times [0, T]. \end{cases}$

Il existe alors $\varphi \in \Phi(D)$, nulle dans $\Omega_1 \times [0, T]$ telle que :

$$\varphi \equiv \Psi \text{ sur } \Omega \times [0, T]$$

(5) est alors valable pour un tel Ψ et comme la classe des fonctions Ψ est dense dans Φ_0 il en résulte que (5) est valable $\forall \varphi \in \Phi_0$, c'est-à-dire que $w|_{\Omega \times [0, T]}$ est solution de (Q).

A partir du théorème III-1 nous allons démontrer le :

THÉORÈME III-2. de convergence forte : Quand $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$(III-16) \quad u_{\varepsilon}|_{\Omega \times [0, T]} \rightarrow u \text{ dans } L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega)) \text{ fort.}$$

$$(III-17) \quad \frac{u_{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}}|_{\Omega_1 \times [0, T]} \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(0, T; H^1(\Omega_1)) \text{ fort.}$$

$$(III-18) \quad \sqrt{\varepsilon} u_{\varepsilon}|_{\Omega_2 \times [0, T]} \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(0, T; H^1(\Omega_2)) \cap L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega_2)) \text{ fort.}$$

DÉMONSTRATION : La solution u du problème initial vérifie :

$$u \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \quad u = 0 \text{ sur } \Gamma_1.$$

Posons :

$$\Pi_1 u = \begin{cases} u & \text{dans } \Omega \times [0, T] \\ 0 & \text{dans } \Omega_1 \times [0, T]. \end{cases}$$

On a :

$$\Pi_1 u \in L^2(0, T; H^1(\Omega^*)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega^*))$$

où $\Omega^* = \Omega \cup \Omega_1 \cup \overset{0}{\Gamma_1}$. D'autre part il existe un opérateur P de 1 prolongement (cf. chapitre I) de $H^1(\Omega^*)$ dans $H^1(R^n)$ linéaire et continu ; d'où :

$$P(\Pi_1 u) \in L^2(0, T; H^1(R^n)) \cap L^\infty(0, T; L^2(R^n)).$$

Soit :

$$\theta(x) \begin{cases} = 1 & \text{sur } \Omega, \theta(x) \in \mathcal{C}^1(R^n), \text{ bornée.} \\ = 0 & \text{sur } S = \partial D. \end{cases}$$

Alors :

$$\Pi u = \theta P(\Pi_1 u) \in L^2(0, T; H_0^1(D)) \cap L^\infty(0, T; L^2(D)).$$

et $\Pi u \equiv u$ sur $\Omega \times [0, T]$, $\Pi u \equiv 0$ sur $\Omega_1 \times [0, T]$.

$$\|\Pi u\|_{L^2(0, T; H_0^1(D))} \leq C \|u\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))}.$$

Considérons X_ε :

$$\begin{aligned} X_\varepsilon = & \frac{1}{2} \|u_\varepsilon(s) - \Pi u(s)\|_{L^2(\Omega^*)}^2 + \frac{1}{2} \|\sqrt{\varepsilon}(u_\varepsilon(s) - \Pi u(s))\|_{L^2(\Omega_2)}^2 \\ & + \operatorname{Re} \int_0^s A_\varepsilon(t, (u_\varepsilon - \Pi u)(t), (u_\varepsilon - \Pi u)(t)) dt. \end{aligned}$$

En développant il vient :

$$\begin{aligned}
 X_\varepsilon = & \left[\frac{1}{2} |u_\varepsilon(s)|_{L^2(\Omega^*)}^2 + \frac{1}{2} |\sqrt{\varepsilon} u_\varepsilon(s)|_{L^2(\Omega_2)}^2 + \operatorname{Re} \int_0^s A_\varepsilon(t, u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)) dt \right] \\
 & + \left[\frac{1}{2} |u(s)|_{L^2(\Omega)}^2 + \operatorname{Re} \int_0^s a(t; u(t), u(t)) dt \right] + \frac{1}{2} \varepsilon \|Hu\|_{L^2(\Omega_2)}^2 \\
 & - 2 \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} (u_\varepsilon(s), u(s))_{L^2(\Omega)} + \int_0^s a(t; u_\varepsilon(t), u(t)) dt \right] \\
 & - \operatorname{Re} \left[\sqrt{\varepsilon} (\sqrt{\varepsilon} u_\varepsilon, Hu)_{L^2(\Omega_2)} + 2 \int_0^s \sqrt{\varepsilon} ((\sqrt{\varepsilon} u_\varepsilon, Hu))_{H^1(\Omega_2)} dt \right].
 \end{aligned}$$

En appliquant les égalités de l'énergie à u_ε et u , on a :

$$\begin{aligned}
 X_\varepsilon = & \left[\frac{1}{2} |u_0|_{L^2(\Omega)}^2 + \operatorname{Re} \int_0^s (f, u_\varepsilon)_{L^2(\Omega)} dt \right] + \left[\frac{1}{2} |u_0|^2 + \operatorname{Re} \int_0^s (f, u) dt \right] \\
 & + \dots
 \end{aligned}$$

Quand $\varepsilon \rightarrow 0$, d'après le théorème III.1., il vient :

$$X_\varepsilon \rightarrow |u_0|^2 + 2 \operatorname{Re} \int_0^s (f, u) dt - 2 \left[\frac{1}{2} |u(s)|_{L^2(\Omega)}^2 + \operatorname{Re} \int_0^s a(t, u, u) dt \right]$$

Soit $X_\varepsilon \rightarrow 0$ d'après l'égalité de l'énergie appliquée à u .

D'autre part :

$$\begin{aligned}
 X_\varepsilon \geq & \frac{1}{2} |u_\varepsilon - Hu(s)|_{L^2(\Omega^*)}^2 + \frac{1}{2} |\sqrt{\varepsilon} (u_\varepsilon - Hu)(s)|_{L^2(\Omega_2)}^2 \\
 & + \alpha \int_0^s \|u_\varepsilon - u\|_{H^1(\Omega)}^2 dt + \int_0^s \left\| \frac{u_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} \right\|_{H^1(\Omega_1)}^2 dt + \int_0^s \|\sqrt{\varepsilon} (u_\varepsilon - Hu)\|_{H^1(\Omega_2)}^2 dt
 \end{aligned}$$

d'où (III-16), (III-17), (III-18) quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

On a ainsi ramené la résolution d'un problème mêlé à celle d'un problème de *Dirichlet* à coefficients discontinus dans un domaine plus simple.

II.4 *Approximations d'un problème de Dirichlet ou de Neumann du second ordre :*

On est dans le cas où :

$$\Gamma_2 = \emptyset \quad (\text{problème de } \textit{Dirichlet})$$

$$\Gamma_1 = \emptyset \quad (\text{problème de } \textit{Neumann}).$$

La construction du domaine auxiliaire est semblable à celle faite au Chapitre I. dans le cas stationnaire. Pour obtenir les résultats de convergence correspondants il suffit de poser *formellement* dans les théorèmes III-1 et III-2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_2 = \Phi, \quad D = \Omega \cup \Omega_1 \cup \overset{0}{\Gamma} \quad \text{pour } \textit{Dirichlet}. \\ \Omega_1 = \Phi, \quad D = \Omega \cup \Omega_2 \cup \overset{0}{\Gamma} \quad \text{pour } \textit{Neumann}. \end{array} \right.$$

Les démonstrations directes sont en tous points semblables à celle du § II-3.

D'autres choix de A_{ij} , A_i , A_0 sont possibles, comme au Chapitre I; le plus simple pour lequel la convergence forte de $u_\varepsilon|_{\Omega \times [0, T]}$ vers u est assurée dans $L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ étant au § II.3.

$$A_{ij} = \{a_{ij} \text{ dans } \Omega \times [0, T], \delta_{ij} \text{ dans } \Omega_1 \times [0, T], \delta_{ij} \text{ dans } \Omega_2 \times [0, T]\}$$

$$A_i = \{a_i \text{ dans } \Omega \times [0, T], 0 \text{ ailleurs}\}$$

$$A_0 = \left\{ a_0 \text{ dans } \Omega \times [0, T], \frac{1}{\varepsilon} \text{ dans } \Omega_1 \times [0, T], \varepsilon \text{ dans } \Omega_2 \times [0, T] \right\}$$

II-5. *Généralisation à un opérateur $A(t)$ d'ordre $2m$:*

De même qu'aux § II.3. II-4. on peut construire un problème approché (Q_ε) correspondant à l'opérateur (II-4') avec $H_0^m(\Omega) \subset V \subset H^m(\Omega)$. On définit pour cela un opérateur $A_\varepsilon(t)$ prolongeant $A(t)$

à $D \times [0, T]$ et la forme $A_\varepsilon(t, u, v)$ qui lui est associée et on se ramène à la résolution d'un problème de *Dirichlet* dans $D \times [0, T]$. On montre encore la convergence forte de $u_\varepsilon|_{\Omega \times [0, T]}$ vers u dans $L^2(0, T; H^m(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ pour le même choix de C_ε qu'au § II-3. et des A_{pq} donné au Chapitre I. § V.

II-6. Remarque sur la régularisation des coefficients :

Dans les paragraphes précédents nous avons introduit des coefficients discontinus A_{ij} , A_i , A_0 . Si les coefficients donnés a_{ij} , a_j , a_0 (ou a_{pq} pour l'ordre $2m$) sont de classe $\mathcal{C}^p(\bar{\Omega})$ on peut aussi bien construire des coefficients prolongés dans $D \times [0, T]$ aussi réguliers tels que par exemple, pour l'ordre 2 ($m = 1$) :

$A_{ij} = 0 \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)$ dans $\Omega_1 \times [0, T]$, $A_{ij} = 0(\varepsilon)$ dans $\Omega_2 \times [0, T]$ et de même pour A_i , A_0 avec A_{ij} , A_i , $A_0 \in \mathcal{C}^p(\bar{D})$.

III. Equations paraboliques linéaires dans un domaine non cylindrique.

III-1. Enoncé du problème.

III-1-1. Le problème initial formel et notations :

Soit Q un ouvert de $R_x^n \times R_t$, contenu dans $t \geq 0$. Nous posons :

$$\Omega_{t_0} = Q \cap \{t = t_0\}, \quad \forall t_0 \geq 0$$

(on suppose Ω_{t_0} de mesure nulle dans $R_x^n \times R_t$)

$$Q_T = Q \cap \{0 \leq t \leq T\}$$

$$\Gamma = \partial Q = \text{frontière de } Q$$

$$\Gamma' = \Gamma - \Omega_0 = \text{« frontière latérale » de } Q.$$

$$\gamma_t = \partial \Omega_t : \text{frontière de } \Omega_t \text{ dans } R_x^n \cdot (t \geq 0)$$

$$\Gamma'_T = \Gamma' \cap \{0 < t < T\} = \bigcup_{t \in]0, T[} \gamma_t.$$

Nous supposons Q assez régulier (voir [11]).

Considérons l'opérateur $A(t)$ d'ordre $2m$:

$$(III-19) \quad A(t) = \sum_{\substack{|p| \leq m \\ |q| \leq m}} (-1)^{|p|} D^p (a_{pq}(x, t) D^q)$$

où $a_{pq}(x, t)$ est défini pour $(x, t) \in Q$, $|p|, |q| \leq m$.

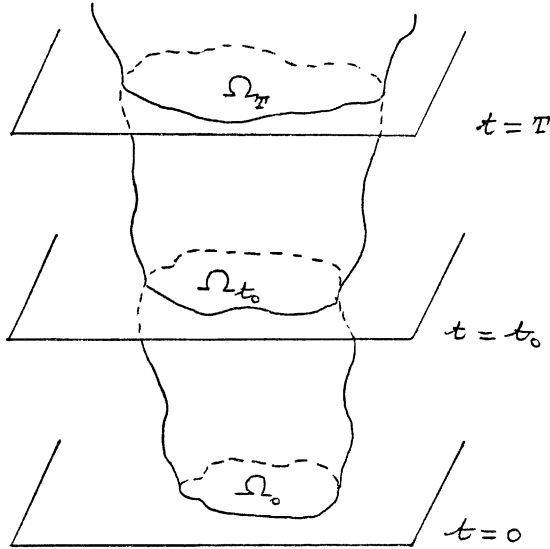


Fig. 3

Le problème de Dirichlet s'écrit formellement :

Problème P : Déterminer u « assez régulière » telle que :

$$\frac{du}{dt}(t) + A(t)u(t) = f(t) \text{ dans } Q$$

$$\gamma_j u(x, t) = 0 \text{ sur } \Gamma', \quad t > 0, \quad j = 0, \dots, m-1$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \text{ pour } x \in \Omega_0$$

où $f(x, t)$ est une fonction définie sur Q , donnée et : $\gamma_j u = \frac{d^j u}{dn_j}$ est la trace d'ordre j de u sur Γ' .

III-1-2. *Espaces fonctionnels et résultats :*

Nous définissons :

$$H^{m,0}(Q) = \{u \mid D^p u \in L^2(Q) \text{ pour } |p| \leq m\}$$

les dérivées étant prises au sens des distributions à support dans Q , [20]. C'est un espace de Hilbert muni de la norme :

$$\|u\|_{H^{m,0}(Q)} = \left(\sum_{|p| \leq m} \int_Q |D^p u|^2 dx dt \right)^{1/2}$$

$H_0^{m,0}(Q)$: adhérence de $\mathcal{D}(Q)$ (fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Q), dans $H^{m,0}(Q)$ pour la norme ci-dessus.

Notation : $F(Q) = H_0^{m,0}(Q)$.

$F'(Q)$: anti-dual topologique de $F(Q)$.

$$\mathcal{A}(Q) = \{u \mid u \in H^{m,0}(Q), u' \in F'(Q)\}$$

$$\mathcal{B}(Q) = \{u \mid u \in F(Q), u' \in F'(Q)\}$$

$\mathcal{A}(Q)$ et $\mathcal{B}(Q)$ sont munis de leur topologie naturelle d'espaces de Hilbert.

$B_0(Q)$ (resp. $B_T(Q)$) = adhérence dans $\mathcal{B}(Q)$ des fonctions identiquement nulles au voisinage de $t = 0$ (resp. $t = T$).

Remarque III-1. Pour Q assez régulier [11] :

$$H^{m,0}(Q_T) = L^2(0, T; H_x^m(\Omega_t))$$

où :

$L^2(0, T; H_x^m(\Omega_t)) = \{u \mid x \rightarrow u(x, t) = u_t(x) \in H_x^m(\Omega_t), t \in [0, T] \text{ p.p. et } t \rightarrow u_t(x) \in L^2 \text{ de } [0, T] \text{ à valeurs dans } H_x^m(\Omega_t)\}$ et

$$\|u\|_{H^{m,0}(Q_T)}^2 = \int_0^T \|u_t\|_{H_x^m(\Omega_t)}^2 dt.$$

Il en sera de même pour $H_0^{m,0}(Q_T)$.

Rappelons certains résultats dont nous avons besoin pour la suite ; voir [11] pour leurs démonstrations.

Résultat III-4. : Pour $u \in H^{m,0}(Q)$ on peut définir $\gamma(D_x^p u)$, trace sur Γ' de $D_x^p u$, dans $L^2(\Gamma')$ pour $|p| \leq m-1$, et une condition nécessaire et suffisante pour que $u \in H_0^{m,0}(Q)$ est que :

$$\gamma(D_x^p u) = 0, \quad |p| \leq m-1.$$

Résultat III-5. : Pour (Q) assez régulier, il existe une application linéaire continue $u \rightarrow u(\cdot, s)$ de $\mathcal{B}(Q)$ dans $L^2(\Omega_s)$ telle que :

$$u(\cdot, s) = u|_{\Omega_s}$$

(trace de u sur Ω_s) quelle que soit u continue dans $\bar{Q}$ et une condition nécessaire et suffisante pour que u appartenant à $\mathcal{B}(Q_T)$ soit dans $B_T(Q_T)$ est que $u(\cdot, T) = 0$.

On a un résultat analogue pour $B_0(Q_T)$.

Notation : $\langle u, v \rangle$, $u \in F(Q_T)$, $v \in F'(Q_T)$ désigne la dualité entre F et F' .

III-1-3. Le problème variationnel associé :

Posons pour $u, v \in H^{m,0}(Q_T)$, T fini positif.

$$a(t; u, v) = \int_{\Omega_t} \sum_{\substack{|p| \leq m \\ |q| \leq m}} a_{pq} D^p u \cdot \overline{D^q v} \, dx$$

définie presque partout pour $t \in [0, T]$

$$a_T(u, v) = \int_0^T a(t; u, v) \, dt = \int_{Q_T} \sum a_{pq} D^p u \cdot \overline{D^q v} \, dx \, dt.$$

Hypothèses :

$H1 : a_{pq}(x, t) \in L^\infty(Q_T), \quad |p|, |q| \leq m, \quad \forall T \text{ fini}$

$H2 : f \in F'(Q_T), \quad \forall T \text{ fini}$

$H3 : - \text{coercivité} - \text{pour tout } T \text{ fini, il existe } \lambda(T) \geq 0 \text{ et } \alpha(T) > 0$
tels que :

$$a_T(u, u) + \lambda(T) \|u\|_{L^2(Q_T)}^2 \geq \alpha(T) \|u\|_{F(Q_T)}^2, \quad \forall u \in F(Q_T).$$

Nous ferons la réduction $\lambda(T) = 0$.

$H4 : u_0 \in L^2(\Omega_0)$.

$H5 : Q \text{ assez régulier (de classe } \mathcal{C}^m \text{ par morceaux, par exemple).}$

Nous énonçons le problème variationnel qui est bien défini sous les hypothèses précédentes et les résultats énoncés.

PROBLÈME V. Déterminer $u \in \mathcal{B}(Q_T)$ telle que :

$$(III-20) \quad a_T(u, \varphi) - \langle u, D_t \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle + (u_0, \varphi(\cdot, 0))_{L^2(\Omega_0)}$$

pour tout $\varphi \in B_T(Q_T)$.

THÉORÈME III-3. Sous les hypothèses $H1, \dots, H5$ le problème V admet une solution et une seule.

Il convient pour la démonstration de distinguer deux cas :

1) $u_0 \equiv 0$ dans Ω_0 . Le théorème est alors démontré directement dans [11].

2) $u_0 \not\equiv 0$ dans Ω_0 . Nous démontrerons d'abord l'unicité. L'existence de u nous sera fournie par les quatre procédés d'approximation développés plus loin.

Unicité de la solution de V :

Soient u_1, u_2 deux solutions de V et :

$$w(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t).$$

Pour $t = 0$ dans $L^2(\Omega_0)$:

$$w(\cdot, 0) = u_1(\cdot, 0) - u_2(\cdot, 0) \equiv 0.$$

Comme $w \in \mathcal{B}(Q_T)$ on déduit du *Résultat* III-5 que $w \in B_0(Q_T)$.
 w vérifie alors :

$$a_T(w, \varphi) - \langle w, D_t \varphi \rangle = 0, \quad \forall \varphi \in B_T(Q_T), \quad w \in B_0(Q_T).$$

Prenons $\varphi \in \mathcal{D}(Q_T) \subset B_T(Q_T)$; il vient :

$$(III-21) \quad D_t w + Aw = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(Q_T)$$

où A est défini en (III-19).

Pour $w \in F(Q_T)$, $Aw \in F'(Q_T)$ de sorte que (III-21) est vraie dans $F'(Q_T)$ par densité.

Prenons le produit scalaire de (III-21) avec w :

$$\langle Aw, w \rangle + \langle D_t w, w \rangle = 0$$

mais pour tout $v \in F(Q_T)$:

$$\langle Aw, v \rangle = a_T(w, v), \text{ soit :}$$

$$2 \operatorname{Re} a_T(w, w) + \langle D_t w, w \rangle + \langle w, D_t w \rangle = 0.$$

Or $\langle D_t w, w \rangle + \langle w, D_t w \rangle \geq 0$ pour $w \in B_0(Q_T)$ (cf. [11]) d'où :
 $2 \operatorname{Re} a_T(w, w) \leq 0$ et $w \equiv 0$ dans Q_T , ce qui démontre l'unicité.

III-2. Problème approché par la méthode du domaine auxiliaire :

Nous allons définir dans ce paragraphe une famille de problèmes approchés V_ε , problèmes paraboliques linéaires dans un domaine cylindrique, dont la solution u_ε restreinte à Q_T convergera vers une solution u de V quand ε tend vers 0.

Considérons pour T fixé un ouvert ω de R^n tel que : $\omega \supset \Omega_t$ pour $t \in [0, T]$. Alors $\omega \times [0, T]$ est un ouvert cylindrique contenant Q_T (figure 4).

Nous posons pour $u, v \in L^2(0, T; H^m(\omega))$:

$$A_\varepsilon(u, v) = \sum_{\substack{|p| \leq m \\ |q| \leq m}} \int_{\omega \times [0, T]} A_{pq}(x, t) \cdot D^p u \cdot D^q \bar{v} \, dx \, dt$$

où les $A_{pq}(x, t)$ sont définis sur $\omega \times [0, T]$.

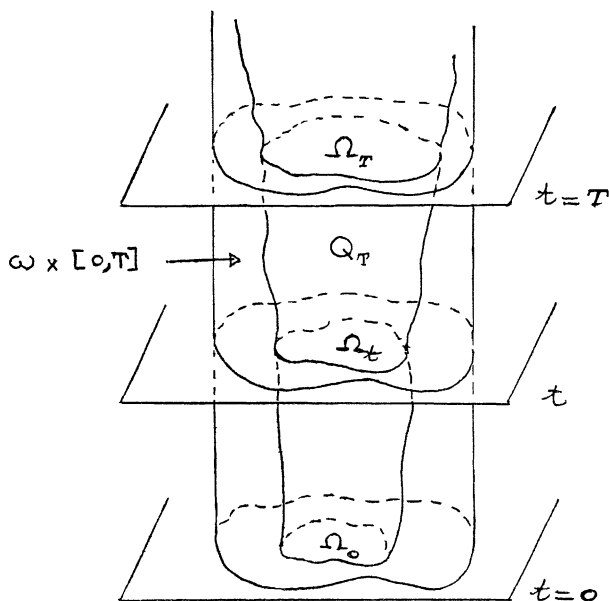


Fig. 4

Soit :

$$\tilde{f}(x, t) = \{ f(x, t) \text{ dans } Q_T, 0 \text{ en dehors} \}.$$

$$\tilde{u}_0(x) = \{ u_0(x) \text{ dans } \Omega_0, 0 \text{ en dehors} \}.$$

Alors :

$$\tilde{f}(x, t) \in L^2(0, T; H^{-m}(\omega))$$

$$\tilde{u}_0(x) \in L^2(\omega).$$

Définissons le :

Problème approché V_ε : Déterminer $u_\varepsilon \in \mathcal{B}(\omega \times [0, T])$ telle que :

$$A_\varepsilon(u_\varepsilon, \varphi) - \langle u_\varepsilon, \varphi' \rangle = \langle \tilde{f}, \varphi \rangle + (\tilde{u}_0, \varphi(0))_{L^2(\omega)}$$

pour tout $\varphi \in B_T(\omega \times [0, T])$.

Soit A_ε l'opérateur d'ordre $2m$ associé à $A_\varepsilon(u, v)$:

$$A_\varepsilon = \sum_{\substack{|p| \leq m \\ |q| \leq m}} (-1)^{|p|} D^p (A_{pq}(x, t) D^q).$$

On vérifie facilement que le problème V_ε est équivalent au :

Problème V_ε^1 : Déterminer $u_\varepsilon \in \mathcal{B}(\omega \times [0, T])$ telle que :

$$(III-22) \quad D_t u_\varepsilon + A_\varepsilon u_\varepsilon = \tilde{f} \text{ dans } F'(\omega \times [0, T])$$

$$u_\varepsilon(\cdot, 0) = \tilde{u}_0 \text{ dans } L^2(\omega).$$

Rappelons le résultat suivant démontré dans [11].

Résultat III-6. : Si $b(u, v)$ est une forme sesquilinéaire continue sur $F(\omega \times [0, T]) \times F(\omega \times [0, T])$, coercive, et $g \in F'(\omega \times [0, T])$, $v_0 \in L^2(\omega)$, il existe une solution et une seule de :

$$D_t v + Bv = g \text{ dans } F'(\omega \times [0, T])$$

$$v(\cdot, 0) = v_0 \text{ dans } L^2(\omega) \text{ où } v \in \mathcal{B}(\omega \times [0, T])$$

où B est l'opérateur associé à $b(u, v)$ par :

$$\langle Bu, v \rangle = b(u, v) \quad \forall u, v \in F(\omega \times [0, T])$$

les crochets désignant la dualité entre F et F' .

Nous donnons maintenant un choix des A_{pq} , le plus simple possible pour les applications, pour lequel nous démontrerons l'existence et l'unicité de $u_\varepsilon(\varepsilon > 0)$, et la convergence de $u_\varepsilon|_{Q_T}$ vers « une » solution de V .

Choix des A_{pq} :

$$A_{pq}(x, t) = \begin{cases} a_{pq}(x, t) & \text{dans } Q_T, \quad |p|, |q| \leq m. \\ \delta_{pq} & \text{dans } Q'_T = \omega \times [0, T] - \bar{Q}_T. \\ & \text{si } |p| + |q| > 0. \\ \frac{1}{\varepsilon} & \text{dans } Q'_T \text{ si } |p| = |q| = 0. \end{cases}$$

où :

$$\delta_{pq} = \{1 \text{ si } p = q; 0 \text{ si } p \neq q\}.$$

De l'hypothèse $H1$ on déduit alors : $A_{pq} \in L^\infty(\omega \times [0, T])$ et de $H3$ avec $\lambda(T) = 0$:

$$\forall v \in F(\omega \times [0, T]).$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} A_\varepsilon(v, v) = \operatorname{Re} a_T(v|_{Q_T}, v|_{Q_T}) + \sum_{\substack{|p| \leq m \\ |p| > 0}} \int_{Q'_T} |D^p v|^2 dx dt \\ + \frac{1}{\varepsilon} \int_{Q'_T} |v|^2 dx dt. \end{aligned}$$

D'où pour $\varepsilon > 0$:

$$\operatorname{Re} A_\varepsilon(v, v) \geq \alpha(T) \|v\|_{F(Q_T)}^2 + \inf\left(1, \frac{1}{\varepsilon}\right) \|v\|_{F(Q'_T)}^2$$

$$\operatorname{Re} A_\varepsilon(v, v) \geq \inf\left(\alpha(T), 1, \frac{1}{\varepsilon}\right) \|v\|_{F(\omega \times [0, T])}^2.$$

Du *Résultat* III-6. nous déduisons alors le :

Résultat III-7. : Pour $\varepsilon > 0$ fixé le problème approché V_ε^1 (ou V_ε) admet une solution unique.

Montrons maintenant le :

THÉORÈME III-4. (*de convergence faible*) :

Quand $\varepsilon \rightarrow 0$, la restriction de u_ε à Q_T converge faiblement dans $\mathcal{A}(Q_T)$ vers « une » solution du problème initial V .

On montre ainsi l'existence d'une solution de V d'où le théorème III-3.

DÉMONSTRATION. Prenons le produit scalaire (entre $F(\omega \times [0, T])$ et $F'(\omega \times [0, T])$) de (III-22) avec u_ε ; il vient :

$$\langle D_t u_\varepsilon, u_\varepsilon \rangle + \langle A_\varepsilon u_\varepsilon, u_\varepsilon \rangle = \langle \tilde{f}, u_\varepsilon \rangle.$$

Mais :

$$\langle A_\varepsilon u_\varepsilon, u_\varepsilon \rangle = A_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon)$$

et en prenant 2 fois la partie réelle :

$$2 \operatorname{Re} A_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) + \langle D_t u_\varepsilon, u_\varepsilon \rangle + \langle u_\varepsilon, D_t u_\varepsilon \rangle = 2 \operatorname{Re} \langle \tilde{f}, u_\varepsilon \rangle.$$

D'après [11] (proposition 3-2), pour $u_\varepsilon \in \mathcal{B}(\omega \times [0, T])$:

$$\langle D_t u_\varepsilon, u_\varepsilon \rangle + \langle u_\varepsilon, D_t u_\varepsilon \rangle = \|u_\varepsilon(\cdot, T)\|_{L^2(\omega)}^2 - \|u_\varepsilon(\cdot, 0)\|_{L^2(\omega)}^2$$

d'où :

$$2 \operatorname{Re} A_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) + \|u_\varepsilon(\cdot, T)\|_{L^2(\omega)}^2 = 2 \operatorname{Re} \langle \tilde{f}, u_\varepsilon \rangle + \|u_0\|_{L^2(\Omega_0)}^2$$

et d'après la coercivité de $A_\varepsilon(u, v)$:

$$\begin{aligned} \alpha(T) \|u_\varepsilon|_{Q_T}\|_{F(Q_T)}^2 + \|u_\varepsilon|_{Q'_T}\|_{F(Q'_T)}^2 + \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) \|u_\varepsilon\|_{L^2(Q'_T)}^2 \\ \leq \|f\|_{F'(Q_T)} \cdot \|u_\varepsilon\|_{F(Q_T)} + \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2(\Omega_0)}^2. \end{aligned}$$

Par suite pour tout $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < 1$:

$$(1) \quad u_\varepsilon \text{ est bornée dans } F(\omega \times [0, T])$$

$$(2) \quad \frac{u_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} \Big|_{Q'_T} \text{ est bornée dans } L^2(Q'_T)$$

où $Q'_T = \omega \times [0, T] - \bar{Q}_T$.

De toute suite $\varepsilon \rightarrow 0$, on peut alors extraire une sous-suite $\eta \rightarrow 0$ telle que :

$$(1') \quad u_\eta \rightharpoonup w \text{ dans } F(\omega \times [0, T]) \text{ faible.}$$

$$(2') \quad \frac{u_\eta}{\sqrt{\eta}} \Big|_{Q'_T} \rightharpoonup \theta \text{ dans } L^2(Q'_T) \text{ faible où } \theta(x, t) \in L^2(Q'_T).$$

Il résulte de (1') que :

$$u_\eta|_{Q'_T} \rightharpoonup w|_{Q'_T} \text{ dans } L^2(Q'_T) \text{ faible,}$$

et d'après (2') :

$$u_\eta|_{Q'_T} = \frac{u_\eta}{\sqrt{\eta}} \Big|_{Q'_T} \cdot \sqrt{\eta} \rightharpoonup 0 \text{ dans } L^2(Q'_T) \text{ faible,}$$

soit :

$$(3) \quad w|_{Q'_T} \equiv 0.$$

Comme $w \in F(\omega \times [0, T])$, d'après le *Résultat* III-4., on peut définir $\gamma(D^p w)$ sur Γ'_T pour $|p| \leq m-1$ et de (3) on déduit :

$$\gamma(D^p w) = 0 \text{ sur } \Gamma'_T, |p| \leq m-1$$

soit d'après le *Résultat* III-4 :

$$w|_{Q_T} \in F(Q_T).$$

Montrons que $w|_{Q_T}$ est solution de V :

Pour tout $\varphi \in B_T(Q_T)$ posons :

$$\widetilde{\varphi}(x, t) = \{\varphi(x, t) \text{ dans } Q_T, 0 \text{ dans } Q'_T\}$$

où

$$Q'_T = \omega \times [0, T] - \overline{Q}_T.$$

Alors

$$\widetilde{\varphi}(x, t) \in B_T(\omega \times [0, T]).$$

Prenons $\varphi \rightrightarrows \tilde{\varphi}$, $\varepsilon \rightrightarrows \eta$ dans le problème V_ε ; il vient :

$$a_T(u_\eta |_{Q_T}, \varphi) - \langle u_\eta |_{Q_T}, \varphi' \rangle = \langle f, \varphi \rangle + (u_0, \varphi(0))_{L^2(\Omega_0)}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne la dualité entre $F(Q_T)$ et $F'(Q_T)$.

Quand $\eta \rightarrow 0$,

la forme $u \rightarrow a_T(u, \varphi)$ étant continue sur $H^{m,0}(Q_T)$,

$a_T(u_\eta |_{Q_T}, \varphi) \rightarrow a_T(w |_{Q_T}, \varphi)$ d'après (1').

$$\langle u_\eta |_{Q_T}, \varphi' \rangle \rightarrow \langle w |_{Q_T}, \varphi' \rangle$$

et à la limite :

$$(4) \quad a_T(w |_{Q_T}, \varphi) - \langle w |_{Q_T}, \varphi' \rangle =$$

$$\langle f, \varphi \rangle + (u_0, \varphi(0))_{L^2(\Omega_0)}, \quad \forall \varphi \in B_T(Q_T)$$

$w |_{Q_T}$ est alors solution du problème V .

Il reste à montrer que :

$$D_t(w |_{Q_T}) \in F'(Q_T) \text{ et } D_t(u_\eta |_{Q_T}) \rightarrow D_t w |_{Q_T} \text{ dans } F'(Q_T).$$

De (4) on déduit, en prenant $\varphi \in \mathcal{D}(Q_T)$:

$$(5) \quad D_t w |_{Q_T} + Aw |_{Q_T} = f \text{ dans } \mathcal{D}'(Q_T).$$

Mais pour $w |_{Q_T} \in F(Q_T)$, $A(w |_{Q_T}) \in F'(Q_T)$ et de (5) $D_t w |_{Q_T} = f - Aw |_{Q_T} \in F'(Q_T)$, car $\mathcal{D}'(Q_T)$ est dense dans $F'(Q_T)$.

(5) est alors vraie dans $F'(Q_T)$.

D'autre part la solution u_η de V_η vérifie :

$$A(u_\eta |_{Q_T}) + D_t(u_\eta |_{Q_T}) = f \text{ dans } F'(Q_T)$$

Quand $\eta \rightarrow 0$, A étant un opérateur linéaire continu de $H^{m,0}(Q_T)$ dans $F'(Q_T)$, il résulte de (1') :

$$A(u_\eta |_{Q_T}) \rightarrow A(w |_{Q_T}) \text{ dans } F'(Q_T) \text{ faible.}$$

D'où :

$$D_t(u_\eta|_{Q_T}) = f - A(u_\eta|_{Q_T}) - f - A(w|_{Q_T})$$

soit

$$D_t(u_\eta|_{Q_T}) \rightharpoonup D_t(w|_{Q_T}) \text{ d'après (5) dans } F'(Q_T) \text{ faible.}$$

$w|_{Q_T}$ est alors la solution unique du problème V et, la limite de $u_\eta|_{Q_T}$ étant indépendante de la sous-suite, la suite entière $u_\varepsilon|_{Q_T}$ converge vers $w|_{Q_T}$ dans $\mathcal{A}(Q_T)$.

A partir du théorème III-4. nous allons montrer le :

THÉORÈME III-5. (*de convergence forte*) : quand $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$(III-23) \quad u_\varepsilon|_{Q_T} \rightarrow w|_{Q_T} \text{ dans } H^{m,0}(Q_T) \text{ fort.}$$

$$(III-24) \quad u_\varepsilon|_{Q'_T} \rightarrow 0 \quad \text{dans } H^{m,0}(Q'_T) \text{ fort.}$$

$$(III-25) \quad \frac{u_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} \Big|_{Q'_T} \rightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(Q'_T) \text{ fort.}$$

DÉMONSTRATION : Prenons le produit scalaire (de $F(Q_T)$ avec $F'(Q_T)$) de (5) avec $w|_{Q_T}$; il vient :

$$\langle D_t w, w \rangle + \langle A w, w \rangle = \langle f, w \rangle$$

d'où

$$\langle D_t w, w \rangle + \langle w, D_t w \rangle + 2 \operatorname{Re} a_T(w, w) = 2 \operatorname{Re} \langle f, w \rangle.$$

Mais pour $w|_{Q_T} \in \mathcal{B}(Q_T)$, [11] :

$$\langle D_t w, w \rangle + \langle w, D_t w \rangle = \|w(\cdot, T)\|_{L^2(\Omega_T)}^2 - \|w(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega_0)}^2$$

soit :

$$(III-26) \quad \|w(\cdot, T)\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + 2 \operatorname{Re} a_T(w|_{Q_T}, w|_{Q_T}) = 2 \operatorname{Re} \langle f, w|_{Q_T} \rangle + \\ + \|u_0\|_{L^2(\Omega_0)}^2.$$

De même, l'égalité de l'énergie vérifiée par u_ε s'écrit :

$$(III-27) \quad |u_\varepsilon(\cdot, T)|_{L^2(\omega)}^2 + 2 \operatorname{Re} A_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) = 2 \operatorname{Re} \langle \tilde{f}, u_\varepsilon \rangle + |u_0|_{L^2(\Omega_0)}^2.$$

Posons :

$$Nw = \begin{cases} w(x, t), (x, t) \in Q_T \\ 0, (x, t) \in Q'_T = \omega \times [0, T] - \bar{Q}_T \end{cases}$$

$$w|_{Q_T} \in F(Q_T) \text{ implique : } Nw \in F(\omega \times [0, T]).$$

Considérons :

$$X_\varepsilon = |u_\varepsilon(\cdot, T) - Nw(\cdot, T)|_{L^2(\omega)}^2 + 2 \operatorname{Re} A_\varepsilon(u_\varepsilon - Nw, u_\varepsilon - Nw)$$

En développant X_ε et en utilisant les égalités de l'énergie (III-26), (III-27) et le théorème III-4. on montre facilement que :

$$X_\varepsilon \rightarrow 0 \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} X_\varepsilon &= 2 \operatorname{Re} a_T(u_\varepsilon|_{Q_T} - w, u_\varepsilon|_{Q_T} - w) + 2 \|u_\varepsilon|_{Q'_T}\|_{H^{m,0}(Q'_T)}^2 \\ &\quad + 2 \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) |u_\varepsilon|_{Q'_T}|_{L^2(Q'_T)}^2 + |u_\varepsilon(\cdot, T) - Nw(\cdot, T)|_{L^2(\omega)}^2 \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} X_\varepsilon &\geq 2\alpha(T) \|u_\varepsilon|_{Q_T} - w\|_{H^{m,0}(Q_T)}^2 + 2 \|u_\varepsilon|_{Q'_T}\|_{H^{m,0}(Q'_T)}^2 \\ &\quad + 2 \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) |u_\varepsilon|_{Q'_T}|_{L^2(Q'_T)}^2 \end{aligned}$$

quand $\varepsilon \rightarrow 0$ on en déduit (III-23), (III-24), (III-25).

Interprétation du problème V_ε :

u_ε vérifie pour tout T fini :

$$D_t u_\varepsilon + A u_\varepsilon = f \text{ dans } F'(Q_T)$$

$$D_t u_\varepsilon + \sum_{p=1}^m (-1)^p \Delta^p u_\varepsilon + \frac{u_\varepsilon}{\varepsilon} = 0 \text{ dans } F'(Q'_T)$$

$\gamma_j u_\varepsilon = 0$ sur $S \times [0, T]$, pour $j = 0, \dots, m-1$, où $S = \partial\omega$.
+ conditions de passage (formelles) sur Γ'_T .

Autre choix des A_{pq} :

On aurait pu prendre :

$$A_{pq} = \left\{ a_{pq}(x, t) \text{ dans } Q_T; \frac{1}{\varepsilon} \delta_{pq} \text{ dans } Q'_T \right\}, \quad \forall |p|, |q| \leq m.$$

Au lieu de (III-23), (III-24), (III-25) on aurait

$$(III-28) \quad \begin{cases} u_\varepsilon|_{Q_T} \rightarrow w|_{Q_T} \text{ fort dans } H^{m,0}(Q_T) \\ \frac{u_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}|_{Q'_T} \rightarrow 0 \text{ fort dans } H^{m,0}(Q'_T). \end{cases}$$

Pratiquement on se fixera une limite de temps $t = T$, et l'on choisira l'ouvert ω tel que $\omega \times [0, T] \supset Q_T$. On est alors ramené à résoudre le problème V_ε correspondant dans le domaine cylindrique $\omega \times [0, T]$.

Nous donnons maintenant une deuxième famille d'approximations du problème V basée sur la méthode de GALERKIN généralisée au cas non cylindrique.

III-3. Problème approché par la méthode de GALERKIN :

Nous supposons qu'il existe une base $\{\varphi^j(x, t), j = 1, 2, \dots\}$ de $H_0^m(\Omega_t)$, pour tout $t \geq 0$, telle que :

$\varphi^j(x, t) \in F(Q_T)$, $\forall T$ fini positif, $j = 1, 2, \dots$

$t \rightarrow \varphi^j(x, t)$ soit une fois différentiable sur $[0, T]$ pour tout $(x, t) \in Q_T$, T fini quelconque et $j > 0$.

$(\varphi^j(t)), j = 1, 2, \dots$ forme un système orthonormal dans $L^2(\Omega_t)$, $\forall t \in [0, T]$. (On peut toujours s'y ramener).

Soit $\Phi_m (m \geq 1)$ l'espace engendré par $\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^m$:

$$\Phi_m = \left\{ u_m \mid u_m(x, t) = \sum_{i=1}^m u_{im}(t) \cdot \varphi^i(x, t), u_{im}(t) \in \mathcal{C}^1([0, T] \rightarrow R) \right\}.$$

Nous définissons le :

Problème approché V_m : Déterminer $u_m \in \Phi_m$ telle que :

$$(III-29) \quad a(t; u_m(t), \varphi^j(t)) + (D_t u_m(t), \varphi^j(t))_{L^2(\Omega_t)} = (f(t), \varphi^j(t))_{L^2(\Omega_t)}$$

pour $j = 1, 2, \dots, m$ et presque tout t dans $[0, T]$.

$$(III-30) \quad u_{im}(0) = \alpha_{im}, i = 1, \dots, m$$

où les α_{im} sont choisis tels que :

$$(III-31) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \alpha_{im} \varphi^i(x, 0) = u_0(x) \text{ dans } L^2(\Omega_0) \text{ fort.}$$

(III-31) sera vérifiée si on prend :

$$\alpha_{im} = (u_0, \varphi^i(x, 0))_{L^2(\Omega_0)}$$

puisque $(\varphi^i(0))$ forme une base de $L^2(\Omega_0)$.

Nous remplaçons l'hypothèse H_2 du § III-1-3 par :

$$H_2' : f \in L^2(Q_T) \equiv L^2(0, T; L^2(\Omega_t)), \forall T > 0 \text{ fini.}$$

THÉORÈME III-6 : Sous les hypothèses H_1, H_2', H_3, H_4 et H_5 , le problème approché V_m admet une solution unique et de plus :

$$u_m \in F(Q_T), u_m \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega_t)), \forall T > 0 \text{ fini.}$$

DÉMONSTRATION : Explicitons (III-29) ; pour $j = 1, \dots, m$

$$\sum_{i=1}^m [u_{im}(t) a(t; \varphi^i(t), \varphi^j(t)) + (D_t(u_{im}(t) \varphi^i(t)), \varphi^j(t))_{L^2(\Omega_t)}] \\ = (f(t), \varphi^j(t))_{L^2(\Omega_t)}.$$

Les $(\varphi^i(t))$ étant orthonormales dans $L^2(\Omega_t)$ il vient :

$$u'_{jm}(t) = - \sum_{i=1}^m [a(t; \varphi^i(t), \varphi^j(t)) + (\varphi^{i'}(t), \varphi^j(t))] u_{im}(t) \\ + (f(t), \varphi^j(t)) \text{ pour } j = 1, \dots, m; p.p. \text{ en } t \in [0, T] \\ u_{jm}(0) = \alpha_{jm}, j = 1, \dots, m.$$

$(u_{jm}(t)), j = 1, \dots, m$ est donc solution d'un problème de Cauchy pour un système de m équations différentielles linéaires du premier ordre en t ; $t \in [0, T]$

Existence et unicité de $(u_{jm}(t)), j = 1, \dots, m$

$t \rightarrow a(t; \varphi^i(t), \varphi^j(t))$ est mesurable et sommable sur $[0, T]$ (et même dans $L^\infty([0, T])$).

$t \rightarrow (\varphi^{i'}(t), \varphi^j(t))$ et $t \rightarrow (f(t), \varphi^j(t))$ sont mesurables et sommables sur $[0, T]$.

Il s'ensuit qu'il existe une solution unique $u_{jm}(t), j = 1, \dots, m$ du système précédent, absolument continue sur $[0, T]$; cf. [14] par exemple.

$$u_m \in F'(Q_T) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega_t)).$$

En multipliant les deux membres de (III-29) par $u_{jm}(t)$ et en sommant sur j de 1 à m , il vient :

$$a(t; u_m(t), u_m(t)) + (D_t u_m(t), u_m(t))_{L^2(\Omega_t)} = (f(t), u_m(t))_{L^2(\Omega_t)}$$

et :

$$\int_0^s a(t; u_m(t), u_m(t)) dt + \int_0^s (D_t u_m(t), u_m(t)) dt = \int_0^s (f(t), u_m(t)) dt$$

mais :

$$\int_0^s [(D_t u_m(t), u_m(t)) + (u_m(t), D_t u_m(t))] dt = \|u_m(s)\|_{L^2(\Omega_s)}^2 - \|u_m(0)\|_{L^2(\Omega_0)}^2$$

(vérification immédiate en se servant du fait que $u_m(t) = 0$ sur la frontière latérale de Q_T, Γ'_T).

D'où :

$$\begin{aligned} \text{(III-32)} \quad \|u_m(s)\|_{L^2(\Omega_s)}^2 + 2 \operatorname{Re} \int_0^s a(t; u_m(t), u_m(t)) dt \\ = \|u_m(0)\|_{L^2(\Omega_0)}^2 + 2 \operatorname{Re} \int_0^s (f(t), u_m(t)) dt \end{aligned}$$

et en minorant le premier membre à partir de la coercivité, il vient :

$$\begin{aligned} \|u_m(s)\|_{L^2(\Omega_s)}^2 + 2\alpha \|u_m\|_{F(Q_s)}^2 \leq \|u_m(0)\|_{L^2(\Omega_0)}^2 + \alpha \|u_m\|_{F(Q_s)}^2 \\ + \frac{1}{\alpha} \|f\|_{L^2(Q_s)}^2. \end{aligned}$$

Comme, d'après (III-31), $u_m(0) \rightarrow u_0$ fortement dans $L^2(\Omega_0)$, on a :

$$\|u_m(0)\|_{L^2(\Omega_0)} \leq K, \text{ constante indépendante de } m$$

et par suite :

$$\|u_m\|_{F(Q_s)}^2 \leq K_1 = \frac{K^2}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \|f\|_{L^2(Q_T)}^2$$

(III-33)

$$\|u_m(s)\|_{L^2(\Omega_s)}^2 \leq K_1, \forall s \in [0, T].$$

d'où le théorème. On retrouve d'ailleurs l'unicité de u_m à partir de ces inégalités.

Montrons maintenant la convergence forte de u_m vers u . Nous avons le :

THÉORÈME III-7 (*de convergence forte*): quand $m \rightarrow \infty$, $u_m \rightarrow u$ dans $F(Q_T)$ fort et $L^\infty(0, T; L^2(\Omega_t))$ fort où u est « une » solution du problème initial V .

DÉMONSTRATION: De (III-33) on déduit que de toute suite $m \rightarrow \infty$ on peut extraire une sous-suite $\mu \rightarrow \infty$ telle que :

$$(1) \quad u_\mu \rightharpoonup u \text{ dans } F(Q_T) \text{ faible}$$

$$(2) \quad u_\mu \rightarrow u \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega_t)) \text{ faible}$$

u est solution du problème initial V :

Soit :

$$W_m = \left\{ \Psi \mid \Psi(x, t) = \sum_{j=1}^m \Psi_j(t) \varphi^j(x, t), \Psi_j(t) \in \mathcal{D}([0, T]) \right\}.$$

Multiplions (III-29) par $\varphi_j(t)$ et sommons sur j de 1 à m ; il vient en intégrant sur $[0, T]$:

$$\int_0^T a(t; u_m(t), \Psi(t)) dt + \int_0^T (D_t u_m(t), \Psi(t))_{L^2(\Omega_t)} dt = \int_0^T (f(t), \Psi(t))_{L^2(\Omega_t)} dt$$

mais on voit facilement (à partir de $u_m = \Psi = 0$ sur Γ'_T) que :

$$\int_0^T (D_t u_m(t), \Psi(t)) dt = - \int_0^T (u_m(t), D_t \Psi(t)) dt - (u_m(0), \Psi(0))_{L^2(\Omega_0)}$$

pour tout $\Psi \in W_m$.

Prenons $m = \mu$, W_n fixé avec $n < \mu$. On a :

$$a_T(u_\mu, \Psi) - (u_\mu, D_t \Psi)_{L^2(Q_T)} = (f, \Psi)_{L^2(Q_T)} + (u_\mu(0), \Psi(0))_{L^2(\Omega_0)}.$$

pour tout $\Psi \in W_n$.

De (1), (2) et (III-30), on déduit quand $\mu \rightarrow \infty$:

$$(3) \quad a_T(u, \Psi) - (u, D_t \Psi)_{L^2(Q_T)} = (f, \Psi)_{L^2(Q_T)} + (u_0, \Psi(0))_{L^2(\Omega_0)}$$

$\forall \Psi \in W_n, n$ entier positif quelconque.

Enfin, d'après les hypothèses faites sur $\varphi^j(x, t)$ et $\psi_j(t)$, quand $m \rightarrow \infty$, W_m est dense dans $B_T(Q_T)$ où, rappelons le :

$B_T(Q_T)$ = adhérence des fonctions $\varphi \in F(Q_T)$, $\varphi' \in F'(Q_T)$ identiquement nulles au voisinage de Ω_T .

Alors en passant à la limite dans (3) suivant n il vient :

$$a_T(u, \varphi) - \langle u, D_t \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle + (u_0, \varphi(0))_{L^2(\Omega_0)}$$

$$\forall \varphi \in B_T(Q_T); u \in F(Q_T).$$

De là on montre, comme pour le Théorème III-4, que $D_t u \in F'(Q_T)$, c.a.d. que u est solution du problème V.

Convergence forte de u_m vers u .

Posons :

$$X_m = \|u_m(s) - u(s)\|_{L^2(\Omega_S)}^2 + 2 \operatorname{Re} \int_0^s a(t; u_m - u, u_m - u) dt$$

définie pour $0 < S \leq T$, presque partout.

X_m s'écrit en développant :

$$\begin{aligned} X_m &= [\|u_m(S)\|_{L^2(\Omega_S)}^2 + 2 \operatorname{Re} a_s(u_m, u_m)] \\ &\quad + [\|u(S)\|_{L^2(\Omega_S)}^2 + 2 \operatorname{Re} a_s(u, u)] \\ &\quad - 2 [\operatorname{Re} (u_m(S), u(S))_{L^2(\Omega_S)} + 2 \operatorname{Re} a_s(u_m, u)]. \end{aligned}$$

En utilisant les égalités de l'énergie (III-26) et (III-32) vérifiées par u et u_m , puis la convergence faible de u_m vers u , il vient :

$$X_m \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad m \rightarrow \infty.$$

D'autre part de la coercivité de $a_S(u, v)$ il vient :

$$X_m \geq \|u_m(S) - u(S)\|_{L^2(\Omega_S)}^2 + 2\alpha \|u_m - u\|_{F(Q_S)}^2$$

soit :

$$u_m(S) \rightarrow u(S) \quad \text{dans} \quad L^\infty(0, T; L^2(\Omega_S)) \quad \text{fort.}$$

$$u_m \rightarrow u \quad \text{dans} \quad F(Q_S) \quad \text{fort.}$$

ce qui démontre le théorème.

On vient ainsi de redémontrer l'existence d'une solution du problème initial V et de généraliser la méthode de GALERKIN au cas non cylindrique.

Pratiquement pour m fixé, on aura à résoudre un système de m équations différentielles linéaires d'ordre 1, la difficulté consistant à construire des fonctions $\varphi^j(x, t)$ ayant les propriétés voulues.

III-4. Problème approché par la méthode variationnelle des différences finies.

III-4.1. Construction du problème approché.

Nous allons associer au problème initial V une famille de problèmes approchés au sens des différences finies, dont la construction sera semblable à celle donnée dans RAVIART [15] pour un domaine cylindrique, avec les modifications nécessaires dues au fait que le domaine varie avec le temps.

Nous supposons, comme au § III-3, que $f \in L^2(Q_T)$. Posons, pour simplifier nos notations :

$$\begin{cases} V(t) = H_0^m(\Omega_t), & V'(t) = H^{-m}(\Omega_t) \\ H(t) = L^2(\Omega_t) & \text{pour tout } t \in [0, T]. \end{cases}$$

Avec ces notations le problème initial V peut s'écrire :

PROBLÈME V_1 : Déterminer $u \in L^2(0, T; V(t))$, $u' \in L^2(0, T; V'(t))$ telle que :

$$(III-34) \quad \int_0^T [a(t; u(t), \varphi(t)) - \langle u(t), \varphi'(t) \rangle] dt = \int_0^T (f(t), \varphi(t)) dt + (u_0, \varphi(\cdot, 0))_{L^2(\Omega_0)}$$

$$\forall \varphi \in \Phi(Q_T) = \{\varphi \mid \varphi \in L^2(0, T; V(t)), \varphi' \in L^2(0, T; V'(t)), \varphi(\cdot, T) = 0\}$$

où, dans ce paragraphe, $\langle, \rangle$ désigne la dualité entre $V(t)$ et $V'(t)$, et $(f(t), g(t))$ le produit scalaire dans $L^2(\Omega_t)$.

L'équivalence des problèmes V et V_1 découle des résultats du § III-1-2 c'est à dire pour Q assez régulier.

Nous allons approcher le problème initial sous la forme V_1 . Pour cela nous introduisons pour tout $t \geq 0$:

$V_h(t)$ Une famille d'espaces de Hilbert sur C (associée à $H(t)$ et $V(t)$) dépendant du paramètre $h = (h_1, \dots, h_n)$, $h_i > 0$ assez petits, que nous supposons munis de deux produits scalaires : $(\cdot, \cdot)_{V_h(t)}$ et $((\cdot, \cdot))_{V_h(t)}$.

Soient : $\|\cdot\|_{V_h(t)}$, $\|(\cdot, \cdot)\|_{V_h(t)}$ les deux normes associées telles que : $\forall u_h \in V_h(t)$:

$$(III-35) \quad c(h, t) \|u_h\|_{V_h(t)} \leq \|u_h\|_{V_h(t)} \leq C(h, t) \|u_h\|_{V_h(t)}$$

pour h et t fixés, où $C(h, t) \rightarrow +\infty$ quand $|h| \rightarrow 0$ avec t fixé. Cf. [4], [1] pour l'introduction des $V_h(t)$ et l'étude de leurs propriétés.

$O_h(t)$ Une famille d'opérateurs linéaires continus de $L^2(\Omega_t) = H(t)$ dans $V_h(t)$ tels que :

$$\|O_h(t)\|_h = \sup_{u \in H(t)} \frac{\|O_h(t)u\|_{V_h(t)}}{\|u\|_{H(t)}} \leq C_1$$

C_1 : constante positive indépendante de h et $t \in [0, T]$

$a_h(t; u_h, v_h)$ Une famille de formes sesquilinéaires continues sur $V_h(t) \times V_h(t)$ telle que pour tout $u_h, v_h \in V_h(t)$:

$$(III-36) \quad |a_h(t; u_h, v_h)| \leq M \|u_h\|_{V_h(t)} \|v_h\|_{V_h(t)}$$

$$(III-37) \quad |a_h(t; u_h, v_h)| \leq M(h, t) |u_h|_{V_h(t)} \cdot |v_h|_{V_h(t)}$$

$$(III-38) \quad |a_h(t; u_h, v_h)| \leq N(h, t) \|u_h\|_{V_h(t)} \cdot |v_h|_{V_h(t)}$$

$$(III-39) \quad \operatorname{Re} a_h(t; u_h, u_h) \geq \alpha \|u_h\|_{V_h(t)}^2$$

où $M > 0$, $\alpha > 0$ sont indépendants de h et $t \in [0, T]$

$$M(h, t) > 0, N(h, t) > 0$$

avec :

$$M(h, t) = 0 \quad (N(h, t)^2) \quad \text{quand} \quad |h| \rightarrow 0, t \text{ fixé.}$$

$0, k, 2k, \dots, mk = T$. Un partage de l'intervalle $[0, T]$ en sous-intervalles de longueur k et :

$$W_r(t) = \text{fonction caractéristique de } [rk, (r+1)k[.$$

Pour r entier et $p \geq 0, q \leq 0$, posons :

$$V_{h,q}^p(rk) = \bigcap_{t \in [(r+q)k, (r+p)k[} V_h(t)$$

muni de la norme de $V_h(rk)$ par exemple.

Soit ω un ouvert de R_x^n contenant Ω_t pour tout $t \in [0, T]$ et $V_h(\omega)$ l'espace de Hilbert « discrétisé » sur C , qui est associé à $L^2(\Omega_t)$ et $H_0^m(\Omega_t)$.

Nous noterons $(\cdot, \cdot)_h, ((\cdot, \cdot))_h$ les deux produits scalaires dont il est muni et $|\cdot|_h, \|\cdot\|_h$ les normes qui s'en déduisent.

Pour $u_h \in V_h(t)$, soit $\tilde{u}_h$ le « prolongement par 0 » de u_h en dehors de son support. Nous supposons que : si $u_h \in V_h(t)$ alors $\tilde{u}_h \in V_h(\omega)$.

Soit $\Pi_q^p(rk)$, $p \geq 0$, $q \leq 0$, une famille d'opérateurs linéaires (de restriction) de $V_h(\omega)$ dans $V_{h,q}^p(rk)$, pour $r = 0, 1, \dots, m$ tels que :

$$(III-40) \quad \Pi_q^p(rk) \tilde{u}_h = u_h \quad \text{dans} \quad V_h(rk), \quad \forall u_h \in V_{h,q}^p(rk)$$

$$(III-41) \quad \|\Pi_q^p(rk) \tilde{u}_h - u_h\|_{V_h(rk)} \leq \varepsilon_{p,q}(h, k) \cdot \|u_h\|_{V_h(rk)}, \quad \forall u_h \in V_h(rk)$$

$$(III-42) \quad \|\Pi_q^p(rk) \tilde{u}_h - u_h\|_{V_h(rk)} \leq \eta_{p,q}(h, k) \cdot \|u_h\|_{V_h(rk)}, \quad \forall u_h \in V_h(rk)$$

où $\varepsilon_{p,q}(h, k)$, $\eta_{p,q}(h, k)$ tendent vers zéro quand $k \rightarrow 0$ avec $t = rk$ fixé³⁾.

Nous supposerons de plus :

$$(III-43) \quad \|\Pi_q^p(rk) \tilde{u}_h\|_{V_h(t)} \leq \|\Pi_n^m(rk) \tilde{u}_h\|_{V_h(t)}$$

et

$$(III-44) \quad \|\Pi_q^p(rk) \tilde{u}_h\|_{V_h(t)} \leq \|\Pi_n^m(rk) \tilde{u}_h\|_{V_h(t)} \quad \text{si} \quad \begin{cases} 0 \leq m \leq p \\ 0 \geq n \geq q \end{cases}$$

où $u_h \in V_h(t)$ avec $t = rk$.

Posons :

$$\Pi_q^p(t) = \Pi_q^p(rk) \quad \forall t \in [rk, (r+1)k[.$$

Nous appellerons :

$E_q^p(r_1 k, r_2 k; V_h(t))$ = l'espace des fonctions $u_{hk}(t)$ de la forme :

$$u_{hk}(t) = \sum_{r=r_1}^{r_2-1} u_{hk}(rk) \cdot W_r(t), \quad \text{avec} \quad u_{hk}(rk) \in V_{h,q}^p(rk).$$

Pour $u_h \in V_h(t)$, la forme $v_h \rightarrow a_h(t; u_h, v_h)$ est antilinéaire continue sur $V_h(t)$ et définit un opérateur :

$$A_h(t) \in \mathcal{L}(V_h(t), V_h(t))$$

³⁾ Nous supposerons que $\varepsilon_{p,q}(h, k)$, $\eta_{p,q}(h, k)$ sont de la forme $O(h) \cdot O(k)$.

tel que :

$$a_h(t; u_h, v_h) = (A_h(t) u_h, v_h)_{V_h(t)}, \quad \forall u_h, v_h \in V_h(t).$$

Pour $u_{hk} \in E_0^1(0, T+k; V_h(t))$ posons :

$$(III-45) \quad A_{hk}(t) u_{hk}(t) = \frac{1}{k} \sum_{r=0}^{m-1} \int_{rk}^{(r+1)k} A_h(s) u_{hk}(s) ds \cdot W_r(t)$$

et définissons une forme sesquilinéaire continue sur

$$E_0^1(0, T+k; V_h(t)) \times E_0^1(0, T+k; V_h(t))$$

par :

$$(III-46) \quad \begin{aligned} a_{hk}(t; u_{hk}(t), v_{hk}(t)) &= (A_{hk}(t) u_{hk}(t), v_{hk}(t))_{V_h(t)} \\ &= \frac{1}{k} \sum_{r=0}^{m-1} \int_{rk}^{(r+1)k} a_h(s; u_{hk}(s), v_{hk}(s)) ds \cdot W_r(t) \end{aligned}$$

ce qui a bien un sens car $u_{hk}(s), v_{hk}(s) \in V_{h,0}^1(rk)$.

Posons enfin :

$$(III-47) \quad f_{hk}(t) = \frac{1}{k} \sum_{r=0}^{m-1} \int_{rk}^{(r+1)k} O_h(s) \cdot f(s) ds \cdot W_r(t)$$

$$(III-48) \quad V_k \varphi(t) = \frac{\varphi(t+k) - \varphi(t)}{k}; \quad \bar{V}_k \varphi(t) = \frac{\varphi(t) - \varphi(t-k)}{k}.$$

Nous définissons alors le problème approché au sens des différences finies par

PROBLÈME P_{hk} . Déterminer $u_{hk} \in E_{-1}^0(O, T+k; V_h(t))$ telle que :

$$(III-49) \quad \begin{aligned} (II_0^1(t) V_k \tilde{u}_{hk}(t), v_{hk}(t))_{V_h(t)} + a_{hk}(t; II_0^1(t) \tilde{u}_{hk}(t) + \\ + \theta k V_k \tilde{u}_{hk}(t), v_{hk}(t)) = (f_{hk}(t), v_{hk}(t))_{V_h(t)}, \end{aligned}$$

$$\forall t \in [O, T[, \theta \in [0, 1] \text{ donné } \forall v_{hk} \in E_0^1(O, T+k; V_h(t))$$

$$(III-50) \quad u_{hk}(0) = O_h(0) \cdot u_0.$$

Au lieu de considérer pour P_{hk} un schéma purement implicite ou explicite on peut « splitter » l'opérateur $A_{hk}(t)$ comme dans [23] et [26].

Résultat III-8. Pour h et k fixés, le problème P_{hk} admet une solution unique.

DÉMONSTRATION : $u_{hk}(0)$ est déterminé par (III-50).

Supposons connu $u_{hk}(rk)$ dans $V_{h,-1}^0(rk)$. D'après

(III-49) $u_{hk}((r+1)k)$ est solution dans $V_{h,-1}^0((r+1)k) \equiv V_{h,0}^1(rk)$ de :

$$(III-51) \quad \widehat{a}_{hk}(rk; u_{hk}((r+1)k), v_{hk}(rk)) = (d_{hk}(rk), v_{hk}(rk)) \\ \forall v_{hk}(rk) \in V_{h,0}^1(rk)$$

où

$$\widehat{a}_{hk}(rk; u_h, v_h) = (u_h, v_h)_{V_h(t)} + k\theta a_{hk}(rk; u_h, v_h)$$

d_{hk} est connu à partir de $u_{hk}(rk)$ et des données.

Nous avons pour tout $v_h \in V_{h,0}^1(rk)$:

$$\widehat{a}_{hk}(rk; v_h, v_h) \geq \|v_h\|_{V_h(t)}^2 + k\theta\alpha \|v_h\|_{V_h(t)}^2$$

ce qui implique l'existence et unicité de $u_{hk}((r+1)k)$ dans $V_{h,0}^1(rk)$ cf. [7].

Interprétons le problème résolu :

u_{hk} vérifie :

$$(III-52) \quad u_{hk} \in E_{-1}^0(0, T+k; V_h(t)) \\ \frac{u_{hk}(t+k) - \Pi_0^1(t) \widetilde{u}_{hk}(t)}{k} + \theta A_{hk}(t) \cdot u_{hk}(t+k)$$

$$+ (1 - \theta) A_{hk}(t) \cdot (\Pi_0^1(t) \widetilde{u}_{hk}(t)) = f_{hk}(t), \forall t \in [0, T[.$$

et

$$(III-53) \quad u_{hk}(0) = 0_h(0) \cdot u_0 \text{ dans } V_h(0).$$

III-4.2 Majorations a priori et stabilité de la solution de P_{hk} .

Nous allons établir des « inégalités a priori » vérifiées par la solution u_{hk} de P_{hk} ; nous généraliserons ensuite la définition de la stabilité donnée dans [15], dans le cas où le domaine dépend du temps et nous énoncerons le théorème de stabilité vérifié par le schéma définissant u_{hk} .

Majorations a priori.

Dans (III-49) prenons :

$$v_{hk}(t) = g_{hk}(t) = \Pi_0^1(t) [\tilde{u}_{hk}(t) + \theta k \nabla_k \tilde{u}_{hk}(t)]$$

ou :

$$g_{hk}(t) = (1 - \theta) \Pi_0^1(t) \tilde{u}_{hk}(t) + \theta u_{hk}(t + k)$$

car

$$u_{hk}(t + k) \in V_{h,0}^1(t).$$

Il vient pour $t \in [0, T[$

$$(\Pi_0^1(t) \nabla_k \tilde{u}_{hk}(t), g_{hk}(t))_{V_h(t)} + a_{hk}(t; g_{hk}(t), g_{hk}(t)) = (f_{hk}(t), g_{hk}(t))_{V_h(t)}$$

Évaluons le premier terme pour $t \in [rk, (r+1)k[$, $r = 0, \dots, m-1$

$$2 \operatorname{Re} (\Pi_0^1(t) \nabla_k \tilde{u}_{hk}(t), g_{hk}(t))_{V_h(t)} =$$

$$2 \theta k | \Pi_0^1(t) \nabla_k \tilde{u}_{hk}(t) |_{V_h(t)}^2 + 2 \operatorname{Re} (\Pi_0^1(t) \nabla_k \tilde{u}_{hk}(t), \Pi_0^1(t) \tilde{u}_{hk}(t))_{V_h(t)}$$

Mais on voit facilement que pour $t \in [rk, (r+1)k[$:

$$2 \operatorname{Re} (\Pi_0^1(t) \nabla_k \tilde{u}_{hk}(t), \Pi_0^1(t) \tilde{u}_{hk}(t))_{V_h(t)} =$$

$$\frac{1}{k} [| \Pi_0^1(t) \tilde{u}_{hk}((r+1)k) |_{V_h(t)}^2 - | \Pi_0^1(t) \tilde{u}_{hk}(rk) |_{V_h(t)}^2] -$$

$$k | \Pi_0^1(t) \nabla_k \tilde{u}_{hk}(t) |_{V_h(t)}^2.$$

D'où en reportant : $\forall t \in [rk, (r+1)k[$:

$$\begin{aligned}
 \text{(III-54)} \quad & \frac{1}{k} [| \Pi_0^1(t) \widetilde{u}_{hk}(t+k) |_{V_h(t)}^2 - | \Pi_0^1(t) \widetilde{u}_{hk}(t) |_{V_h(t)}^2] \\
 & + (2\theta - 1)k | \Pi_0^1(t) \nabla_k \widetilde{u}_{hk}(t) |_{V_h(t)}^2 + 2 \operatorname{Re} a_{hk}(t; g_{hk}(t), g_{hk}(t)) \\
 & = 2 \operatorname{Re} (f_{hk}(t), g_{hk}(t))_{V_h(t)}.
 \end{aligned}$$

Nous distinguerons deux cas :

$$1er \text{ cas. } \theta \geq \frac{1}{2}.$$

De l'égalité (III-54) il vient en utilisant la coercivité (III-39) de $a_h(t; u_h, v_h)$: $\forall t \in [0, T[$:

$$\begin{aligned}
 \text{(III-55)} \quad & \frac{1}{k} [| \Pi_0^1(t) \widetilde{u}_{hk}(t+k) |_{V_h(t)}^2 - | \Pi_0^1(t) \widetilde{u}_{hk}(t) |_{V_h(t)}^2] \\
 & + 2\alpha \| g_{hk}(t) \|_{V_h(t)}^2 \\
 & \leq k_0 | f_{hk}(t) |_{V_h(t)}^2 + \frac{|1-\theta|}{k_0} | \Pi_0^1(t) \widetilde{u}_{hk}(t) |_{V_h(t)}^2 \\
 & + \frac{\theta}{k_0} | \Pi_0^1(t) \widetilde{u}_{hk}(t+k) |_{V_h(t)}^2
 \end{aligned}$$

où k_0 est une constante positive arbitraire.

LEMME III-1. Pour $0 < r \leq m$:

$$\begin{aligned}
 D &= \int_0^{rk} \frac{1}{k} [| \Pi_0^1(t) \widetilde{u}_{hk}(t+k) |_{V_h(t)}^2 - | \Pi_0^1(t) \widetilde{u}_{hk}(t) |_{V_h(t)}^2] dt \\
 &\geq | u_{hk}(rk) |_{V_{hk}(rk)}^2 - | \Pi_0^1(0) u_{hk}(0) |_{V_h(0)}^2.
 \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION DU LEMME III-1 :

$$D = \sum_{s=1}^{r-1} [| \Pi_0^1((s-1)k) \tilde{u}_{hk}(sk) |_{V_h(sk)}^2 - | \Pi_0^1(sk) \tilde{u}_{hk}(sk) |_{V_h(sk)}^2] \\ + | \Pi_0^1((r-1)k) \tilde{u}_{hk}(rk) |_{V_h(rk)}^2 - | \Pi_0^1(0) \tilde{u}_{hk}(0) |_{V_h(0)}^2 .$$

Mais d'après (III-40) :

$$\Pi_0^1((s-1)k) \tilde{u}_{hk}(sk) = u_{hk}(sk) \text{ car } u_{hk}(sk) \in V_{h,0}^1((s-1)k)$$

et d'après (III-43) :

$$| u_{hk}(sk) |_{V_h(sk)}^2 - | \Pi_0^1(sk) u_{hk}(sk) |_{V_h(sk)}^2 \geq 0.$$

Le lemme suit immédiatement.

Intégrons l'inégalité (III-55) de 0 à rk ($r \leq m$). En utilisant le lemme III-1 et (III-43) il vient :

$$| u_{hk}(rk) |_{V_h(rk)}^2 + 2\alpha \int_0^{rk} \| g_{hk}(t) \|_{V_h(t)}^2 dt \leq | u_{hk}(0) |_{V_h(0)}^2 \\ + k_0 \int_0^{rk} | f_{hk}(t) |_{V_h(t)}^2 dt + \frac{|1-\theta|}{k_0} \int_0^{rk} | u_{hk}(t) |_{V_h(t)}^2 dt \\ + \frac{\theta}{k_0} \int_0^{(r+1)k} | u_{hk}(t) |_{V_h(t)}^2 dt.$$

On en déduit comme dans [15] : pour $k < k_0$

$$| u_{hk}(rk) |_{V_h(rk)}^2 + 2\alpha \int_0^T \| g_{hk}(t) \|_{V_h(t)}^2 dt \\ \leq \left\{ (1 + |1-\theta|) | u_{hk}(0) |_{V_h(0)}^2 + k_0 \int_0^T | f_{hk}(t) |_{V_h(t)}^2 dt \right\} \exp. \frac{(\theta + |1-\theta|) T}{k_0}$$

Des hypothèses faites sur $O_h(t)$ il découle :

$$\begin{aligned} |u_{hk}(0)|_{V_h(0)} &\leq C_1 |u_0|_{L^2(\Omega_0)} \\ \int_0^T |f_{hk}(t)|_{V_h(t)}^2 dt &\leq C_1 \int_0^T |f(t)|_{H(t)}^2 dt. \end{aligned}$$

Doù en posant :

$$K^2 = C_1^2 \left[(1 + |1 - \theta|) |u_0|_{L^2(\Omega_0)}^2 + k_0 \int_0^T |f(t)|_{H(t)}^2 dt \right]$$

$$(III-56) \quad |u_{hk}(t)|_{V_h(t)}^2 \leq K^2 \exp. \frac{(\theta + |1 - \theta|) T}{k_0}$$

$$\begin{aligned} (III-57) \quad \int_0^T \left\| (1 - \theta) \Pi_0^1(t) \tilde{u}_{hk}(t) + \theta u_{hk}(t + k) \right\|_{V_h(t)}^2 dt \\ \leq K^2 \exp. \frac{(\theta + |1 - \theta|) T}{k_0}, \text{ pour } k < k_0 \end{aligned}$$

$$2^{ème} \text{ cas. } \theta < \frac{1}{2}$$

Dans (III-54) le coefficient de $|\Pi_0^1(t) V_k \tilde{u}_{hk}(t)|_{V_h(t)}^2$ est alors négatif. Pour majorer ce terme on prendra :

$$v_{hk} = \Pi_0^1(t) V_k \tilde{u}_{hk}(t) \in E_0^1(O, T + k; V_h(t)) \text{ dans (III-49).}$$

En poursuivant le raisonnement comme dans [15], avec des modifications analogues au premier cas, on montre que :

$$\text{pour } k N(h)^2 \leq \frac{2\alpha}{1 - 2\theta} (1 - \delta), 0 < \delta < 1 \text{ arbitraire}$$

où

$$N(h) = \max_{t \in [0, T]} N(h, t), \text{ on a, pour } k < k_0 :$$

$$(III-58) \quad \|u_{hk}(t)\|_{V_h(t)}^2 \leq 2\alpha \delta^2 K_1^2 \exp. \frac{T}{k_0}$$

$$(III-59) \quad \int_0^T \|(1 - \theta) I_0^1(t) \tilde{u}_{hk}(t) + \theta u_{hk}(t + k)\|_{V_h(t)}^2 dt \leq K_1^2 \exp. \frac{T}{k_0}$$

avec :

$$K_1^2 = \frac{C_1^2}{2\alpha \delta^2} \left[(2 - \theta) \|u_0\|_{L^2(\Omega_0)}^2 + \left(2 + \frac{1}{\delta}\right) k_0 \int_0^T \|f(t)\|_{H(t)}^2 dt \right].$$

On prendra par exemple $k_0 = T$.

Définition de la stabilité :

Soient $X(t)$ une famille d'espaces de Banach dépendant du paramètre t ($t \geq 0$) et $p_h(t)$ une famille d'applications linéaires continues de $V_h(t)$ dans $X(t)$ pour tout $t \geq 0$.

Définition III-1 :

La solution u_{hk} du problème P_{hk} est dite $L^\infty(0, T; X(t))$ stable pour le prolongement p_h si :

$$(III-60) \quad t \rightarrow \|p_h(t) u_{hk}(t)\|_{X(t)}$$

est mesurable sur $[0, T]$ quels que soient h et k .

$$(III-61) \quad \|p_h(t) u_{hk}(t)\|_{X(t)} \leq C, \quad \forall t \in [0, T[;$$

C indépendant de h et k .

On aurait une définition similaire pour $L^p(0, T; X(t))$, p fini.
Soit maintenant pour $t \in [0, T[:$

$F(t)$ une famille d'espaces de Hilbert tels que $H(t)$ soit un sous-espace vectoriel fermé de $F(t)$

$II r(t)$ l'opérateur de projection de $F(t)$ sur $H(t)$

$p_h(t) \in \mathcal{L}(V_h(t), F(t))$ tels que :

$$(III-62) \quad t \rightarrow \|p_h(t) u_h(t)\|_{F(t)} \text{ soit mesurable sur } [0, T] \\ \forall u_h(t) \in V_h(t), t \in [0, T]$$

$$(III-63) \quad \|p_h(t)\| = \sup_{u_h \in V_h(t)} \frac{\|p_h(t) u_h\|_{F(t)}}{\|u_h\|_{V_h(t)}} \leq C_2$$

C_2 : constante positive indépendante de h et $t \in [0, T]$.

Posons $q_h(t) = II r \circ p_h(t)$ alors $q_h(t) \in \mathcal{L}(V_h(t), H(t))$ et nous supposons que :

$$(III-64) \quad |q_h| = \sup_{u_h \in V_h(t)} \frac{|q_h(t) u_h|_{H(t)}}{|u_h|_{V_h(t)}} \leq C_3$$

C_3 : constante positive indépendante de h et $t \in [0, T]$.

Des majorations a priori (III-56), (III-57), (III-58), (III-59) et des hypothèses (III-62), (III-64), on déduit le :

THÉORÈME III-8 (*de stabilité pour le prolongement q_h*).

1) Pour $\theta \geq \frac{1}{2}$, la solution u_{hk} du problème P_{hk} est $L^\infty(O, T; L^2(\Omega_t))$ stable quels que soient h et k .

2) Pour $\theta < \frac{1}{2}$, une condition suffisante pour que u_{hk} soit $L^\infty(O, T; L^2(\Omega_t))$ stable est que :

$$(III-65) \quad k \nu(h)^2 \leq \frac{2\alpha}{1-2\theta} (1-\delta), \delta > 0$$

arbitrairement petit où $\nu(h)$ est la partie principale de $N(h)$ quand $|h| \rightarrow 0$.

III-4.3 Convergence de u_{hk} vers une solution du problème initial.

Nous nous plaçons sous les hypothèses du *Théorème III-8* en prenant $\theta = 0$ (schéma explicite).

Nous savons alors que :

quand h et $k \rightarrow 0$, on peut extraire une sous-suite notée encore (h, k) telle que :

$$(III-66) \quad [p_h(t) \Pi_0^1(t) \tilde{u}_{hk}(t)]_0^T \rightharpoonup U \text{ dans } L^2(0, T; F(t)) \text{ faible.}$$

$$(III-67) \quad [q_h(t) u_{hk}(t)]_0^T \rightarrow u = \Pi r U \text{ dans } L^\infty(0, T; H(t)) \text{ faible où} \\ [\varphi]_0^T \text{ désigne la restriction de } \varphi(t) \text{ à } [0, T].$$

Soient :

$\mathcal{V}$ = l'espace des fonctions de $\mathcal{D}(\bar{Q}_T)$ nulles au voisinage de Γ'_T (frontière latérale de (Q_T)) et de Ω_T .

D'après [11] on sait que $\mathcal{V}$ est dense dans $B_T(Q_T)$, où, rappelons le : $B_T(Q_T)$ = adhérence des fonctions $v \in F(Q_T)$, $v' \in F'(Q_T)$ nulles au voisinage de Ω_T .

$r_h(t)$ une famille d'applications linéaires continues de $\mathcal{D}(\Omega_t)$ dans $V_{h,-1}^0(t)$. Pour $v(x, t) \in \mathcal{V}$, nous posons :

$$(III-68) \quad \Psi_{hk}(t) = \sum_{r=0}^{m-1} r_h(rk) v(x, rk) \cdot W_{r-1}(t).$$

Par définition de $r_h(t)$ et de $\mathcal{V}$ on déduit :

$$\Psi_{hk}(t) \in E_0^1(0, T + k; V_h(t)) \text{ et } \Psi_{hk}(T) = 0$$

$$\bar{\omega}(t) \in \mathcal{L}(V(t), F(t)) \text{ où } V(t) = H_0^m(\Omega_t).$$

Nous faisons les *hypothèses* suivantes analogues à celles de [15] pour un domaine cylindrique.

Pour tout sous-suite (u_{hk}) solution de (P_{hk}) vérifiant (III-66), (III-67) :

$$(III-69) \quad u \in L^2(0, T; V(t)) \text{ et } U = \bar{\omega} u$$

$$(III-70) \quad \int_0^T a_{hk}(t; \Pi_0^1(t) \tilde{u}_{hk}(t), \Psi_{hk}(t)) dt \rightarrow \int_0^T a(t; u(t), v(t)) dt$$

pour tout $v \in \mathcal{V}$, quand $|h|$ et $k \rightarrow 0$.

$$(III-71) \quad \int_0^T (u_{hk}(t), \bar{V}_k \Psi_{hk}(t))_{V_h(t)} dt \rightarrow \int_0^T (u(t), v'(t))_{H(t)} dt.$$

$$(III-72) \quad \int_0^T (O_h(t)f(t), \Psi_{hk}(t))_{V_h(t)} dt \rightarrow \int_0^T (f(t), v(t))_{H(t)} dt.$$

quand $|h|$ et $k \rightarrow 0$, $\forall v \in \mathcal{V}$.

$$(III-73) \quad (O_h(0)u_0, \Psi_{hk}(-k))_{V_h(0)} \rightarrow (u_0, v(0))_{H(0)}, \text{ quand } |h|, k \rightarrow 0 \\ \forall v \in \mathcal{V}$$

Démontrons le :

THÉORÈME III-9. de convergence faible : quand $|h|, k \rightarrow 0$, sous les hypothèses (III-69), ..., (III-73) :

$$(III-74) \quad [p_h(t) \Pi_0^1(t) \tilde{u}_{hk}(t)]_0^T \rightharpoonup \bar{\omega} u \text{ dans } L^2(0, T; F(t)) \text{ faible}$$

$$(III-75) \quad [q_h(t) u_{hk}(t)]_0^T \rightarrow u \text{ dans } L^\infty(0, T; H(t)) \text{ faible.}$$

où u est une solution du problème initial V_1 .

DÉMONSTRATION : Prenons $v_{hk} = \Psi_{hk}(t) \in E_0^1(0, T+k; V_h(t))$ dans (III-49) pour v quelconque dans $\mathcal{V}$. Il vient :

$$\begin{aligned} \int_0^T (\Pi_0^1(t) V_k \tilde{u}_{hk}(t), \Psi_{hk}(t))_{V_h(t)} dt + \int_0^T a_{hk}(t; \Pi_0^1(t) \tilde{u}_{hk}(t), \Psi_{hk}(t)) dt \\ = \int_0^T (f_{hk}(t), \Psi_{hk}(t))_{V_h(t)} dt. \end{aligned}$$

Mais :

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T (\Pi_0^1(t) \nabla_k \tilde{u}_{hk}(t), \Psi_{hk}(t))_{V_h(t)} dt = \\
 & \frac{1}{k} \left[\int_0^T (u_{hk}(t), \Psi_{hk}(t-k))_{V_h(t)} dt - \int_0^T (\Pi_0^1(t) \tilde{u}_{hk}(t), \Psi_{hk}(t))_{V_h(t)} dt \right] \\
 & - (u_{hk}(0), \Psi_{hk}(-k))_{V_h(0)} \\
 & = - \int_0^T (u_{hk}(t), \bar{\nabla}_k \Psi_{hk}(t))_{V_h(t)} dt - (u_{hk}(0), \psi_{hk}(-k))_{V_h(0)} \\
 & + \frac{1}{k} \int_0^T (u_{hk}(t) - \Pi_0^1(t) \tilde{u}_{hk}(t), \Psi_{hk}(t))_{V_h(t)} dt.
 \end{aligned}$$

Quand $|h|$ et k tendent vers 0, des hypothèses (III-71), (III-73), (III-41) et du théorème de stabilité il suit :

$$\begin{aligned}
 \int_0^T (\Pi_0^1(t) \nabla_k \tilde{u}_{hk}(t), \Psi_{hk}(t))_{V_h(t)} dt & \rightarrow - \int_0^T (u(t), v'(t))_{H(t)} dt + (u_0, v(0)) \\
 \int_0^T (f_{hk}(t), \Psi_{hk}(t))_{V_h(t)} dt & = \int_0^T (O_h(t) f(t), \Psi_{hk}(t))_{V_h(t)} dt
 \end{aligned}$$

d'après (III-47).

Et à la limite pour $|h| \rightarrow 0$, $k \rightarrow 0$, il vient d'après (III-70) et (III-72) :

$$\begin{aligned}
 \text{(III-76)} \quad \int_0^T [- (u(t), v'(t))_{H(t)} + a(t; u(t), v(t))] dt & = \int_0^T (f(t), v(t)) dt \\
 & + (u_0, v(0))_{L^2(\Omega_0)}, \quad \forall v \in \mathcal{V}
 \end{aligned}$$

Mais de la densité de $\mathcal{V}$ dans $B_T(Q_T)$ on déduit de (III-76) :

$$\begin{aligned} & \int_0^T [-\langle u(t), D_t v \rangle + a(t; u(t), v(t))] dt \\ &= \int_0^T \langle f(t), v(t) \rangle dt + (v(\cdot, 0), u_0)_{L^2(\Omega_0)}; \quad \forall v \in B_T(Q_T) \end{aligned}$$

où : $u \in L^2(0, T; H_0^m(\Omega_t)) \equiv F(Q_T)$.

u est alors solution du problème initial V_1 et d'après l'unicité de cette solution la suite toute entière (h, k) vérifie (III-74) et (III-75).

III-4.4. Exemple de construction du problème approché P_{hk} .

Nous considérons le problème V_1 pour un opérateur $A(t)$ d'ordre deux. Nous avons alors :

$$H(t) = L^2(\Omega_t); \quad V(t) = H_0^1(\Omega_t); \quad V'(t) = H^{-1}(\Omega_t)$$

et

$$(III-77) \quad a(t; u, v) = \int_{\Omega_t} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_j u D_i \bar{v} + \sum_{i=1}^n a_i D_i u \cdot \bar{v} + a_0 u \bar{v} \right) dx.$$

Choix des espaces $V_h(t)$. cf. [4].

On se donne un maillage de pas h_i dans la direction Ox_i ($i = 1, \dots, n$) et on définit pour $M = (e_1 h_1, \dots, e_n h_n)$, $e_i \in Z$, appartenant au réseau $\mathcal{R}_h$ ainsi construit :

— $\sigma_h(M, 0)$: le pavé de centre M et côtés parallèles aux axes de longueurs $h_1, \dots, h_n$.

$$— \sigma_h(M, 1) = \bigcup_{i=1, n} \sigma_h \left(M \pm \frac{h_i}{2}, 0 \right)$$

$$— \Omega(h, t) = \{M \in \mathcal{R}_h \mid \sigma_h(M, 1) \subset \Omega_t\}, t \in [0, T].$$

$$— \Omega_h(t) = \bigcup_{M \in \Omega(h, t)} \sigma_h(M, 0); \text{ alors } \Omega_h(t) \subset \Omega_t, \quad \forall t \in [0, T]$$

$$— \delta_i u_h(x) = \left(u_h \left(x + \frac{h_i}{2} \right) - u_h \left(x - \frac{h_i}{2} \right) \right) / h_i, i = 1, \dots, n$$

pour $u_h(x)$ définie presque partout dans un domaine de R^n .

— W_M = fonction caractéristique de $\sigma_h(M, O)$.

Alors :

$V_h(t)$ = l'espace des fonctions étagées telles que :

$$u_h(x) = \sum_{M \in \Omega(h, t)} u_h(M) W_M \text{ avec } u_h(M) \in C.$$

On voit facilement que pour $x \in \Omega_h(t)$, $\delta_i u_h(x)$ est à support dans Ω_t .

Nous munissons $V_h(t)$ de deux produits scalaires :

$$(u_h, v_h)_{V_h(t)} = \int_{\Omega_h(t)} u_h \bar{v}_h dx.$$

$$((u_h, v_h))_{V_h(t)} = \int_{\Omega_t} \left[u_h \bar{v}_h + \sum_{i=1}^n \delta_i u_h(x) \cdot \overline{\delta_i v_h(x)} \right] dx.$$

Choix de $O_h(t) : [4], [1] : \text{ pour } u \in L^2(\Omega_t) :$

$$O_h(t) u = \frac{1}{h_1 \dots h_n} \sum_{M \in \Omega(h, t)} \left(\int_{\sigma_h(M, O)} u(x) dx \right) W_M$$

alors :

$$|O_h(t)|_h = 1.$$

Choix de $a_h(t; u_h, v_h) : \text{ pour } u_h, v_h \in V_h(t) :$

$$a_h(t; u_h, v_h) = \sum_{i, j=1}^n \int_{\Omega_t} a_{ij}(x, t) \delta_j u_h(x) \delta_i \bar{v}_h(x) dx +$$

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega_t} a_i(x, t) \delta_i u_h(x) \bar{v}_h(x) dx + \int_{\Omega_t} a_0(x, t) u_h(x) \bar{v}_h(x) dx.$$

Comme dans [15] on montre que $\forall t \in [0, T] :$

$$N(h) \leq \left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \frac{2}{h_i} \|a_{ij}\|_{L^\infty(Q_T)} + \|a_j\|_{L^\infty(Q_T)} \right)^2 + \|a_0\|_{L^\infty(Q_T)}^2 \right)^{1/2}$$

de partie principale quand $|h| \rightarrow 0$:

$$\nu(h) = 2 \left[\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} \|a_{ij}\|_{L^\infty(Q_T)} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Les autres hypothèses sur $a_h(t; u_h, v_h)$ découlent de celles faites sur a_{ij} , a_i , a_0 .

Expression des $V_{h,q}^p(rk)$: $p \geq 0$, $q \leq 0$:

Posons :

et $\Omega_q^p(h, t) = \{M \in \mathcal{R}_h \mid \sigma_h(M, 1) \subset \Omega_t, \forall t \in [(r+q)k, (r+p)k]\}$

$$\Omega_{q,h}^p(t) = \bigcup_{M \in \Omega_q^p(h, t)} \sigma_h(M, 0).$$

On déduit de la définition de $V_{h,q}^p(rk)$ que :

$$V_{h,q}^p(rk) \equiv \{u_h \mid u_h(x) = \sum_{M \in \Omega_q^p(h, rk)} u_h(M) W_M, u_h(M) \in C\}.$$

Construction de $V_h(\omega)$:

Soit $\omega \supset \Omega_t$, $\forall t \in [0, T]$, nous définissons :

et $\Omega(h, \omega) = \{M \in \mathcal{R}_h \mid \sigma_h(M, 1) \subset \omega\}$

$$V_h(\omega) = \{u_h(x) \mid u_h(x) = \sum_{M \in \Omega(h, \omega)} u_h(M) W_M, u_h(M) \in C\}$$

que nous munissons de deux produits scalaires analogues à ceux sur $V_h(t)$, en intégrant cette fois sur ω .

Il est clair que :

$$V_h(t) \subset V_h(\omega), \forall t \in [0, T]$$

Construction des $\Pi_q^p(rk)$:

Pour $p \geq 0$, $q \leq 0$, on a :

$$V_{h,q}^p(rk) \subset V_h(\omega).$$

Soit :

$$u_h = \sum_{M \in \Omega(h, \omega)} u_h(M) W_M \in V_h(\omega).$$

Nous posons :

$$H_q^p(rk) u_h = \sum_{M \in \Omega_q^p(h, t)} u_h(M) W_M \in V_{h,q}^p(rk); \quad t = rk.$$

Les propriétés (III-40), (III-43), (III-44) découlent du choix précédent et des normes sur $V_h(rk)$.

(III-41) et (III-42) sont vraies avec :

$$\varepsilon_{p,q}(h, k) = \text{mes}(\Omega_h(rk) - \Omega_{h,q}^p(rk))$$

$$\eta_{p,q}(h, k) = \varepsilon_{p,q}(h, k).$$

Le problème P_{hk} admet alors une solution unique.

Stabilité du problème P_{hk} .

Nous prenons :

$$F(t) = (L^2(\Omega_t))^{n+1}$$

Pour $U = (u, u_1, \dots, u_n) \in F(t) : H^r(t) U = u \in L^2(\Omega_t)$

$$p_h(t) u_h = (u_h, \delta_1 u_h, \dots, \delta_n u_h) \in F(t), \quad \forall u_h \in V_h(t).$$

Nous munissons $F(t)$ de la norme :

$$\|U\|_{F(t)}^2 = \int_{\Omega_t} \left[|u|^2 + \sum_{i=1}^n |u_i|^2_{L^2(\Omega_t)} \right] dx.$$

L'hypothèse (III-62) sera vérifiée si nous supposons que : $t \rightarrow \text{mes } \Omega_t$ est une fonction mesurable sur $[0, T]$ ce qui découle des hypothèses faites sur Q .

$$q_h(t) u_h = u_h \quad \text{pour } u_h \in V_h(t).$$

Alors dans (III-63), (III-64), nous avons :

$$\|p_h(t)\| = 1, \quad |q_h(t)| = 1, \quad \forall t \in [0, T]$$

On est en mesure d'appliquer le théorème de stabilité III-8 :
si $\theta \geq \frac{1}{2}$: la solution u_{hk} de P_h est $L^\infty(0, T; L^2(\Omega_t))$ -stable quels
que soient h et k .

si $\theta < \frac{1}{2}$: une condition suffisante de stabilité est que :

$$(III-78) \quad k \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} \|a_{ij}\|_{L^\infty(Q_T)} \right)^2 \leq \frac{\alpha}{2} \frac{1}{1-2\theta} (1-\delta')$$

pour $|h|$ assez petit ; $\delta' > 0$ arbitraire.

Convergence faible de u_{hk} vers une solution du problème initial.

Choix de $r_h(t)$:

Soit $v \in \mathcal{D}(\Omega_t)$, nous posons :

$$r_h(t)v = \sum_{M \in \Omega_{-1}^0(h,t)} u_h(M) W_M \in V_{h,-1}^0(t) \quad \text{par définition,}$$

alors :

$$r_h(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(\Omega_t), V_{h,-1}^0(t)).$$

Choix de $\bar{\omega}(t) \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega_t), F(t))$

$\forall u \in H_0^1(\Omega_t)$, posons :

$$\bar{\omega}(t)u = (u, D_1 u, \dots, D_n u) \in (L^2(\Omega_t))^{n+1} = F(t).$$

Vérifions maintenant les hypothèses du théorème III-9 de convergence faible.

Posons :

$$U = (u, u_1, \dots, u_n).$$

Hypothèse (III-69) : Pour h et k assez petits et $t \in [0, T[$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} \delta_i (\Pi_0^1(t) \tilde{u}_{hk}(t)) \bar{v} \, dx &= \int_{\Omega_t} \delta_i u_{hk}(t) \bar{v} \, dx \\ &= - \int_{\Omega_t} u_{hk}(t) \overline{\delta_i v} \, dx, \quad \forall v \in \mathcal{D}(Q_T). \end{aligned}$$

D'où :

$$\int_0^T \left(\int_{\Omega_t} \delta_i (\Pi_0^1(t) \tilde{u}_{hk}(t)) \bar{v}(x, t) \, dx \right) dt = - \int_0^T \left(\int_{\Omega_t} u_{hk}(t) \overline{\delta_i v}(x, t) \, dx \right) dt.$$

De (III-66) on déduit que l'intégrale du premier membre converge vers :

$$\int_0^T \int_{\Omega_t} u_i \bar{v} \, dx \, dt \text{ quand } |h| \text{ et } k \rightarrow 0;$$

et comme $\delta_i v(x, t) \rightarrow D_i v = \frac{\partial v}{\partial x_i}$ dans $L^2(0, T; L^2(\Omega_t))$ fort quand $|h| \rightarrow 0$, l'intégrale du second membre tend vers :

$$- \int_0^T \int_{\Omega_t} u \overline{D_i v} \, dx \, dt$$

soit à la limite :

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} u_i(x, t) \cdot \bar{v}(x, t) \, dx \, dt &= - \int_{Q_T} u(x, t) D_i \bar{v}(x, t) \, dx \, dt \\ &= \int_{Q_T} D_i u(x, t) \bar{v}(x, t) \, dx \, dt \end{aligned}$$

d'où :

$$u_i = D_i u \text{ dans } L^2(Q_T)$$

et

$$u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega_t)) \text{ avec } U = \bar{\omega} u.$$

Hypothèse (III-70).

D'après le choix de $r_h(t)$ il est clair que, pour $v \in \mathcal{D}(\bar{Q}_T)$

$$p_h(t) \psi_{hk}(t) = \sum_{r=0}^{m-1} p_h(t) r_h(rk) v(x, rk) W_{r-1}(t) \rightarrow v(x, t)$$

dans $L^2(0, T; F(t))$ fort, quand $|h|$ et k tendent vers zéro.

D'autre part :

$p_h(t) \Pi_0^1(t) \tilde{u}_{hk}(t) \rightarrow U = \bar{\omega} u$ dans $L^2(0, T; F(t))$ faible.

L'hypothèse (III-70) suit immédiatement de la définition de $a_h(t; u_h, v_h)$.

Hypothèse (III-71).

Démonstration analogue en remarquant que :

$$\bar{V}_k \psi_{hk}(t) \rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} \text{ dans } L^2(Q_T) \text{ fort.}$$

Hypothèses (III-72), (III-73) : même démonstration que dans [15].

On a alors le :

Résultat III-9. Quand $|h|$ et k tendent vers zéro :

si $\theta \geq \frac{1}{2}$, $q_h(t) u_{hk}(t) \rightarrow u$ dans $L^\infty(0, T; L^2(\Omega_t))$ faible

si $\theta < \frac{1}{2}$, $q_h(t) u_{hk}(t) \rightarrow u$ dans $L^\infty(0, T; L^2(\Omega_t))$ faible si h et k vérifient l'inégalité (III-78)

où u est la solution du problème initial V_1 .

III-5. Régularisation elliptique :

Lors de la résolution numérique du problème P_{hk} par la méthode variationnelle des différences finies décrite au § III-4, on constate un phénomène de propagation des erreurs au voisinage de la frontière latérale I' du domaine de résolution Q au fur et à mesure

que le temps t augmente dans un intervalle $[0, T_1]$, et une erreur sensiblement uniforme pour $t > T_1$; la limite de temps T_1 dépendant du problème considéré.

Afin d'obtenir une approximation uniforme de la solution au voisinage de I' pour tout $t > 0$, on va remplacer le problème initial V (équation III-20) de type parabolique par un problème de type elliptique résolu dans un domaine $Q_T = Q \cap \{0 < t < T\}$ pour T fixé positif, dont la solution approchera la solution u du problème V en un certain sens.

Nous donnerons ainsi deux procédés de régularisation elliptique avec leurs démonstrations de convergence. Nous conservons les hypothèses et notations des paragraphes précédents avec en plus :

$$(III-79) \quad u_0(x) \equiv 0 \text{ dans } \Omega_0.$$

On peut toujours s'y ramener en construisant une fonction w de $\mathcal{B}(Q_T)$ telle que $w(\cdot, 0) = u_0$ dans $L^2(\Omega_0)$ et en posant $v = u - w$.

III-5-1 Premier procédé de régularisation elliptique :

Fixons nous une limite de temps T et considérons pour $\varepsilon > 0$ le :

Problème P_ε (formel) : Déterminer u_ε « assez régulière » telle que :

$$-\varepsilon \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2} + \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + A(t) u_\varepsilon = f \text{ dans } Q_T = Q \cap \{0 < t < T\}$$

$$\begin{aligned} \gamma_j u_\varepsilon(x, t) &= 0 \text{ sur } I_T' \text{ frontière latérale de } Q_T, j = 0, \dots, m-1 \\ u_\varepsilon(\cdot, T) &= 0 \text{ sur } \Omega_T \end{aligned}$$

$$u_\varepsilon(\cdot, 0) - \varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(\cdot, 0) = 0 \text{ sur } \Omega_0.$$

On vérifie facilement l'équivalence formelle du problème P_ε avec le problème variationnel suivant :

Problème Q_ε : Déterminer $u_\varepsilon \in W$ telle que :

$$(III-80) \quad b_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = \varepsilon (u_\varepsilon', v') - (u_\varepsilon, v') + a_T(u_\varepsilon, v) = (f, v)$$

pour tout $v \in W$ où :

$$W = \{w \mid w \in H_0^{m,0}(Q_T), w' \in L^2(Q_T), w(\cdot, T) = 0 \text{ sur } \Omega_T\}$$

W est un espace de Hilbert muni de la norme :

$$||| u |||_W^2 = \|u\|_{H^{m,0}(Q_T)}^2 + \|u'\|_{L^2(Q_T)}^2.$$

Notation : $(\cdot, \cdot)$ désigne ici le produit scalaire dans $L^2(\Omega_T)$.

Le problème Q_ε est un problème elliptique et nous avons le :

Résultat III-10. Sous les hypothèses H_1, H_2', H_3, H_4 et H_5 , le problème Q_ε admet une solution unique pour tout ε positif fixé.

DÉMONSTRATION : Vérifions la coercivité de la forme $b_\varepsilon(u, v)$. Pour tout $v \in W$, on a :

$$2 \operatorname{Re} b_\varepsilon(v, v) = 2\varepsilon \|v'\|_{L^2(Q_T)}^2 + \|v(0)\|_{L^2(\Omega_0)}^2 + 2 \operatorname{Re} a_T(v, v)$$

soit :

$$2 \operatorname{Re} b_\varepsilon(v, v) \geq 2\varepsilon \|v'\|_{L^2(Q_T)}^2 + \|v(0)\|_{L^2(\Omega_0)}^2 + 2\alpha \|v\|_{H^{m,0}(Q_T)}^2$$

$$2 \operatorname{Re} b_\varepsilon(v, v) \geq 2 \inf(\varepsilon, \alpha) ||| v |||_W^2.$$

L'approximation est justifiée par le :

THÉORÈME III-10. Quand $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$(III-81) \quad u_\varepsilon \rightharpoonup u \text{ dans } H_0^{m,0}(Q_T) \text{ faible}$$

$$(III-82) \quad \sqrt{\varepsilon} u'_\varepsilon \rightharpoonup w \text{ dans } L^2(Q_T) \text{ faible avec } w \in L^2(Q_T)$$

$$(III-83) \quad u_\varepsilon(0) \rightharpoonup 0 \text{ dans } L^2(\Omega_0) \text{ faible}$$

où u est la solution du problème initial V .

DÉMONSTRATION : De la coercivité de $b_\varepsilon(v, v)$ il vient pour $v = u_\varepsilon \in W$:

$$2 \|\sqrt{\varepsilon} u'_\varepsilon\|_{L^2(Q_T)}^2 + \|u_\varepsilon(0)\|_{L^2(\Omega_0)}^2 + 2\alpha \|u_\varepsilon\|_{H^{m,0}(Q_T)}^2 \leq \operatorname{Re} b_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon)$$

et d'après (III-80) :

$$2 \operatorname{Re} b_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) = 2 \operatorname{Re}(f, u_\varepsilon) \leq 2 \|f\|_{L^2(Q_T)} \|u_\varepsilon\|_{L^2(Q_T)}.$$

Il s'ensuit que :

- (1) u_ε reste dans un borné de $H_0^{m,0}(Q_T)$
- (2) $\sqrt{\varepsilon} u'_\varepsilon$ reste dans un borné de $L^2(Q_T)$
- (3) $u_\varepsilon(\cdot, 0)$ reste dans un borné de $L^2(\Omega_0)$.

De (1), (2), (3) on déduit que de toute suite ε tendant vers 0 on peut extraire une sous-suite $\eta \rightarrow 0$ telle que :

- (4) $u_\eta \rightharpoonup u$ dans $H_0^{m,0}(Q_T)$ faible avec $u \in H_0^{m,0}(Q_T)$
- (5) $\sqrt{\eta} u'_\eta \rightharpoonup w$ dans $L^2(Q_T)$ faible avec $w \in L^2(Q_T)$
- (6) $u_\eta(\cdot, 0) \rightharpoonup \theta$ dans $L^2(\Omega_0)$ faible avec $\theta \in L^2(\Omega_0)$.

Prenons maintenant $\varepsilon = \eta$ dans (III-80); nous avons :

$$\sqrt{\eta}(\sqrt{\eta} u'_\eta, v') - (u_\eta, v') + a_T(u_\eta, v) = (f, v), \quad \forall v \in W$$

et quand $\eta \rightarrow 0$ il vient d'après (4), (5) et (6) :

$$-(u, v') + a_T(u, v) = (f, v), \quad \forall v \in W$$

mais : $W = \{w \mid w \in H_0^{m,0}(Q_T), w' \in L^2(Q_T), w(\cdot, T) = 0\}$ est dense dans $B_T(Q_T)$ où, rappelons le :

$$B_T(Q_T) = \{w \mid w \in H_0^{m,0}(Q_T), w' \in F'(Q_T), w(\cdot, T) = 0\}.$$

On en déduit que (7) est vraie pour tout $v \in B_T(Q_T)$, c'est à dire que u est solution du problème initial V avec $u(\cdot, 0) \equiv 0$.

La limite dans (4) étant indépendante de la sous-suite $\eta \rightarrow 0$ la suite entière u_ε vérifie (4), (5) et (6) quand $\varepsilon \rightarrow 0$. D'où le théorème.

III-5-2 Deuxième procédé de régularisation elliptique :

Le problème approché formel s'écrit pour T fixé :

Problème P_ε^1 : Déterminer u_ε « assez régulière » telle que :

$$-\varepsilon \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2} + \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + A(t) u_\varepsilon = f \text{ dans } Q_T$$

$$\gamma_j u_\varepsilon(x, t) = 0 \text{ sur } \Gamma_T' \text{ frontière latérale de } Q_T, j = 0, \dots, m-1$$

$$u_\varepsilon(x, 0) = 0 \text{ sur } \Omega_0$$

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(x, T) = 0 \text{ sur } \Omega_T.$$

Le problème P_ε^1 est équivalent formellement au problème variationnel suivant :

Problème Q_ε^1 : Déterminer $u_\varepsilon \in W$ telle que :

$$(III-84) \quad b_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = \varepsilon(u'_\varepsilon, v') + (u'_\varepsilon, v) + a_T(u_\varepsilon, v) = (f, v)$$

pour tout $v \in W$ où :

$$W = \{v \mid v \in H_0^{m,0}(Q_T), v' \in L^2(Q_T), v(\cdot, 0) = 0 \text{ dans } \Omega_0\}$$

W est un espace de Hilbert muni de la même norme qu'au § III-5-1.

Résultat III-11. Le problème approché Q_ε^1 admet une solution unique pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, sous les hypothèses H_1, H_2', H_3, H_4 et H_5 .

DÉMONSTRATION :

Q_ε^1 est un problème elliptique. Vérifions la coercivité de la forme $b_\varepsilon(u, v)$; pour tout $v \in W$ on a :

$$2 \operatorname{Re} b_\varepsilon(v, v) = 2 \varepsilon \|v'\|_{L^2(Q_T)}^2 + \|v(T)\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + 2 \operatorname{Re} a_T(v, v)$$

d'où

$$2 \operatorname{Re} b_\varepsilon(v, v) \geq 2 \varepsilon \|v'\|_{L^2(Q_T)}^2 + \|v(T)\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + 2\alpha \|v\|_{H^{m,0}(Q_T)}^2$$

$$2 \operatorname{Re} b_\varepsilon(v, v) \geq \inf(2\varepsilon, 2\alpha) \|v\|_W^2.$$

Montrons maintenant le :

THÉORÈME III-11 : quand $\varepsilon \rightarrow 0$

$$(III-85) \quad u_\varepsilon \rightharpoonup u \text{ dans } H_0^{m,0}(Q_T) \text{ faible.}$$

$$(III-86) \quad \sqrt{\varepsilon} u'_\varepsilon \rightharpoonup w \text{ dans } L^2(Q_T) \text{ faible avec } w \in L^2(Q_T)$$

où u est la solution du problème initial V .

DÉMONSTRATION :

Point 1. De la coercivité de la forme $b_\varepsilon(v, v)$ il vient pour $v = u_\varepsilon \in W$:

$$2 \|\sqrt{\varepsilon} u'_\varepsilon\|_{L^2(Q_T)}^2 + \|u_\varepsilon(T)\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + 2\alpha \|u_\varepsilon\|_{H^{m,0}(Q_T)}^2 \leq 2 \operatorname{Re} b_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon).$$

Mais d'après (III-84) :

$$2 \operatorname{Re} b_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) = 2 \operatorname{Re} (f, u_\varepsilon) \leq 2 \|f\|_{L^2(Q_T)} \|u_\varepsilon\|_{L^2(Q_T)}.$$

On en déduit que $u_\varepsilon, \sqrt{\varepsilon} u'_\varepsilon, u_\varepsilon(\cdot, T)$ restent dans un borné de $H_0^{m,0}(Q_T)$, $L^2(Q_T)$ et $L^2(\Omega_T)$ respectivement, quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Par conséquent de

toute suite $\varepsilon \rightarrow 0$, on peut extraire une sous-suite $\eta \rightarrow 0$ telle que :

$$(1) \quad u_\eta \rightharpoonup u \text{ dans } H_0^{m,0}(Q_T) \text{ faible avec } u \in H_0^{m,0}(Q_T)$$

$$(2) \quad \sqrt{\eta} u_\eta \rightharpoonup w \text{ dans } L^2(Q_T) \text{ faible avec } w \in L^2(Q_T)$$

$$(3) \quad u_\eta(T) \rightharpoonup \theta \text{ dans } L^2(\Omega_T) \text{ faible avec } \theta \in L^2(\Omega_T).$$

Point 2. u est solution du problème initial V

u_η vérifie (III-84) :

$$\sqrt{\eta} (\sqrt{\eta} u'_\eta, v') + (u'_\eta, v) + a_T(u_\eta, v) = (f, v), \quad \forall v \in W.$$

Mais pour $u_\eta, v \in W$:

$$(u'_\eta, v) + (u_\eta, v') = (u_\eta(T), v(T))_{L^2(\Omega_T)} - (u_\eta(0), v(0))_{L^2(\Omega_0)}.$$

D'où, puisque $v(0) = 0$:

$$\sqrt{\eta} (\sqrt{\eta} u'_\eta, v') + (u_\eta(T), v(T))_{L^2(\Omega_T)} = (u_\eta, v') + a_T(u_\eta, v) = (f, v)$$

pour tout $v \in W$.

Quand $\eta \rightarrow 0$ il vient d'après (1), (2), (3) :

$$(4) \quad (\theta, v(T))_{L^2(\Omega_T)} = (u, v') + a_T(u, v) = (f, v), \quad \forall v \in W.$$

Prenons $v \in \mathcal{D}(Q_T)$ = espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans l'ouvert Q_T . De (4) il suit :

$$u' + Au = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(Q_T)$$

où :

$$a_T(u, v) = \langle Au, v \rangle, \quad \forall v \in \mathcal{D}(Q_T), \quad Au \in \mathcal{D}'(Q_T).$$

Mais $\mathcal{D}(Q_T)$ étant dense dans $F(Q_T) = H_0^{m,0}(Q_T)$, on a :

$$\langle Au, v \rangle = a_T(u, v), \quad \forall v \in F(Q_T) \quad \text{avec } Au \in F'(Q_T).$$

Par suite $u' = f - Au$ appartient à $F'(Q_T)$ et :

$$(5) \quad u' + Au = f \quad \text{dans} \quad F'(Q_T).$$

Il ne reste plus qu'à montrer $u(\cdot, 0) \equiv 0$ dans $L^2(\Omega_0)$ pour que u soit solution du problème initial V .

Nous savons que $u \in F(Q_T)$ et $u' \in F'(Q_T)$ c'est à dire $u \in \mathcal{B}(Q_T)$. Or d'après [11] une condition nécessaire et suffisante pour que $u(\cdot, 0) = 0$ dans $L^2(\Omega_0)$ est que :

$$(6) \quad \langle u', v \rangle + \langle u, v' \rangle = 0 \quad \forall v \in B_T(Q_T)$$

$\langle, \rangle$ désignant la dualité entre $F(Q_T)$ et son dual.

Mais $\forall v \in B_T(Q_T)$:

$$\langle u'_\eta, v \rangle + \langle u_\eta, v' \rangle = - (u_\eta(0), v(0))_{L^2(\Omega_0)} = 0 \quad \text{car } u_\eta \in W.$$

soit :

$$(7) \quad \langle u'_\eta, v \rangle + \langle u_\eta, v' \rangle = 0 \quad \forall v \in B_T(Q_T).$$

Nous démontrons plus loin le :

LEMME III-2 : quand $\eta \rightarrow 0$, $u'_\eta \rightharpoonup u'$ dans $F'(Q_T)$ faible.

Alors quand $\eta \rightarrow 0$, (7) devient d'après (1) et le lemme III-2 :

$$\langle u', v \rangle + \langle u, v' \rangle = 0 \quad \forall v \in B_T(Q_T)$$

ce qui est (6).

D'où le théorème, la limite dans (1) étant indépendante de la sous-suite $\eta \rightarrow 0$ extraite de $\varepsilon \rightarrow 0$.

DÉMONSTRATION DU LEMME III-2 :

1er point : $\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t}$ est borné dans $F'(Q_T)$ pour tout $\varepsilon > 0$.

1. Soient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{O} \text{ un ouvert de } R_x^n, \text{ et } t_0, t_1 \in]0, T[\text{ tels que :} \\ \bar{O} \times [t_0, t_1] \subset Q_T \\ \varphi(x, t) = \Psi(t) \otimes v(x) \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi(t) \in \mathcal{D}([t_0, t_1]) \\ v(x) \in H_0^m(\bar{O}). \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Posons :

$$a(t; x; u, v) = \sum_{|p|, |q| \leq m} a_{pq} D_p u D_q \bar{v}, \quad \forall u, v \in F(Q_T)$$

alors :

$$a(t; u, v) = \int_{\Omega_t} a(t; x; u, v) dx \quad p \cdot p \text{ en } t \in [0, T]$$

$$a_T(u, v) = \int_0^T a(t; u, v) dt.$$

Soit $\tilde{\varphi}$ le prolongement par zéro de $\varphi(x, t)$ en dehors de $\bar{O} \times [t_0, t_1]$;
alors $\tilde{\varphi} \in W$ et en prenant $v = \tilde{\varphi}$ dans (III-84) il vient :

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_{\bar{O}} \varepsilon u'_\varepsilon \bar{v} dx \cdot \Psi'(t) + \int_{\bar{O}} u'_\varepsilon \bar{v} dx \cdot \Psi(t) + \int_{\bar{O}} a(t; x; u_\varepsilon, v) dx \cdot \Psi(t) \right] dt \\ = \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_{\bar{O}} f(t) \bar{v} dx \cdot \Psi(t) \right] dt. \end{aligned}$$

D'où :

$$(8) \quad -\varepsilon u''_\varepsilon + u'_\varepsilon + A(t) u_\varepsilon = f \text{ dans } \mathcal{D}'([t_0, t_1]) \text{ à valeurs dans}$$

$H^{-m}(\bar{O})$, avec :

$$a(t; u_\varepsilon, v) = (A(t) u_\varepsilon, v) \quad \forall v \in H_0^m(\bar{O})$$

où :

$$A(t) \in \mathcal{L}(H_0^m(\bar{O}), H^{-m}(\bar{O})).$$

Posons :

$$g(t) = f(t) - A(t) u_\varepsilon = -\varepsilon u''_\varepsilon + u'_\varepsilon \quad \text{dans } \mathcal{D}'([t_0, t_1] \rightarrow H^{-m}(\bar{O}))$$

$u_\varepsilon \in L^2(t_0, t_1; H^m(\bar{O}))$ entraîne :

$$A(t) u_\varepsilon \in L^2(t_0, t_1; H^{-m}(\bar{O}))$$

et comme $f(t) \in L^2(t_0, t_1; H^{-m}(\bar{O}))$ on en déduit que :

$$g(t) = -\varepsilon u''_\varepsilon + u'_\varepsilon \in L^2(t_0, t_1; H^{-m}(\bar{O})).$$

2. Montrons que $g(t)$ est bornée dans $L^2(t_0, t_1; H^{-m}(\bar{O}))$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$g(t) = f(t) - A(t) u_\varepsilon.$$

Il suffit de voir que $A(t) u_\varepsilon$ est borné dans $L^2(t_0, t_1; H^{-m}(\bar{O}))$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Mais u_ε , bornée dans $H_0^{m,0}(Q_T)$, l'est aussi dans $L^2(t_0, t_1; H_0^m(\bar{O}))$ et comme $A(t) \in \mathcal{L}(H_0^m(\bar{O}), H^{-m}(\bar{O}))$, $A(t) u_\varepsilon$ est borné dans $L^2(t_0, t_1; H^{-m}(\bar{O}))$.

3. Montrons maintenant que quel que soit le domaine cylindrique $\bar{O} \times]\tau_0, \tau_1[$, avec $\bar{O}$ ouvert régulier de R_x^n et $\bar{O} \times [\tau_0, \tau_1] \subset \bar{Q}_T$ et $\tau_0 \geq 0, \tau_1 < T, \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} = u'_\varepsilon$ reste dans un borné de $L^2(\tau_0, \tau_1; H^{-m}(\bar{O}))$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Pour cela nous prenons :

$$\begin{cases} t_0 = \tau_0 \\ \tau_1 < t_1 < T \end{cases} \quad \text{tels que : } \bar{O} \times [t_0, t_1] \subset Q_T$$

et nous construisons une fonction $r(t) \in \mathcal{C}^1([t_0, t_1])$ telle que :

$$r(t) = 1 \quad \text{si } t_0 \leq t \leq \tau_1, \quad r(t) = 0$$

au voisinage $t = t_1$.

Posons :

$$v_\varepsilon = r(t) u'_\varepsilon.$$

Il vient :

$$-\varepsilon v'_\varepsilon + v_\varepsilon = g(t) r(t) - \sqrt[\varepsilon]{u'_\varepsilon \cdot r'(t)} \sqrt[\varepsilon]{\varepsilon} = g_1(t)$$

quand $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\begin{cases} g(t) r(t) \text{ reste dans un borné de } L^2(t_0, t_1; H^{-m}(\bar{O})) \\ \sqrt[\varepsilon]{u'_\varepsilon} \text{ reste borné dans } L^2(Q_T) \text{ d'après (2)} \end{cases}$$

donc $g_1(t) = -\varepsilon v'_\varepsilon + v_\varepsilon$ reste borné dans $L^2(t_0, t_1; H^{-m}(\bar{O}))$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Définissons :

$$E_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} e^{t/\varepsilon} & \text{pour } t < 0, \\ 0 & \text{pour } t > 0 \end{cases}.$$

Alors :

$$v_\varepsilon = E_\varepsilon * g_1(t) \quad \text{dans } L^2(t_0, t_1; H^{-m}(\bar{O}))$$

où $*$ désigne le produit de convolution en t .

De $\int_{-\infty}^{+\infty} |E_\varepsilon(t)| dt = 1$ il suit :

$$\|v_\varepsilon\|_{L^2(t_0, t_1; H^{-m}(\bar{O}))} \leq \|g_1\|_{L^2(t_0, t_1; H^{-m}(\bar{O}))}$$

et par conséquent v_ε reste dans un borné de $L^2(t_0, t_1; H^{-m}(\bar{O}))$; en prenant la restriction de v_ε à $[\tau_0, \tau_1]$, u'_ε est alors bornée dans $L^2(\tau_0, \tau_1; H^{-m}(\bar{O}))$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

4. On en déduit que quel que soit le compact

$$K \subset Q_T, \quad u'_\varepsilon \in L^2(0, T; H^{-m}(Kt)), \quad \text{où } Kt_0 = K \cap \{t = t_0\},$$

et est bornée dans cet espace. En prenant une suite de compacts K telle que $\cup K_n$ tende vers Q_T on en conclut que

$$u'_\varepsilon \in L^2(0, T; H^{-m}(\Omega_t)) \equiv F'(Q_T)$$

et est bornée dans cet espace, ce qui démontre le point 1.

Point 2 : quand $\varepsilon \rightarrow 0$ on peut extraire une sous suite $\eta \rightarrow 0$ vérifiant (1), (2), (3) et :

$$u'_\eta \rightharpoonup u' \quad \text{dans} \quad F'(Q_T) \quad \text{faible.}$$

D'après le point 1 on peut extraire une sous-suite $\eta \rightarrow 0$ vérifiant au sens de la convergence faible :

$$(1) \quad u_\eta \rightharpoonup u \quad \text{dans} \quad H_0^{m,0}(Q_T)$$

$$(2) \quad \sqrt{\eta} u_\eta \rightharpoonup w \quad \text{dans} \quad L^2(Q_T)$$

$$(9) \quad u'_\eta \rightharpoonup \mu \quad \text{dans} \quad F'(Q_T) \quad \text{où} \quad \mu \in F'(Q_T).$$

En prenant $\varepsilon = \eta$ dans (III-84) il vient quand $\eta \rightarrow 0$:

$$\langle \mu, v \rangle + a_T(u, v) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in W$$

d'où l'on déduit :

$$\mu + Au = f \quad \text{dans} \quad F'(Q_T)$$

et en comparant à (5) on a : $\mu = u'$. D'où le lemme.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AUBIN J. P. - *Approximation des espaces de distributions et des opérateurs différentiels*; Thèse, Paris, 1966.
- [2] BAIocchi - *Regolarità e unicità della soluzione di una equazione differenziale astratta*; Rendiconti del seminario mathematico della Università di Padova; 35, 1965, p. 380-417.
- [3] BARDOS C. - *Approximation semi-discrète de la solution d'une équation variationnelle, astreinte à vérifier des conditions aux limites dépendant du temps*; Rendiconti del seminario mathematico della Università di Padova; 38, 1967, p. 41-59.
- [4] CEA J. - *Approximation variationnelle des problèmes aux limites*; Annales de l'Institut Fourier 14, 2, 1964, p. 345-444.
- [5] FORSYTHE G. E. - WASOW W. R. - *Finite difference methods for partial differential equations*; Wiley, New York, 1960.
- [6] LAURENT P. J. - *Etude de procédés d'extrapolation en Analyse Numérique*; Thèse, Grenoble, 1964.
- [7] LIONS J. L. - *Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites*, Springer, Berlin, 1961.
- [8] LIONS J. L. - *Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles*; Université de Montréal, été 1962.
- [9] LIONS J. L. - *Sur l'approximation des solutions de certains problèmes aux limites*; Rendiconti del seminario mathematico della Università di Padova; 32, 1962, p. 1-54.
- [10] LIONS J. L. - *Equations aux dérivées partielles opérationnelles dans les espaces de Hilbert*; Cours du C.I.M.E., Rome, Juin 1963.
- [11] LIONS J. L. - *Sur les problèmes mixtes pour certains systèmes paraboliques dans des ouverts non cylindriques*; Annales de l'Institut Fourier 7, 1957, p. 143-182.
- [12] LIONS J. L. - *Singular perturbations and some non linear boundary value problems*; Madison University of Wisconsin Press, Oct. 1963.
- [13] LIONS J. L. - MAGENES - *Problèmes aux limites non homogènes*; Annales de l'Institut Fourier 11, 1961, p. 136-178.

- [14] MAC SHANE E. J. - *Integration*; Princeton University Press, 1944.
- [15] RAVIART P. A. *Sur l'approximation de certaines équations d'évolution linéaires et non linéaires*; Thèse, Paris, 1965.
- [16] RICHARDSON L. F. - *The deferred approach to the limit*; Phil. Trans. Roy. London, vol. 226, 1927, p. 229-361.
- [17] ROGAK E. D. - *A mixed problem for the wave equation in a time dependent domain*; Arch. Rat. Mech. Anal., vol. 22, 1966, p. 24-36.
- [18] SATHER J. O. *The initial boundary value problems for the Navier-Stokes equations in regions with moving boundary*; University of Minnesota, Report 421, Jan. 1963.
- [19] SAULIEV - *Sibirsky Math. Journal.*, tome 4, 1963, p. 912-925.
- [20] SCHWARTZ L. - *Théorie des distributions*; Hermann, 1957.
- [21] SOBOLEV S. L. - *Certaines applications de l'analyse fonctionnelle à la physique mathématique*; Leningrad, 1950.
- [22] SOUTHWELL R. V. - *Relaxation methods in theoretical physics*; Clarendon Press, 1946.
- [23] TEMAM R. - *Sur la stabilité et la convergence de la méthode des pas fractionnaires*; Thèse, 1967, Paris.
- [24] TODD J. - *A survey of Numerical Analysis*; Mac Graw Hill Book, New-York, 1962.
- [25] VARGA R. - *Matrix iterative analysis*; Prentice Hall, 1962.
- [26] LIEUTAUD - Thèse, à paraître.

Manoscritto pervenuto in redazione il 2-5-1967.