

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ADALBERTO ORSATTI

**Una caratterizzazione dei gruppi abeliani compatti  
o localmente compatti nella topologia naturale**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,*  
tome 39 (1967), p. 219-225

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1967\\_\\_39\\_\\_219\\_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__39__219_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

# UNA CARATTERIZZAZIONE DEI GRUPPI ABELIANI COMPATTI O LOCALMENTE COMPATTI NELLA TOPOLOGIA NATURALE

ADALBERTO ORSATTI \*)

INTRODUZIONE. Lo scopo di questa nota è di determinare la struttura di un gruppo abeliano  $G$  supposto compatto o localmente compatto nella topologia naturale; cioè nella topologia, compatibile con la struttura di gruppo, ottenuta prendendo i sottogruppi  $nG$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) come base di interni dello zero in  $G$ , [1], [3].

Seguendo le definizioni di [4], diremo che  $G$  è compatto se ogni ricoprimento aperto di  $G$  possiede un sottoricoprimento finito, localmente compatto se lo zero (e quindi ogni elemento di  $G$ ) ha un intorno compatto in  $G$ .

Non si postula che  $G$ , in quanto spazio topologico, sia di Hausdorff, ma si prova che ci si può ricondurre a questo caso senza introdurre restrizioni essenziali. Si dimostra infatti che se  $G$  è localmente compatto (in particolare compatto) nella topologia naturale, l'intersezione  $G_\infty$  degli  $nG$  è divisibile e coincide pertanto con il sottogruppo divisibile massimale di  $G$ ; d'altra parte si verifica che, per quanto riguarda il nostro problema, è lecito supporre  $G$  ridotto.

---

\*) Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la Matematica del C. N. R.

Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

Si ottiene la seguente proposizione:  $G$  è ridotto e compatto se e solo se è il prodotto diretto (= somma diretta completa) di una famiglia di gruppi  $G_p^*$ , uno per ogni numero primo  $p$ , ed ogni  $G_p^*$  è un modulo finitamente generato sopra l'anello degli interi  $p$ -adici.

La caratterizzazione dei gruppi localmente compatti (cfr. teorema 2) segue dal risultato precedente e dal fatto che  $G$  è localmente compatto se e solo se esiste un intero positivo  $n$  tale che il gruppo  $nG$  sia compatto nella propria topologia naturale.

1. Con la parola gruppo intendiamo gruppo abeliano; la notazione è quella additiva. Seguiremo la terminologia di [2] e [4] rispettivamente per le questioni di carattere algebrico e topologico.

Sia  $G$  un gruppo. Denoteremo con  $T(G)$  il sottogruppo di torsione di  $G$  e con  $T_p(G)$  la componente  $p$ -primaria di  $T(G)$  relativa al primo  $p$ . Siano  $P$  l'insieme dei numeri primi ed  $N$  quello degli interi positivi. Poniamo:

$$p^\infty G = \bigcap_n p^n G, \quad G_\infty = \bigcap_n nG \quad (n \in N).$$

Risulta:

$$G_\infty = \bigcap_p p^\infty G, \quad p \in P.$$

Il gruppo  $G$ , dotato della topologia naturale, risulta di Hausdorff se e solo se  $G_\infty = 0$ .

Indicheremo con  $\widehat{G}$  il completamento naturale di  $G$ , cioè il completamento del gruppo  $G/G_\infty$  rispetto alla struttura uniforme di Hausdorff indotta dalla topologia naturale.  $G$  è completo se e solo se  $G \cong \widehat{G}$ ; un gruppo completo è di Hausdorff. Ricordiamo che ogni omomorfismo di gruppi è una applicazione uniformemente continua rispetto alla topologia naturale.

Nel seguito dicendo che un gruppo è completo o compatto o di Hausdorff ecc., senza specificare in quale topologia, intenderemo riferirci alla topologia naturale del gruppo considerato.

Se  $\{G_\alpha\}$  è una famiglia indicata di gruppi, indicheremo con  $\prod_a G_\alpha$  il prodotto diretto (= somma diretta completa) dei  $G_\alpha$ .

2. Dimostriamo alcuni lemmi che ci saranno utili in seguito.

LEMMA 1. *Sia  $G$  un gruppo munito della topologia naturale e sia  $n$  un intero positivo. La topologia naturale di  $nG$  coincide con la topologia relativa della quale  $nG$  è dotato in quanto sottogruppo di  $G$ .*

DIM. Si ha, per ogni  $m \in N$ ,

$$(mG) \cap (nG) \supseteq m(nG); \quad m(nG) = (mnG) \cap (nG).$$

LEMMA 2. *Un gruppo  $G$  è localmente compatto se e solo se esiste un intero positivo  $n$  tale che il gruppo  $nG$  sia compatto nella propria topologia naturale.*

*Di conseguenza un gruppo libero da torsione è localmente compatto se e solo se è compatto.*

DIM. Se  $G$  è localmente compatto, sia  $V$  un intorno dello zero compatto in  $G$ . Esiste un  $n \in N$  tale che  $nG \subseteq V$ . Poichè  $nG$  è chiuso in  $G$ , esso è chiuso in  $V$  ed è quindi un sottospazio compatto di  $G$ ; per il lemma precedente  $nG$  è compatto nella propria topologia naturale. Viceversa, se per un certo  $n \in N$   $nG$  è compatto nella topologia naturale, lo zero di  $G$  ha un intorno compatto in  $G$ ; allora  $G$  è localmente compatto.

Ricordiamo che un gruppo  $G$  dicesi *limitato* se esiste un  $n \in N$  tale che  $ng = 0$  per ogni  $g \in G$ .

LEMMA 3. *Sia  $G$  un gruppo. Se, per ogni primo  $p$ ,  $T_p(G)$  è somma diretta di un gruppo divisibile e di uno limitato,  $G_\infty$  è divisibile.*

DIM. Possiamo supporre  $T(G)$  ridotto, dal momento che il suo sottogruppo divisibile massimale è un addendo diretto di  $G$  ed è contenuto in  $G_\infty$ .

Sia  $p$  un primo arbitrario.  $T_p(G)$  è un addendo diretto di  $G$  poichè è puro in  $G$  ed è limitato ([2], Teorema 24.5.). Esiste pertanto un sottogruppo  $H$  di  $G$  tale da aversi  $G = T_p(G) \oplus H$ ; evidentemente  $H \supseteq G_\infty$ . Sia  $g \in G_\infty$ : esiste un elemento  $x \in H$  tale che  $px = g$  ed è chiaro che  $x$  ha  $q$ -altezza infinita in  $G$  per ogni primo  $q \neq p$ . Sia  $n \in N$ : esiste un elemento  $y \in H$  tale che  $p^{n+1}y = g = px$ , da cui  $p(p^n y - x) = 0$ . Poichè  $H$  non contiene elementi di periodo  $p$ , si ha  $p^n y = x$ . Allora anche la  $p$ -altezza di  $x$  è infinita, per cui

$x \in G_\infty$ . Risulta pertanto  $pG_\infty = G_\infty$ . Per l'arbitrarietà del primo  $p$ ,  $G_\infty$  è divisibile.

LEMMA 4. *Sia  $G$  un gruppo localmente compatto nella topologia naturale e sia  $p$  un primo arbitrario. Allora  $T_p(G)$  è somma diretta di un gruppo divisibile e di uno limitato il quale risulta finito se  $G$  è compatto; inoltre  $G_\infty$  è divisibile.*

DIM. Supponiamo  $G$  compatto.  $G/pG$  è finito: infatti le classi modulo  $pG$  formano una partizione ed un ricoprimento aperto di  $G$ . Poniamo  $T = T_p(G)$ .  $T/pT$  è finito poichè, essendo  $T$  puro in  $G$ ,  $T/pT$  è isomorfo ad un sottogruppo di  $G/pG$ . Sia  $B$  un sottogruppo basilico di  $T$ . Poichè  $B$  è puro in  $T$ ,  $B/pB$  è finito; d'altra parte  $B$  è una somma diretta di  $p$ -gruppi ciclici; quindi  $B$  è finito. Allora  $B$  è un addendo diretto di  $T$  ed un complementare di  $B$  in  $T$ , in quanto isomorfo a  $T/B$ , è divisibile.

Supponiamo  $G$  localmente compatto. Esiste, per il lemma 2, un intero positivo  $n$  tale che  $nG$  sia compatto nella topologia naturale. Dalla struttura di  $T_p(nG) = nT_p(G)$  segue che  $T_p(G)$  è somma diretta di un gruppo divisibile e di uno limitato.

Infine, per il lemma 3,  $G_\infty$  è divisibile.

Una verifica immediata porge il seguente

LEMMA 5. *Se il gruppo  $G$  è la somma diretta di una famiglia finita di gruppi, la topologia naturale di  $G$  coincide con la topologia prodotto delle topologie naturali degli addendi.*

OSSERVAZIONE. Sia  $G$  un gruppo localmente compatto. Si ha  $G = G_\infty \oplus R$  dove  $G_\infty$  è divisibile ed  $R$  è un gruppo ridotto. Per il lemma precedente ed il teorema di Tychonoff ([4], Teorema 5.13),  $G$  è compatto se e solo se  $R$  è compatto poichè su  $G_\infty$  la topologia naturale è quella banale. Segue dal lemma 2 che  $G$  è localmente compatto se e solo se  $R$  è localmente compatto. Possiamo pertanto limitarci a considerare gruppi ridotti.

LEMMA 6. *Un gruppo  $G$  ridotto e localmente compatto nella topologia naturale è completo.*

DIM. Per il lemma 4  $G_\infty = 0$ , cioè  $G$  è di Hausdorff. Possiamo pertanto identificare  $G$  con un sottogruppo puro e denso di  $\widehat{G}$ , [1]. Sia  $n$  un intero positivo tale che  $nG$  risulti compatto;  $nG$  è completo nella topologia naturale ([4], Teorema 5.32). Poichè  $G$  è puro in  $\widehat{G}$  e per il lemma 1,  $nG$  è un sottospazio completo dello spazio uniforme di Hausdorff  $\widehat{G}$ , quindi ([4], Teorema 6.22)  $nG$  è chiuso in  $\widehat{G}$ . Allora  $nG = n\widehat{G}$ : infatti ([1], pag. 692)  $n\widehat{G}$  è la chiusura di  $nG$  in  $\widehat{G}$ . Abbiamo dunque le inclusioni  $n\widehat{G} \subseteq G \subseteq \widehat{G}$ . Da queste conseguenze  $G = \widehat{G}$  poichè  $\widehat{G}/G$  è divisibile e  $\widehat{G}/n\widehat{G}$  è limitato.

3. Per ogni  $p \in P$ , indichiamo con  $\widehat{\mathbb{Z}}_p$  l'anello degli interi  $p$ -adici. Sia  $G$  un gruppo ridotto e localmente compatto. Per il lemma 6,  $G$  è completo: si ha pertanto  $G \cong \prod_p G_p^*$ ,  $p \in P$ , dove  $G_p^* = G/p^\infty G$  e,

per ogni  $p \in P$ ,  $G_p^*$  è uno  $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ -modulo completo nella topologia naturale che su  $G_p^*$  coincide con la topologia  $p$ -adica. (Questo risultato si ottiene ricordando che ogni gruppo completo è ridotto ed algebricamente compatto, [3], e tenendo presenti le osservazioni di pag. 86 di [2]; oppure applicando il lemma di immersione e la P.5 di [5]). Inoltre  $G$ , con la topologia naturale, risulta il prodotto topologico dei  $G_p^*$  ciascuno munito della propria topologia  $p$ -adica.

Poichè  $G$  è localmente compatto, ogni  $G_p^*$  è localmente compatto e tutti i  $G_p^*$ , eccettuato un numero finito di essi, sono compatti ([4], Teorema 5.19). In particolare  $G$  è compatto se e solo se tutti i  $G_p^*$  sono compatti.

Dobbiamo quindi determinare la struttura di uno  $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ -modulo compatto o localmente compatto nella topologia  $p$ -adica.

P.1. Uno  $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ -modulo  $M$  è ridotto e compatto nella topologia  $p$ -adica se e solo se è uno  $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ -modulo finitamente generato.

DIM. Se è finitamente generato,  $M$  è isomorfo alla somma diretta di un  $p$ -gruppo finito e di un numero finito di gruppi ciascuno isomorfo al gruppo additivo degli interi  $p$ -adici. Questi sono compatti, quindi  $M$  è compatto per il lemma 6 ed il teorema di Tychonoff;  $M$  è chiaramente ridotto.

Viceversa, sia  $M$  ridotto e compatto.  $T(M) = T_p(M)$  è finito per il lemma 4; pertanto  $M = T(M) \oplus F$ , dove  $F$  è uno  $\widehat{Z}_p$ -modulo ridotto, libero da torsione e compatto  $F/pF$  è finito ed  $F$  è completo; allora  $F$  è uno  $\widehat{Z}_p$ -modulo libero di rango uguale alla dimensione di  $F/pF$  in quanto spazio vettoriale sul corpo con  $p$  elementi (cfr., ad es., [5] P.7). Quindi  $M$  è uno  $\widehat{Z}_p$ -modulo finitamente generato.

È ora immediato il seguente

**TEOREMA 1.** *Un gruppo  $G$  è ridotto e compatto nella topologia naturale se e solo se:*

$$1) \quad G \cong \prod_p G_p^*, \quad p \in P.$$

2) *Per ogni  $p \in P$ ,  $G_p^*$  è uno  $\widehat{Z}_p$ -modulo finitamente generato.*

Dai lemmi 2 e 4 e dalla P.1 si ottiene la

P.2. *Uno  $\widehat{Z}_p$  modulo  $M$  è ridotto e localmente compatto nella topologia  $p$ -adica se e solo se  $M = T \oplus F$ , dove  $T$  è un  $p$ -gruppo limitato ed  $F$  è uno  $\widehat{Z}_p$ -modulo libero finitamente generato.*

Siamo ora in grado di descrivere la struttura dei gruppi localmente compatti.

**TEOREMA 2.** *Un gruppo  $G$  è ridotto e localmente compatto nella topologia naturale se e solo se:*

$$1) \quad G \cong \prod_p G_p^*, \quad p \in P.$$

2) *Per ogni  $p \in P$ ,  $G_p^* = T_p \oplus F_p$  dove  $T_p$  è un  $p$ -gruppo limitato ed  $F_p$  è uno  $\widehat{Z}_p$ -modulo libero finitamente generato.*

3) *Tutti i  $T_p$  sono finiti, eccettuato un numero finito di essi.*

**DIM.** Se  $G$  è ridotto e localmente compatto le condizioni enunciate sono soddisfatte per il lemma 6, il teorema 5.19 di [4], la P.1 e la P.2. Viceversa, se valgono queste condizioni,  $G$  è ovviamente ridotto ed è localmente compatto per il lemma 2 ed il teorema 1.

Concludiamo con un'altra caratterizzazione dei gruppi ridotti e compatti nella topologia naturale.

Ogni gruppo  $G$  è un gruppo topologico nella topologia avente come base di intorni dello zero i sottogruppi di indice finito. Questa topologia è contenuta in quella naturale e le due topologie coincidono se e solo se  $G/nG$  è finito per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

Ciò premesso, per mezzo del teorema 1 e con ragionamenti già usati nella dimostrazione del lemma 4 e della P.1, si verifica facilmente la seguente

**P.3.** *Un gruppo  $G$  è ridotto e localmente compatto nella topologia naturale se e solo se  $G$  è completo e la topologia naturale coincide con la topologia dei sottogruppi di indice finito.*

## BIBLIOGRAFIA

- [1] A. L. S. CORNER, *Every countable reduced torsion-free ring is an endomorphism ring*, Proc. London Math. Soc. (3) 13 (1963) 687-710.
- [2] L. FUCHS, *Abelian groups*, Budapest 1958.
- [3] D. K. HARRISON, *Infinite abelian groups and homological methods*, Annals of Math. 69 (1959) 366-91.
- [4] J. KELLEY, *General topology*, (1955).
- [5] A. ORSATTI, *Un lemma di immersione per i gruppi abeliani senza elementi di altezza infinita*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova XXXVIII (1967) 1-13.

Manoscritto pervenuto in redazione il 10 luglio 1967.