Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Giuseppe Da Prato

Somma di generatori infinitesimali di semigruppi analitici

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 40 (1968), p. 151-161

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1968__40__151_0>

SOMMA DI GENERATORI INFINITESIMALI DI SEMIGRUPPI ANALITICI

GIUSEPPE DA PRATO *)

Siano X uno spazio dl Banach: A e B generatori infinitesimali di semigruppi analitici in X [6].

Sotto opportune condizioni proviamo (Teorema I) che $A+B$ è prechiuso e che la sua minima estensione chiusa $\overline{A+B}$ è ancora generatore infinitesimale di un semigruppo analitico.

Se uno soltanto dei due operatori A, B è generatore di un semigruppo analitico (e l'altro di un semigruppo di classe c_0 [6]) allora proviamo (Teorema 2) che $A+B$ è prechiuso e che il risolvente $R(\lambda, \overline{A+B})$ verifica una maggiorazione del tipo:

(1) $$\| R(\lambda, \overline{A+B}) \| \leq M/(\operatorname{Re} \lambda - \omega) \qquad \text{se } \operatorname{Re} \lambda > \omega,$$

con M e ω opportuni numeri reali [1]).

Se sono soddisfatte le ipotesi dei Teoremi 1 e 2 allora l'equazione:

(2) $$\lambda x - Ax - Bx = y, \; y \in X, \; \lambda \text{ opportuno}$$

ammette una e una sola soluzione debole x, cioè esiste una successione x_n in $D_A \cap D_B$ tale che x_n converge a x e $y_n = \lambda x_n - Ax_n - Bx_n$ converge a y.

---

*) Indirizzo dell'Autore: Istituto Matematico, Università di Pisa.

Lavoro svolto nell'ambito dei gruppi di ricerca del C. N. R. Alcuni dei risultati qui pubblicati sono stati annunciati in [3].

[1]) Ciò non è sufficiente a garantire che $\overline{A+B}$ è generatore di un semigruppo analitico.

Inoltre i Teoremi 3 e 4 danno informazioni sul dominio di $\overline{A+B}$ e quindi forniscono risultati di regolarizzazione per le soluzioni di (2). Questi risultati possono essere applicati allo studio di molti problemi sulle equazioni differenziali astratte come mostreremo in un successivo lavoro.

Osserviamo infine che il caso in cui A e B sono generatori infinitesimali di semigruppi dl classe c_0 è stato studiato in [2] e che nel caso presente P. GRISVARD ha ottenuto risultati vicini ai nostri indipendentemente e con metodo diverso, che appariranno in [5].

Usiamo le notazioni seguenti:
X è uno spazio di Banach complesso (con norma $\| \ \|$); se L è un operatore lineare in $X D_L$ è il dominio di L, $\varrho(L)$ e $\sigma(L)$ sono rispettivamente l'insieme risolvente e lo spettro di L e se $\lambda \in \varrho(L)$ $R(\lambda, L)$ è il risolvente di L.

Se L è generatore infinitesimale di un semigruppo di classe c_0 diremo che L appartiene a (C_0) e indicheremo con $e^{tL}, t \geq 0$ il semigruppo generato da L; se L è generatore infinitesimale di un semigruppo analitico diremo che L appartiene a (H_0) e indicheremo con e^{zL}, $z \in S_{\theta_L} = \{\lambda \neq 0 ; |\arg \lambda| < \theta\}$ $0 < \theta_L < \pi/2$, il semigruppo generato da L.

TEOREMA I. *Siano A e B operatori lineari chiusi in X tali che $A \in (H_0)$ e $B \in (H_0)$. Supponiamo inoltre che:*

(I) $\exists\, \mu \in \varrho(B)$ *e due numeri positivi K e $\alpha, \alpha \leq 1$, tali che se $x \in D_B$, $e^{zA} x \in D_B$ $\forall z \in S_\theta$ e risulta:*

$$\|(\mu - B) e^{zA} R(\mu, B) - e^{zA}\| \leq K |z|^\alpha \qquad \forall z \in \theta_A. \tag{3}$$

Allora $A + B$, con dominio $D_A \cap D_B$, è prechiuso e la sua minima estensione chiusa $\overline{A+B}$ appartiene a (H_0).

Premettiamo alcuni lemmi alla dimostrazione del Teorema I; facciamo inoltre alcune ipotesi semplificative (che non sono restrittive), poniamo cioè $\mu = 0$, $S_{\theta_A} = S_{\theta_B} = S_\theta$ e supponiamo che valgano le maggiorazioni:

$$\|e^{zA}\| \leq M_A, \ \|e^{zB}\| \leq M_B, \ \|B e^{zB}\| \leq M'_B / \operatorname{Re} z \qquad \forall z \in S_\theta \tag{4}$$

essendo M_A, M_B, M'_B numeri positivi opportuni.

LEMMA I. *L'applicazione* $z \longrightarrow Be^{zA} B^{-1}$ *è un semigruppo analitico* $e^{z\bar{A}}$ *in* X *e si ha:*

(5) $$\| e^{z\bar{A}} \| \leq M_A \, e^{K|z|^\alpha}$$

DIMOSTRAZIONE. E' intanto evidente che $e^{z\bar{A}}$ è un semigruppo, inoltre da (3) segue $\| e^{z\bar{A}} \| \leq \| e^{z\bar{A}} - e^{zA} \| + \| e^{zA} \| \leq K |z|^\alpha + M_A$ e quindi la (5)

Sia ora $x \in X$, proviamo che $z \longrightarrow e^{z\bar{A}} x$ è continua in $\bar{S}_\theta$; infatti se $z_1, z_2 \in S_\theta$ e Re $(z_1 - z_2) \geq 0$ posto $\Delta z = z_1 - z_2$ si ha

$$\| e^{z_1 \bar{A}} x - e^{z_2 \bar{A}} x \| \leq \| e^{z_2 \bar{A}} \| \, \| e^{\Delta z A} x - x \| \leq M_A \, e^{K|z_2|^\alpha} (\| e^{\Delta z \bar{A}} x - \\ - e^{\Delta z A} x \| + \| e^{\Delta z A} x - x \|)$$

e da (3) e dalla continuità di $z \longrightarrow e^{zA} x$ segue la continuità di $z \longrightarrow e^{z\bar{A}} x$.

Infine sia Γ una curva chiusa di Jordan in S_θ e $x \in X$, si ha $\int_\Gamma e^{z\bar{A}} x dz = \int_\Gamma Be^{zA} B^{-1} x dz$, gli integrali avendo senso per la continuità in z di $e^{z\bar{A}} x$; ne segue $\int_\Gamma e^{z\bar{A}} x dz = B \int_\Gamma e^{zA} B^{-1} x dz = 0$ dato che B è chiuso e che $e^{zA} B^{-1} x$ è analitica in z; quindi $z \longrightarrow e^{z\bar{A}} x$ è analitica e il lemma è dimostrato.

Poniamo ora $\forall\, n \in \mathbb{N}$ [2])

(6) $$B_n = nBR(n, B)$$

e se Re $\lambda > 0$

(7) $$A_\lambda = A - \lambda, \; \bar{A}_\lambda = \bar{A} - \lambda$$

(8) $$T_\lambda^{(n)} = \int_0^\infty e^{tA_\lambda} e^{tB_n} \, dt$$

---

[2]) $\mathbb{N}$ è l'insieme dei numeri naturali.

$$Q_\lambda^{(n)} = \int_0^\infty (B_n\, e^{tA_\lambda}\, B_n^{-1} - e^{tA_\lambda})\, B_n\, e^{tB_n}\, dt \tag{9}$$

$$S_\lambda^{(n)} = \int_0^\infty e^{tB_n}\, e^{tA_\lambda}\, dt \tag{10}$$

$$P_\lambda^{(n)} = \int_0^\infty e^{tB_n}\, (B_n\, e^{tA_\lambda}\, B_n^{-1} - e^{tA_\lambda})\, dt. \tag{11}$$

Usando l'identità di immediata verifica [3]) $B_n\, e^{tA}\, B_n^{-1} - e^{tA} = = nR\,(n, B)\,(e^{t\bar{A}} - e^{tA})$ si provano facilmente le maggiorazioni :

$$\| Q_\lambda^{(n)} \| \leq K M_B\, M_B'\, \Gamma(\alpha)/(\mathrm{Re}\,\lambda)^\alpha \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{12}$$

$$\| P_\lambda^{(n)} \| \leq K M_B\, M_B'\, \Gamma(1 + \alpha)\, \| B_n \|/(\mathrm{Re}\,\lambda)^{1+\alpha} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{13}$$

essendo Γ la funzione di Eulero e avendo supposto la costante M_B' scelta (il che è sempre possibile) in modo tale che $\| B_n\, e^{tB_n} \| \leq M_B'/t$.

Lemma 2. *Per ogni* $x \in X\; T_\lambda^{(n)}\, x \in D_A$ *e risulta :*

$$A_\lambda\, T_\lambda^{(n)}\, x = -\, x - \int_0^\infty e^{tA_\lambda}\, B_n\, e^{tB_n}\, x\, dt \tag{14}$$

$$(\lambda - A - B_n)\, T_\lambda^{(n)} = 1 - Q^{(n)}. \tag{15}$$

Inoltre se $x \in D_A$ *si ha :*

$$S_\lambda^{(n)}\, (\lambda - A - B_n)\, x = (1 + P_\lambda^{(n)})\, x. \tag{16}$$

Dimostrazione. Sia $x \in X$, poniamo $\varphi(t) = A_\lambda^{-1}\, e^{tA}$ e osserviamo che $\dfrac{d}{dt}(\varphi(t)\, x) = e^{tA_\lambda}\, x$; integrando per parti nella (8) si ottiene

---

[3]) Basta osservare che $B_n^{-1} = B^{-1} - 1/n$.

$$T_\lambda^{(n)} x = A_\lambda^{-1} x - \int_0^\infty A_\lambda^{-1} e^{tA_\lambda} B_n e^{tB_n} dtx \text{ da cui } T_\lambda^{(n)} x \in D_A \text{ e la (14)};$$

la (15) segue ora facilmente e la (16) si prova in modo analogo.

LEMMA 3. *Posto* $\bar{\lambda}_\alpha = (KM_B M'_B \Gamma(\alpha))^{1/\alpha}$ *e per ogni* λ *con* $\mathrm{Re}\,\lambda > \bar{\lambda}_\alpha$:

$$F_\lambda^{(n)} = T_\lambda^{(n)} (1 - Q_\lambda^{(n)})^{-1} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{17}$$

allora $\varrho(A + B_n)$ *contiene il semipiano* $\mathrm{Re}\,\lambda > \bar{\lambda}_\alpha$ *e si ha*

$$F_\lambda^{(n)} = R(\lambda, A + B_n) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{18}$$

DIMOSTRAZIONE. La (17) ha senso in virtù di (12); inoltre da (15) segue l'identità $(\lambda - A - B_n) F_\lambda^{(n)} = 1$.

Poniamo ora

$$\tilde{\lambda}_\alpha = (KM_B M'_B \Gamma(1 + \alpha) \| B_n \|)^{1/(1+\alpha)} \text{ e } L = F_\lambda^{(n)} (\lambda - A - B_n),\ \mathrm{Re}\,\lambda > \tilde{\lambda}_\alpha;$$

moltiplicando a sinistra ambo i membri dell'ultima eguaglianza per $1 + P_\lambda^{(n)}$ si ottiene $(1 + P_\lambda^{(n)}) L = (1 + P_\lambda^{(n)}) T_\lambda^{(n)} (1 - Q_\lambda^{(n)})^{-1} (\lambda - A - B_n)$; se $x \in D_A$ dalla (16) segue

$$(1 + P_\lambda^{(n)}) Lx = S_\lambda^{(n)} (\lambda - A - B) T_\lambda^{(n)} (1 - Q_\lambda^{(n)})^{-1} (\lambda - A - B_n) x =$$
$$= (1 + P_\lambda^{(n)}) x ;$$

poichè $1 + P_\lambda^{(n)}$ è invertibile in virtù di (13) si ottiene $Lx = x$ cosicchè (18) è provata per $\mathrm{Re}\,\lambda > \tilde{\lambda}_\alpha$ e quindi per $\mathrm{Re}\,\lambda > \bar{\lambda}_\alpha$ data l'analiticità del risolvente.

LEMMA 4. *Posto*:

$$T_\lambda = \int_0^\infty e^{tA_\lambda} e^{tB}\, dt \tag{19}$$

$$Q_\lambda = \int_0^\infty (e^{t\bar{A}_\lambda} - e^{tA_\lambda}) B e^{tB}\, dt \tag{20}$$

si ha per $n \to \infty$, $T_\lambda^{(n)} \to T_\lambda$, $Q_\lambda^{(n)} \to Q_\lambda$ [4]).

---

[4]) La freccia indica la convergenza forte in X.

Inoltre se $x \in D_A \cap D_B$, $T_\lambda x \in D_A \cap D_B$ *e si ha*:

$$(\lambda - A - B)\, T_\lambda x = x - Q_\lambda x. \tag{21}$$

Infine se $\lambda > 0$ *si ha* $\lambda T_\lambda \to 1$ *per* $\lambda \to \infty$.

DIMOSTRAZIONE. Ricordando [7] che per $n \to \infty$ $e^{tB_n} \to e^{tB}$ e se $t > 0$ $B_n e^{tB_n} \to B e^{tB}$, e passando al limite in (7) e (8) per $n \to \infty$ si prova la prima parte del lemma.

Sia ora $x \in D_A \cap D_B$, in virtù dell'ipotesi (I) $e^{tA} e^{tB} x \in D_B$ e $Be^{tA} e^{tB} x = e^{t\bar{A}} e^{tB} Bx$; ne segue $T_\lambda x \in D_B$, inoltre passando al limite per $n \to \infty$ nella (14) si trova $T_\lambda x \in D_A$ e la (21).

Infine dalla (21) si deduce che $\lambda T_\lambda x \to x \ \forall x \in D_A \cap D_B$ e, poichè $\| \lambda T_\lambda \|$ è limitata si ha la tesi.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 1. Sia $\operatorname{Re} \lambda > \bar{\lambda}_\alpha$, poniamo $F_\lambda = T_\lambda (1 - Q_\lambda)^{-1}$, ciò ha senso in virtù di (12); si ha evidentemente $F_\lambda^{(n)} \to F_\lambda$ cosicchè F_λ è un pseudo-risolvente, inoltre se $x_0 \in X$ e $\lambda_0 > \operatorname{Re} \lambda_\alpha$ sono tali che $F_\lambda x_0 = 0$ si ha anche $F_{\lambda_0}^{(k)} x_0 = (-1)^k k!\, F_{\lambda_0}^k x_0 = 0$ cosicchè per un noto principio di identità delle funzioni analitiche si ha $F_\lambda x_0 = 0 \ \ \forall \lambda > \operatorname{Re} \bar{\lambda}_\alpha$; ne segue $\lim_{\lambda \to \infty} \lambda F_\lambda x_0 = 0$ e quindi $x_0 = 0$ in virtù dell'ultima affermazione del lemma 4. Quindi F_λ è iniettivo e esiste un operatore lineare chiuso $\overline{A + B}$ tale che $F_\lambda = R(\lambda, \overline{A + B})$, [6]. $\overline{A + B}$ è un'estensione di $A + B$, infatti se $x \in D_A \cap D_B$ si ha, tenuto conto di (18) $x = \lim_{n \to \infty} F_\lambda^{(n)} (\lambda - A - B_n) x = F_\lambda (\lambda - A - B) x$, da cui $\overline{A + B} x = Ax + Bx \cdot A + B$ è prechiuso, infatti se $\{x_n\}$ è una successione in $D_A \cap D_B$ convergente a 0 e tale che $(A + B) x_n \to y$ si ha $x_n = F_\lambda (A + B) x_n \to F_\lambda y = 0$ e quindi $y = 0$. Proviamo ora che $\overline{A + B}$ è la minima estensione chiusa di $A + B$; per questo cominciamo con l'osservare che se $\operatorname{Re} \lambda > \bar{\lambda}_\alpha$ $(\lambda - A - B)(D_A \cap D_B)$ è denso in X, infatti $D_A \cap D_B$ è denso in X [5]) e se $x \in D_A \cap D_B$ dalla (21) segue $(\lambda - A - B)(D_A \cap D_B) \supset (1 - Q_\lambda)(D_A \cap D_B)$ che, in virtù dell'invertibilità di $(1 - Q_\lambda)$ implica la tesi.

Sia ora $y \in D_{\overline{A+B}}$ e $\{y_n\}$ una successione in $(\lambda - A - B)(D_A \cap D_B)$ convergente a y; posto $x_n = F_\lambda y_n$ si ha $x_n \in D_A \cap D_B$, $x_n \to F_\lambda y$ e $(A + B) x_n \to - y + x$ cosicchè x appartiene al dominio della minima estensione chiusa $\widetilde{A+B}$ di $A + B$ e risulta $(\widetilde{A+B}) x = \overline{A + B}x$.

Resta da provare che $\overline{A+B} \in (H_0)$, per questo sia $0 < \varphi < \theta$ e I_φ la semiretta $I_\varphi = \{z ; z = \tau e^{i\varphi}, \tau \geq 0\}$ si ha allora evidentemente $T_\lambda = \int_{I_\varphi} e^{zA_\lambda} e^{zB} dz = e^{i\varphi} \int_0^\infty e^{-\lambda\tau e^{i\varphi}} e^{\tau e^{i\varphi} A} e^{\tau e^{i\varphi} B} dz$ da cui $\| T_\lambda \| \leq$ $\leq M_A M_B / \mathrm{Re}(\lambda e^{i\varphi})$ se $\mathrm{Re}(\lambda e^{i\varphi}) > 0$; ne segue che esiste un numero positivo M tale che $\| T_\lambda \| \leq M / |\lambda|$ e allora, in virtù di (12) e della relazione $F_\lambda = T_\lambda (1 - Q_\lambda)^{-1}$ si ha la tesi.

OSSERVAZIONE I. Se A e B verificano le ipotesi del Teorema I e $\varrho(A)$ e $\varrho(B)$ sono contenuti in S_θ si ha, come segue facilmente dalla (19), $\varrho(\overline{A+B}) \subset \lambda_\alpha + S_\theta$ essendo $\lambda_\alpha = (K M'_B \Gamma(\alpha))^{1/\alpha}$.

OSSERVAZIONE 2. Se A e B verificano le ipotesi del Teorema I e se in più sono generatori infinitesimali di semigruppi di contrazione tali che $\| R(\lambda, A) \| \leq 1/\lambda$, $\| R(\lambda, B) \| \leq 1/\lambda$ per $\lambda > 0$ allora $\varrho(\overline{A+B})$ contiene la semiretta $\lambda > 0$ e si ha $\| R(\lambda, \overline{A+B}) \| \leq 1/\lambda$; infatti in virtù della Proposizione [1. I] in [2] si ha $\| R(\lambda, A + B_n) \| \leq 1/\lambda$.

OSSERVAZIONE 3. Siano A e B generatori infinitesimali di semigruppi analitici di crescenza 1 [1] e supponiamo che esistano nu-

---

[5]) Infatti se $x \in D_B$ e $t > 0$, $(1/t) \int_0^t e^{sA} x ds \in D_A \cap D_B$ in virtù dell'ipotesi (I) e si ha $\lim_{t \to 0} (1/t) \int_0^t e^{sA} x ds = x$ cosicchè $D_A \cap D_B$ è denso in X.

meri positivi M_A, M_B, M'_B, a e b con $a, b < 1$ tali che $\| e^{zA} \| \leq \leq M_A / | z |^a$, $\| e^{zB} \| \leq M_B / | z |^b$, $\| B e^{zB} \| \leq M'_B / | z |^{1+b}$ e che valga l'ipotesi (I).

Allora si prova in modo analogo al Teorema I che $A + B$ è prechiuso e $\overline{A+B}$ è generatore infinitesimale di un semigruppo analitico di crescenza 1.

Il Teorema seguente riguarda il caso in cui uno soltanto dei due operatori A e B appartiene a (H_0) mentre l'altro appartiene a (C_0) e si prova in modo del tutto analogo al Teorema I.

TEOREMA 2. *Siano A e B operatori lineari chiusi in X tali che $A \in (C_0)$ e $B \in (H_0)$. Supponiamo inoltre che valga una delle due ipotesi seguenti:*

(II) $\exists\, \mu \in \varrho(B)$ *e due numeri positivi K e α, $\alpha \leq 1$, tali che se $x \in D_B$, $e^{tA} x \in D_B$ $\forall\, t \geq 0$ e risulta:*

$$\| (\mu - B) e^{tA} R(\mu, B) - e^{tA} \| \leq K t^{\alpha} \qquad \forall\, t \geq 0. \tag{22}$$

(III) $\exists\, \mu' \in \varrho(A)$ *e due numeri positivi K' e α', $\alpha' \leq 1$ tali che se $x \in D_A$, $e^{tB} x \in D_A$ $\forall\, t \geq 0$ e risulta:*

$$\| (\mu' - A) e^{tB} R(\mu', A) - e^{tB} \| \leq K' t^{\alpha'} \qquad \forall\, t \geq 0. \tag{23}$$

Allora $A + B$, con dominio $D_A \cap D_B$, è prechiuso e, detta $\overline{A+B}$ la sua minima estensione chiusa, esiste un numero reale λ_α e un numero positivo M tali che $\varrho(\overline{A+B})$ contiene la semiretta $\lambda > \lambda_\alpha$ e risulta:

$$\| R(\lambda, \overline{A+B}) \| \leq M / (\operatorname{Re} \lambda - \lambda_\alpha) \quad \textit{se} \quad \operatorname{Re} \lambda > \lambda_\alpha. \tag{24}$$

Dal fatto che $\overline{A+B}$ è la minima estensione chiusa di $A + B$ segue facilmente il

COROLLARIO. *Siano A e B operatori lineari chiusi in X verificanti le ipotesi del Teorema 1 o del Teorema 2. Allora esiste un numero reale λ_α tale che l'equazione:*

$$\lambda x - Ax - Bx = y \quad y \in X, \quad \operatorname{Re} \lambda > \lambda_\alpha \tag{25}$$

ammette una soluzione debole unica, cioè esiste una successione $\{x_n\}$ in $D_A \cap D_B$ *convergente a* x *e tale che* $\lambda x_n - Ax_n - Bx_n$ *converge a* y.

Proviamo infine due Teoremi di regolarizzazione:

TEOREMA 3. *Siano* A *e* B *operatori lineari chiusi verificanti oltre alle ipotesi del Teorema* 1 *o del Teorema* 2 (*con l'ipotesi* (II)) *la seguente:*

(IV) $\exists \mu_1 \in \varrho(B)$ *e due numeri positivi* K_1 *e* α_1, $\alpha_1 \leq 1$ *tali che se* $x \in D_{B^2}$, $e^{tA} x \in D_{B^2}$ $\forall\, t \geq 0$ *e risulta:*

$$\| (\mu_1 - B)\, e^{tA} R(\mu_1, B) - e^{tA} \| \leq K_1 t^{\alpha_1} \qquad \forall\, t \geq 0. \tag{26}$$

Allora esiste un numero reale λ_1 *tale che l'equazione:*

$$\lambda x - Ax - Bx = y, \; y \in D_B, \quad \operatorname{Re} \lambda > \lambda_1 \tag{27}$$

ammette una soluzione unica x *appartenente a* $D_A \cap D_B$.

DIMOSTRAZIONE. $t \longrightarrow B^2 e^{tA} B^{-2}$ è un semigruppo di classe c_0 che indichiamo con $e^{t\tilde{A}}$. In virtù dell'ipotesi (IV) si può porre

$$T_\lambda^1 = BT_\lambda B^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{t\tilde{A}} e^{tB}\, dt, \;\; Q_\lambda^1 = BQ_\lambda B^{-1} =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t} (e^{t\tilde{A}} - e^{t\bar{A}})\, Be^{tB}\, dt, \;\; F_\lambda^1 = BF_\lambda B^{-1};$$

sia ora $y \in D_B$ e $x = F_\lambda y$ la soluzione debole della (27), si ha $x = F_\lambda y = F_\lambda B^{-1} By$ e quindi $x \in D_B$ e $Bx = F_\lambda^1 By$, inoltre $x \in D_A$ essendo $Ax = \lambda x - Bx - y$.

TEOREMA 4. *Siano* A *e* B *operatori lineari chiusi in* X *verificanti oltre alle ipotesi del Teorema* 1 *o del Teorema* 2 (*con l'ipotesi* 2) *la segnente:*

(V) $\exists\, \mu_2 \in \varrho(B)$ *e tre numeri positivi* K_2, ω, ν *con* $0 \leq \nu < 1$ *tali che se* $x \in D_{B^\nu}$, $e^{tA}\, x \in D_{B^\nu}$ $\forall\, t \geq 0$ *e si ha* [6]:

$$\| B^\nu e^{tA} B^{-\nu} \| \leq K_2\, e^{\omega t} \qquad \forall\, t \geq 0. \tag{28}$$

Allora la soluzione debole dell'equazione (25) *appartiene a* D_{B^ν}.

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che, in virtù dell'ipotesi (V) si ha per ogni $x \in X\, F_\lambda\, x \in D_{B^\nu}$ con $B^\nu F_\lambda = \int\limits_0^\infty (B^\nu e^{tA_\lambda} B^{-1})\, B^\nu e^{tB}\, dt$ quindi la soluzione della (25) appartiene a D_{B^ν}.

Manoscritto pervenuto in redazione il 23 gennaio 1968.

---

[6]) Per la definizione della potenza frazionaria B^ν vedi [7].

BIBLIOGRAFIA

[1] G. DA PRATO, *Nouveau type de semi-groupe,* C. R. Acad. Sc. Paris, t. 262 996-998 (1966).
Semigruppi di crescenza n, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, XX, 753-782, (1966).

[2] G. DA PRATO, *Equations operationelles dans les espaces de Banach et applications,* C. R. Acad. Sc. Paris, t. 266, 60-62 (1968).
Somma di generatori infinitesimali di semi-gruppi di contrazione e equazioni di evoluzione in spazi di Banach (in corso di stampa su Annali di Matematica).

[3] G. DA PRATO, *Equations operationelles dans les espaces de Banach,* (cas analityque), C. R. Acad. Sc. Paris, t. 266, 277-79 (1968).

[4] P. GRISVARD, *Equations operationelles abstraites dans les espaces de Banach et problemes aux limites dans des ouverts cylindriques,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa XXI, 307-347 (1967).

[5] P. GRISVARD, Cours Peccot 1968.

[6] H. HILLE-R. S. PHILLIPS, *Functional Analysis and semi-groups,* Amer. Math. Soc. Coll. Publ. XXXI (1957).

[7] K. YOSIDA, *Functional Analysis,* Springer-Verlag (1965).