

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARIO MIRANDA

## **Una maggiorazione integrale per le curvature delle ipersuperfici minimali**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 38 (1967), p. 91-107

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1967\\_\\_38\\_\\_91\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__38__91_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# UNA MAGGIORAZIONE INTEGRALE PER LE CURVATURE DELLE IPERSUPERFICI MINIMALI

MARIO MIRANDA \*)

Per le superfici cartesiane 2-dimensionali minimali sono note valutazioni puntuali della curvatura di Gauss. In [1] Heinz ha provato l'esistenza di una costante  $\gamma$  tale che: se  $S = \{(x, f(x)); x \in \mathbb{R}^2, |x| \leq d\}$  è una superficie minimale, detta  $K$  la curvatura di Gauss di  $S$  nel punto  $(0, f(0))$  si ha

$$|K| \leq \gamma d^{-2}.$$

Hopf, Ossermann e Finn hanno migliorato tale risultato in [2], [3] e [4].

In questo lavoro proveremo che per ogni intero  $m > 1$  esiste una costante  $k(m)$  tale che: se  $S = \{(x, f(x)); x \in \mathbb{R}^m, |x| \leq d\}$  è una ipersuperficie minimale, indicata con  $c^2$  la somma dei quadrati delle curvature principali di  $S$ , si ha, per ogni  $\varrho < d$ ,

$$\int_{S_\varrho} c^2 dH_m \leq k(m) \left( \frac{d}{d - \varrho} \right)^2 \varrho^{m-2},$$

dove  $S_\varrho = \{(x, f(x)); x \in \mathbb{R}^m, |x|^2 + |f(x) - f(0)|^2 \leq \varrho^2\}$ , e  $H_m$  è la misura di Hausdorff  $m$ -dimensionale in  $\mathbb{R}^{m+1}$ .

---

\*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la matematica del C. N. R.

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università di Pisa.

Ringrazio Ennio De Giorgi con il quale ho discusso i risultati di questo lavoro.

1. Sia  $\Omega \subset R^n$  ( $n > 1$ ) aperto e  $g \in C^2(\Omega)$  con

$$(1.1) \quad |Dg(x)| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |D_i g(x)|^2} > 0, \quad \forall x \in \Omega,$$

Su  $\Omega$  possiamo considerare gli operatori differenziali lineari  $\delta_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) definiti da

$$(1.2) \quad \delta_i = D_i - \nu_i(x) \sum_{h=1}^n \nu_h(x) D_h, \quad \nu_h(x) = D_h g(x) \cdot |Dg(x)|^{-1}.$$

Vale allora la seguente

**PROPOSIZIONE 1.** *Sia  $x_0 \in \Omega$  e  $S = \{x; x \in \Omega, g(x) = g(x_0)\}$ . Siano  $u, v \in C^1(\Omega)$  con*

$$(1.3) \quad u(x) = v(x), \quad \text{per } x \in S.$$

*Si ha allora*

$$(1.4) \quad \delta_i u(x_0) = \delta_i v(x_0), \quad \text{per } i = 1, \dots, n.$$

**DIM.** Posto  $w = u - v$  dalla (1.3) si ricava

$$(1.5) \quad w(x) = 0, \quad \text{per } x \in S.$$

Esisterà allora  $\lambda \in R$  tale che

$$(1.6) \quad D_i w(x_0) = \lambda \nu_i(x_0), \quad \text{per } i = 1, \dots, n,$$

e quindi

$$(1.7) \quad \delta_i w(x_0) = \lambda \nu_i(x_0) \left[ 1 - \sum_{h=1}^n |\nu_h(x_0)|^2 \right] = 0.$$

c. v. d.

Dall'essere  $\sum_{i=1}^n \nu_i^2 = 1$  si ricavano le

$$(1.8) \quad \sum_{i=1}^n \nu_i \delta_i = 0,$$

$$(1.9) \quad \sum_{i=1}^n \nu_i \delta_h \nu_i = 0, \quad \text{per } h = 1, \dots, n.$$

Altre due identità relative agli operatori  $\delta_i$  sono contenute nella seguente

**PROPOSIZIONE 2.** *Per gli operatori  $\delta_i$  definiti da (1.2) valgono le*

$$(1.10) \quad \delta_i \nu_j = \delta_j \nu_i, \quad \text{per} \quad i, j = 1, \dots, n,$$

$$(1.11) \quad \delta_i \delta_j - \delta_j \delta_i = \sum_{h=1}^n (\nu_i \delta_j \nu_h - \nu_j \delta_i \nu_h) \delta_h, \quad \text{per} \quad i, j = 1, \dots, n.$$

**DIM.** Per provare la (1.10) si osservi che dalla (1.2) si ricava

$$(1.12) \quad \delta_i \nu_j = |Dg|^{-1} \left\{ D_i D_j g - \nu_j D_i |Dg| - \right. \\ \left. - \nu_i \sum_{h=1}^n \nu_h D_h D_j g + \nu_i \nu_j \sum_{h=1}^n \nu_h D_h |Dg| \right\},$$

e poichè vale

$$(1.13) \quad D_i |Dg| = \sum_{h=1}^n \nu_h D_h D_i g,$$

dalle (1.12) e (1.13) si ricava

$$(1.14) \quad \delta_i \nu_j = |Dg|^{-1} \left\{ D_i D_j g - \nu_j \sum_{h=1}^n \nu_h D_h D_i g - \right. \\ \left. - \nu_i \sum_{h=1}^n \nu_h D_h D_j g + \nu_i \nu_j \sum_{h=1}^n \nu_h D_h |Dg| \right\},$$

da cui risulta evidente la simmetria dei  $\delta_i \nu_j$  rispetto ai due indici.

Per provare la (1.11) sostituiamo a  $\delta_j$  la sua espressione mediante le  $D_h$ , abbiamo così

$$(1.15) \quad \delta_i \delta_j = \delta_i D_j - \nu_j \sum_{h=1}^n \nu_h \delta_i D_h - \sum_{h=1}^n (\nu_h \delta_i \nu_j + \nu_j \delta_i \nu_h) D_h.$$

Operando la stessa sostituzione su  $\delta_i$  si ha

$$(1.16) \quad \delta_i D_j - \nu_j \sum_{h=1}^n \nu_h \delta_i D_h = D_i D_j - \nu_i \sum_{h=1}^n \nu_h D_h D_j - \\ - \nu_j \sum_{h=1}^n \nu_h D_h D_i + \nu_j \nu_i \sum_{h,k=1}^n \nu_h \nu_k D_h D_k.$$

Dalle (1.15) e (1.16), tenuto conto della (1.10), si ha

$$(1.17) \quad \delta_i \delta_j - \delta_j \delta_i = \sum_{h=1}^n (\nu_i \delta_j \nu_h - \nu_j \delta_i \nu_h) D_h.$$

Dalle (1.17), (1.2) e (1.9) si ha la (1.11).

c. v. d.

Una semplice relazione esiste poi fra le  $\delta_i \nu_j$  e le curvature principali delle ipersuperfici di livello della funzione  $g$ . Alla dimostrazione di questa premettiamo il seguente

**LEMMA 1.** *Sia  $\Omega \subset R^n$  aperto e  $g \in C^2(\Omega)$  verifichi la (1.1). Sia  $\tau: R^n \rightarrow R^n$  isometria e, posto  $\tilde{\Omega} = \tau(\Omega)$  e  $\tilde{g} = g \circ \tau^{-1}$ , indichiamo con  $\delta_i$  gli operatori su  $\Omega$  associati a  $g$  mediante la (1.2) e con  $\tilde{\delta}_i$  gli operatori su  $\tilde{\Omega}$  associati a  $\tilde{g}$  allo stesso modo. Si ha allora*

$$(1.18) \quad \sum_{i,j=1}^n |\delta_i \nu_j(x)|^2 = \sum_{i,j=1}^n |\tilde{\delta}_i \tilde{\nu}_j(y)|^2, \text{ per } x \in \Omega \text{ e } y = \tau(x).$$

**DIM.** Indicata con  $A = (a_{ij})$  la matrice derivata di  $\tau^{-1}$  e per  $f \in C^1(\Omega)$  con  $\tilde{f}$  la funzione  $f \circ \tau^{-1}$  si ha, per la regola di derivazione delle funzioni composte,

$$(1.19) \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_i}(y) = \sum_{h=1}^n a_{hi} \frac{\partial f}{\partial x_h}(x), \text{ per } x \in \Omega \text{ e } y = \tau(x).$$

Dalla (1.19) essendo  $A$  ortogonale si ricava

$$(1.20) \quad \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_i}(y) \right|^2 = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right|^2.$$

Dalle (1.19) e (1.20) segue allora

$$(1.21) \quad \tilde{\nu}_i(y) = \sum_{h=1}^n a_{hi} \nu_h(x).$$

Per l'ortogonalità di  $A$  dalle (1.19) e (1.21) segue

$$(1.22) \quad \sum_{i=1}^n \tilde{\nu}_i(y) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_i}(y) = \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^n a_{hi} \nu_h(x) \sum_{k=1}^n a_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \\ = \sum_{h,k=1}^n \nu_h(x) \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \sum_{i=1}^n a_{hi} a_{ki} = \sum_{h=1}^n \nu_h(x) \frac{\partial f}{\partial x_h}(x).$$

Dalle (1.22), (1.21) e (1.19) si ha

$$(1.23) \quad \tilde{\delta}_i \tilde{f}(y) = \sum_{j=1}^n a_{ji} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \sum_{j=1}^n a_{ji} \nu_j(x) \sum_{h=1}^n \nu_h(x) \frac{\partial f}{\partial x_h}(x) = \\ = \sum_{j=1}^n a_{ji} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \nu_j(x) \sum_{h=1}^n \nu_h(x) \frac{\partial f}{\partial x_h}(x) \right\} = \sum_{j=1}^n a_{ji} \cdot \delta_j f(x).$$

Dalle (1.21) e (1.23) si ha allora

$$(1.24) \quad \tilde{\delta}_i \tilde{\nu}_j(y) = \sum_{h=1}^n a_{hi} \delta_h \sum_{k=1}^n a_{kj} \nu_k(x) = \sum_{h,k=1}^n a_{hi} a_{kj} \delta_h \nu_k(x).$$

Essendo  $A$  ortogonale da (1.24) si ricava

$$(1.25) \quad \sum_{i=1}^n |\tilde{\delta}_i \tilde{\nu}_j(y)|^2 = \sum_{h=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{kj} \delta_h \nu_k(x) \right|^2,$$

e per lo stesso motivo

$$(1.26) \quad \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |\tilde{\delta}_i \tilde{\nu}_j(y)|^2 = \sum_{h=1}^n \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{kj} \delta_h \nu_k(x) \right|^2 = \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n |\delta_h \nu_k(x)|^2.$$

c. v. d.

Possiamo ora provare il

**TEOREMA 1.** *Sia  $\Omega \subset R^n$  ( $n > 1$ ) aperto,  $g \in C^2(\Omega)$  con  $Dg(x) \neq 0$   $\forall x \in \Omega$ . Posto  $\nu_j = D_j g \cdot |Dg|^{-1}$  ( $j = 1, \dots, n$ ) e  $\delta_i = D_i - \nu_i \sum_{h=1}^n \nu_h D_h$  ( $i = 1, \dots, n$ ) e, per  $x_0 \in \Omega$ , indicata con  $c^2(x_0)$  la somma dei quadrati*

delle curvatures principali, calcolate in  $x_0$ , dell'ipersuperficie  $\{x; x \in \Omega, g(x) = g(x_0)\}$  vale l'identità

$$(1.27) \quad c^2(x_0) = \sum_{i,j=1}^n |\delta_i \nu_j(x_0)|^2.$$

DIM. Grazie al Lemma 1 possiamo supporre che  $g$  verifichi le

$$(1.28) \quad D_i g(x_0) = 0, \quad \text{per} \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$(1.29) \quad D_n g(x_0) = |Dg(x_0)|,$$

$$(1.30) \quad D_i D_j g(x_0) = 0, \quad \text{per} \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n-1.$$

Si ha allora facilmente

$$(1.31) \quad c^2(x_0) = \sum_{i=1}^{n-1} |D_i D_i g(x_0)|^2 \cdot |Dg(x_0)|^{-2}.$$

Per quanto riguarda i  $\delta_i \nu_j(x_0)$  si ha, essendo  $\nu_n(x_0) = 1$  e quindi  $x_0$  punto di massimo per  $\nu_n$ ,

$$(1.32) \quad \delta_i \nu_n(x_0) = 0, \quad \text{per} \quad i = 1, \dots, n,$$

da cui si ha anche, per la Proposizione 2,

$$(1.33) \quad \delta_n \nu_i(x_0) = 0, \quad \text{per} \quad i = 1, \dots, n.$$

D'altra parte, per  $i, j < n$ , dalle (1.28) si ha

$$(1.34) \quad \delta_i \nu_j(x_0) = D_i \nu_j(x_0),$$

$$(1.35) \quad D_i \nu_j(x_0) = \frac{D_i D_j g(x_0)}{|Dg(x_0)|}$$

e quindi

$$(1.36) \quad \delta_i \nu_j(x_0) = D_i D_j g(x_0) \cdot |Dg(x_0)|^{-1}, \quad \text{per} \quad i, j < n.$$

Dalle (1.30), (1.32), (1.33) e (1.36) si ha finalmente

$$(1.37) \quad \sum_{i,j=1}^n |\delta_i \nu_j(x_0)|^2 = \sum_{i=1}^{n-1} |D_i D_i g(x_0)|^2 \cdot |Dg(x_0)|^{-2},$$

da cui, tenuto conto della (1.31), si ha l'asserto.

c. v. d.

2. Supponiamo ora che  $g$  verifichi l'equazione

$$(2.1) \quad \sum_{i=1}^n D_i \frac{D_i g}{|Dg|} = 0.$$

ovvero l'equazione di Eulero del problema di minimo per l'integrale

$$\int_{\Omega} |Dg(x)| dx.$$

Con le notazioni del n. 1 l'equazione (2.1) può scriversi nella forma equivalente

$$(2.2) \quad \sum_{i=1}^n \delta_i \nu_i = 0.$$

L'equivalenza delle (2.1) e (2.2) insieme con la Proposizione 1 mostra come la stazionarietà dell'integrale del gradiente di una funzione si riduca ad una proprietà delle ipersuperfici di livello della funzione stessa. Vale precisamente il

**TEOREMA 2.** *Sia  $\Omega \subset R^n$  ( $n > 1$ ) aperto e  $g \in C^2(\Omega)$  con  $Dg(x) \neq 0 \forall x \in \Omega$ . Allora  $g$  verifica l'equazione (2.1) se e solo se per ogni  $x_0 \in \Omega$  la ipersuperficie  $\{x; x \in \Omega, g(x) = g(x_0)\}$  è minimale <sup>(1)</sup>.*

**DIM.** Fissato  $x_0 \in \Omega$  esiste  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), un aperto  $I \subset R$ , un aperto  $A \subset R^{n-1}$ , una funzione  $f: A \rightarrow I$  di classe  $C^2$  tali che

$$(2.3) \quad \Omega_0 = \{x; x_i \in I, (\widehat{x_1}, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n) \in A\} \subset \Omega,$$

$$(2.4) \quad \{x; x \in \Omega_0, g(x) = g(x_0)\} = \\ = \{x; x_i = f(\widehat{x_1}, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n), (\widehat{x_1}, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n) \in A\}.$$

---

<sup>(1)</sup> Per ipersuperficie minimale si intenda una ipersuperficie che localmente può essere rappresentata mediante una funzione soluzione dell'equazione delle ipersuperfici di area minima.

Indicata con  $\tilde{g}: \Omega_0 \rightarrow R$  l'applicazione definita da

$$(2.5) \quad \tilde{g}(x) = x_i - f(x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n),$$

si ha, grazie alla Proposizione 1 e con ovvio significato delle notazioni,

$$(2.6) \quad \tilde{\delta}_i \tilde{\nu}_j(x_0) = \delta_i \nu_j(x_0), \quad \text{per} \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Quindi, per la (2.2), si ha

$$(2.7) \quad \sum_{i=1}^n \tilde{\delta}_i \tilde{\nu}_i(x_0) = 0.$$

ovvero

$$(2.8) \quad \sum_{i=1}^n D_i \frac{D_i \tilde{g}}{|D\tilde{g}|}(x_0) = 0.$$

Basta infine osservare che la (2.8) con la sostituzione (2.5) si trasforma nella equazione delle ipersuperfici di area minima.

c. v. d.

Dal Teorema 2 e da un classico risultato di Hopf [5] si ha che le ipersuperfici di livello delle funzioni soluzioni di (2.1) sono analitiche. Ricordando la Proposizione 1 possiamo allora applicare a (2.2) l'operatore  $\delta_h$  e tenendo conto della (1.11) si ha

$$(2.9) \quad 0 = \sum_{i=1}^n \delta_h \delta_i \nu_i = \sum_{i=1}^n \delta_i \delta_h \nu_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\nu_h \delta_i \nu_j - \nu_i \delta_h \nu_j) \delta_j \nu_i,$$

ovvero anche, tenuto conto delle (1.9) e (1.10),

$$(2.10) \quad \sum_{i=1}^n \delta_i \delta_i \nu_h + \sum_{i,j=1}^n (\delta_i \nu_j)^2 \nu_h = 0, \quad \text{per} \quad h = 1, \dots, n.$$

Dove ricordiamo che  $\sum_{i,j=1}^n (\delta_i \nu_j)^2$  è la somma dei quadrati delle curvature principali delle ipersuperfici di livello, mentre, come si può verificare (v. formula (23) pag. 85 di [6]), l'operatore  $\sum_{i=1}^n \delta_i \delta_i$ , valendo la (2.2), coincide con l'operatore di Laplace-Beltrami della ipersuperficie.

3. Sia  $A \subset R^m$  ( $m > 1$ ) aperto e  $f \in C^2(A)$  verifichi l'equazione delle ipersuperfici di area minima, ovvero

$$(3.1) \quad \sum_{i=1}^m D_i \frac{D_i f}{\sqrt{1 + |Df|^2}} = 0.$$

Dai risultati stabiliti in [7], [8], [9] e [10] si ricava il seguente

**TEOREMA 3.** *Sia  $A \subset R^m$  ( $m > 1$ ) aperto e  $f \in C^2(A)$  verifichi l'equazione (3.1). Allora per ogni  $x_0 \in A$  e per ogni  $\varrho < \text{dist}(x, \partial A)$  si ha*

$$(3.2) \quad \int_{\{x; |x-x_0|^2 + |f(x)-f(x_0)|^2 \leq \varrho^2\}} \sqrt{1 + |Df(x)|^2} dx \leq \frac{m+1}{2} \omega_{m+1} \varrho^m \cdot (2)$$

**DIM.** Il problema di minimo per l'integrale  $\int_{\{x; |x-x_0| \leq \varrho\}} \sqrt{1 + |Dg(x)|^2} dx$  nella classe delle funzioni lipschitziane e verificanti

$$(3.3) \quad g(x) = f(x), \quad \text{per} \quad |x - x_0| = \varrho,$$

ha soluzione, come è stato provato in [7] (v. Teor. 1.2 e Prop. 6.2), e tale soluzione, grazie al teorema di regolarizzazione di De Giorgi [11] (cfr. anche Stampacchia [12]) e ad un risultato di Morrey (v. Teor. 9.2 di [13]), è di classe  $C^2$  e quindi verifica l'equazione (3.1) in  $\{x; |x - x_0| < \varrho\}$ . Poichè per la (3.1) vale il teorema di unicità avremo allora che la  $f$  stessa è la soluzione del problema di minimo considerato. Grazie allora al Lemma 5.1 di [7] la ipersuperficie  $\{(x, f(x)); |x - x_0| \leq \varrho\}$  avrà area minima fra tutte le ipersuperfici continue  $\{(x, g(x)); |x - x_0| \leq \varrho\}$  tali che  $g(x) = f(x)$  per  $|x - x_0| = \varrho$ , e quindi per la Proposizione 2.3 di [8] l'insieme  $E = \{(x, y); |x - x_0| < \varrho, y < f(x)\}$  ha frontiera orientata localmente di misura minima. Vale allora, per la formula (3.11) di [9],

$$(3.4) \quad \int_{\{(x, y); |x-x_0|^2 + |y-f(x_0)|^2 \leq \varrho^2\}} |D\varphi(x, y; E)| \leq \frac{m+1}{2} \omega_{m+1} \cdot \varrho^m,$$

---

(2)  $\omega_{m+1}$  è la misura della sfera unitaria di  $R^{m+1}$ .

da cui, grazie alla Proposizione 1.9 e al Teorema 1.8 di [10] si ha l'asserto.

c. v. d.

Indichiamo con  $g$  la funzione definita in  $A \times R$  da

$$(3.5) \quad g(x, y) = y - f(x), \quad \text{per} \quad x \in A \quad \text{e} \quad y \in R.$$

La  $g$  verifica l'equazione (2.1) (v. Teorema 2) e quindi, indicata con  $c^2$  la somma dei quadrati delle curvature principali della ipersuperficie  $\{(x, f(x)); x \in A\}$  si ha, dalla (2.10) e dal Teorema 1,

$$(3.6) \quad \sum_{i=1}^{m+1} \delta_i \delta_i v_h + c^2 v_h = 0, \quad \text{per} \quad h = 1, \dots, m+1.$$

Essendo  $v_{m+1} = (1 + |Df|^2)^{-\frac{1}{2}} > 0$  possiamo porre  $w = -\log v_{m+1}$  e dalla (3.6) discende allora

$$(3.7) \quad \sum_{i=1}^{m+1} \delta_i \delta_i w - \sum_{i=1}^{m+1} (\delta_i w)^2 - c^2 = 0.$$

4. Dalla (3.7) dedurremo ora la disuguaglianza annunciata per le curvature delle ipersuperfici di area minima. Per fare questo cominciamo col provare due lemmi.

LEMMA 2. Sia  $A \subset R^m$  ( $m > 1$ ) aperto e  $f \in C^2(A)$  verifichi la

(3.1). Allora per ogni  $\alpha \in C_0^1(A \times R)$  <sup>(3)</sup> si ha

$$(4.1) \quad \int_S \delta_i \alpha dH_m = 0, \quad \text{per} \quad i = 1, \dots, m+1,$$

dove  $S = \{(x, f(x)); x \in A\}$ ,  $H_m$  è la misura di Hausdorff  $m$ -dimensionale in  $R^{m+1}$  e  $\delta_i$  sono gli operatori associati alla funzione  $g(x, y) = y - f(x)$ .

<sup>(3)</sup>  $C_0^1(A \times R)$  è l'insieme delle funzioni reali di classe  $C^1$  a supporto compatto contenuto in  $A \times R$ .

Dim. Sia  $\tilde{\alpha}: A \times R \rightarrow R$  definita da

$$(4.2) \quad \tilde{\alpha}(x, y) = \alpha(x, f(x)).$$

Si ha ovviamente  $\alpha \in C_0^1(A \times R)$  e, per la Proposizione 1,

$$(4.3) \quad \int_S \delta_i \tilde{\alpha} dH_m = \int_S \delta_i \tilde{\alpha} dH_m, \quad \text{per } i = 1, \dots, m+1.$$

Essendo  $D_{m+1} \tilde{\alpha} = 0$  si ha

$$(4.4) \quad \delta_i \tilde{\alpha} = D_i \tilde{\alpha} - \nu_i \sum_{h=1}^m \nu_h D_h \tilde{\alpha}, \quad \text{per } i \leq m,$$

$$(4.5) \quad \delta_{m+1} \tilde{\alpha} = - \nu_{m+1} \sum_{h=1}^m \nu_h D_h \tilde{\alpha}.$$

Dalla (4.4) si ricava

$$(4.6) \quad \int_S \delta_i \tilde{\alpha} dH_m = \int_A (D_i \tilde{\alpha} - \nu_i \sum_{h=1}^m \nu_h D_h \tilde{\alpha}) \sqrt{1 + |Df|^2} dx, \quad \text{per } i \leq m,$$

e quindi, dalla formula di Green,

$$(4.7) \quad \int_S \delta_i \tilde{\alpha} dH_m = - \int_S \tilde{\alpha} \left\{ D_i \sqrt{1 + |Df|^2} - \sum_{h=1}^m D_h (\nu_h \nu_i \sqrt{1 + |Df|^2}) \right\} dx.$$

Tenuto conto della (3.1) si ha

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \sum_{h=1}^m D_h (\nu_h \nu_i \sqrt{1 + |Df|^2}) &= \\ &= \nu_i \sum_{h=1}^m \nu_h D_h \sqrt{1 + |Df|^2} + \sqrt{1 + |Df|^2} \sum_{h=1}^m \nu_h D_h \nu_i, \end{aligned}$$

e quindi

$$(4.9) \quad \begin{aligned} D_i \sqrt{1 + |Df|^2} - \sum_{h=1}^m D_h (\nu_h \nu_i \sqrt{1 + |Df|^2}) &= \\ &= \delta_i \sqrt{1 + |Df|^2} + (1 + |Df|^2) \delta_{m+1} \nu_i. \end{aligned}$$

Poichè è  $\sqrt{1 + |Df|^2} = \nu_{m+1}^{-1}$ , si ha

$$(4.10) \quad \delta_i \sqrt{1 + |Df|^2} = -\nu_{m+1}^{-2} \delta_i \nu_{m+1} = -(1 + |Df|^2) \delta_i \nu_{m+1}.$$

Dalle (4.9) e (4.10), ricordando la Proposizione 2, si ha

$$(4.11) \quad D_i \sqrt{1 + |Df|^2} - \sum_{h=1}^m D_h (\nu_h \nu_i \sqrt{1 + |Df|^2}) = 0,$$

e quindi da (4.11), (4.7) e (4.3) si ha l'asserto per  $i \leq m$ .

Analogamente partendo da (4.5) si ha l'asserto per  $i = m+1$ .

c. v. d.

**LEMMA 3.** *Per ogni intero  $m > 1$  esiste una costante  $\gamma(m)$  tale che: se  $A \subset \mathbb{R}^m$  è aperto e  $f \in C^2(A)$  verifica la (3.1), se  $w \in C^2(A \times \mathbb{R})$  verifica*

$$(4.12) \quad \sum_{i=1}^{m+1} \delta_i \delta_i w \geq \sum_{i=1}^{m+1} (\delta_i w)^2, \quad \text{su } S = \{(x, f(x)); x \in A\},$$

allora per ogni  $x_0 \in A$  e  $\varrho < d = \text{dist}(x_0, \partial A)$  si ha

$$(4.13) \quad \int_{S_\varrho(x_0)} \sum_{i=1}^{m+1} (\delta_i w)^2 dH_m \leq \gamma(m) \left( \frac{d}{d - \varrho} \right)^2 \varrho^{m-2},$$

dove  $S_\varrho(x_0) = \{(x, f(x)); |x - x_0|^2 + |f(x) - f(x_0)|^2 \leq \varrho^2\}$ .

**DIM.** Supponiamo  $x_0 = 0$ ,  $f(x_0) = 0$  e scriviamo  $S_\varrho$  per  $S_\varrho(0)$ .

Fissati  $t$  ( $0 < t < d$ ) e una successione infinitesima di numeri positivi  $\{\varepsilon_k\}$ , indichiamo con  $\{\psi_k\}$  una successione di funzioni di  $C^1(A \times \mathbb{R})$  tali che

$$(4.14) \quad 0 \leq \psi_k \leq 1, \text{ in } A \times \mathbb{R},$$

$$(4.15) \quad \psi_k(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{per } x \in A, y \in \mathbb{R}, |x|^2 + y^2 < t^2 \\ 0, & \text{per } x \in A, y \in \mathbb{R}, |x|^2 + y^2 > (t + \varepsilon_k)^2, \end{cases}$$

$$(4.16) \quad |D\psi_k| \leq (1 + \varepsilon_k) \varepsilon_k^{-1}, \text{ in } A \times \mathbb{R}.$$

Avremo allora

$$(4.17) \quad \int_{S_t}^{\sum_{i=1}^{m+1} \delta_i \delta_i w dH_m} \leq \min \lim_{h \rightarrow \infty} \int_S^{\sum_{i=1}^{m+1} \psi_h \delta_i \delta_i w dH_m},$$

D'altra parte per il Lemma 2 si ha

$$(4.18) \quad \int_S^{\sum_{i=1}^{m+1} \delta_i \delta_i w dH_m} = - \int_S^{\sum_{i=1}^{m+1} \delta_i \psi_h \delta_i w dH_m},$$

ovvero anche, per la (4.15),

$$(4.19) \quad \int_S^{\sum_{i=1}^{m+1} \delta_i \delta_i w dH_m} = - \int_{S_{t+\varepsilon_h}-S_t}^{\sum_{i=1}^{m+1} \delta_i \psi_h \delta_i w dH_h}.$$

Per la diseguaglianza di Schwarz e per la (4.16) si ha allora

$$(4.20) \quad \int_S^{\sum_{i=1}^{m+1} \delta_i \delta_i w dH_m} \leq \\ \leq (1 + \varepsilon_h) \sqrt{\varepsilon_h^{-1} \int_{S_{t+\varepsilon_h}-S_t}^{\sum_{i=1}^{m+1} (\delta_i w)^2 dH_m}} \sqrt{\varepsilon_h^{-1} H_m(S_{t+\varepsilon_h} - S_t)}.$$

Posto allora  $M(t) = H_m(S_t)$  e  $N(t) = \int_{S_t}^{\sum_{i=1}^{m+1} (\delta_i w)^2 dH_m}$ , dalle (4.20),

(4.17) e (4.12) si ricava, per quasi tutti i  $t$  ( $0 < t < d$ )

$$(4.21) \quad N(t) \leq \sqrt{M'(t) N'(t)},$$

ovvero, supponendo  $N(\varrho) > 0$ ,

$$(4.22) \quad \frac{1}{M'(t)} \leq \left( \frac{-1}{N(t)} \right), \text{ per quasi tutti i } t (\varrho < t < d).$$

Integrando la (4.22) fra  $\varrho$  e  $\sigma$  ( $\varrho < \sigma < d$ ) e applicando al primo membro la disuguaglianza di Schwarz si ha

$$(4.23) \quad \frac{(\sigma - \varrho)^2}{M(\sigma) - M(\varrho)} \leq \frac{1}{N(\varrho)} - \frac{1}{N(\sigma)},$$

e quindi anche

$$(4.24) \quad N(\varrho) \leq \frac{M(\sigma)}{(\sigma - \varrho)^2}, \quad \text{per } \forall \sigma (\varrho < \sigma < d).$$

Dalla (4.24) e dal Teorema 3 si ricava

$$(4.25) \quad N(\varrho) \leq \frac{m+1}{2} \omega_{m+1} \frac{\sigma^m}{(\sigma - \varrho)^2}, \quad \text{per } \forall \sigma (\varrho < \sigma < d).$$

Nel caso  $m = 2$  la (4.25) è proprio quanto cercavamo con  $\gamma(2) = \frac{3}{2} \omega_3$ . Per  $m > 2$  si osservi che la funzione  $\sigma^m (\sigma - \varrho)^{-2}$  nell'intervallo  $(\varrho, +\infty)$  ha minimo nel punto  $\frac{m}{m-2} \varrho$ . Quindi dalla (4.25) si ricava

$$(4.26) \quad N(\varrho) \leq \frac{m+1}{2} \omega_{m+1} \frac{m^m}{(m-2)^{m-2}} \frac{\varrho^{m-2}}{2^2}, \quad \text{se } d \geq \frac{m}{m-2} \varrho,$$

$$(4.27) \quad N(\varrho) \leq \frac{m+1}{2} \omega_{m+1} \frac{m^m}{(m-2)^{m-2}} \left( \frac{d}{d-\varrho} \right)^2 \frac{\varrho^{m-2}}{m^2}, \quad \text{se } d < \frac{m}{m-2} \varrho.$$

Dalle (4.26) e (4.27) segue che vale l'asserto con

$$\gamma(m) = \frac{m+1}{2} \omega_{m+1} \frac{m^m}{(m-2)^{m-2}} \cdot \frac{1}{2^2}, \quad \text{per } m > 2.$$

c. v. d.

Possiamo finalmente provare il

**TEOREMA 4.** *Per ogni intero  $m > 1$  esiste una costante  $k(m)$  tale che: se  $A \subset R^m$  è aperto e  $f \in C^2(A)$  è soluzione della equazione delle ipersuperfici di area minima, allora per ogni  $x_0 \in A$  e  $\varrho < d =$*

$= \text{dist}(x_0, \partial A)$  vale la diseguaglianza

$$(4.28) \quad \int_{S_\varrho(x_0)} c^2 dH_m \leq k(m) \left( \frac{d}{d-\varrho} \right)^2 \varrho^{m-2},$$

dove  $c^2$  è la somma dei quadrati delle curvature principali della iper-superficie  $S = \{(x, f(x)); x \in A\}$  e

$$S_\varrho(x_0) = \{(x, f(x)); |x - x_0|^2 + |f(x) - f(x_0)|^2 \leq \varrho^2\}.$$

DIM. Poniamo

$$(4.29) \quad w(x, y) = \log \sqrt{1 + |Df(x)|^2}, \text{ per } x \in A \text{ e } y \in R.$$

Per quanto già osservato nel n. 2  $w$  risulta analitica in  $A \times R$  e grazie alla (3.7) vale

$$(4.30) \quad c^2 \leq \sum_{i=1}^{m+1} \delta_i \delta_i w, \text{ su } S.$$

Fissati  $\varrho, \sigma$  ( $\varrho < \sigma < d$ ) indichiamo con  $\{\psi_h\}$  una successione di funzioni di  $C^1(A \times R)$  tali che

$$(4.31) \quad 0 \leq \psi_h \leq 1, \text{ in } A \times R,$$

$$(4.32) \quad \psi_h(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{per } x \in A, y \in R, |x - x_0|^2 + |y - f(x_0)|^2 < \varrho^2 \\ 0, & \text{per } x \in A, y \in R, |x - x_0|^2 + |y - f(x_0)|^2 > \sigma^2 \end{cases},$$

$$(4.33) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \max_{A \times R} |D\psi_h| = (\sigma - \varrho)^{-1}.$$

Dalla (4.30) e dal Lemma 2 si ha

$$(4.34) \quad \int_S \psi_h c^2 dH_m \leq - \int_S \sum_{i=1}^{m+1} \delta_i w \delta_i \psi_h dH_m,$$

e quindi anche, per la diseguaglianza di Schwarz e la (4.32),

$$(4.35) \quad \int_{S_{\varrho}(x_0)} c^2 dH_m \leq \max_{A \times R} |D\psi_h| \sqrt{\int_{\tilde{S}_{\sigma}(x_0)} \sum_{i=1}^{m+1} (\delta_i w)^2 dH_m} \cdot \sqrt{H_m(S_{\sigma}(x_0))}.$$

Facendo tendere  $h \rightarrow \infty$  e tenendo presente la (4.33) si ha

$$(4.36) \quad \int_{S_{\varrho}(x_0)} c^2 dH_m \leq (\sigma - \varrho)^{-1} \sqrt{\int_{\tilde{S}_{\sigma}(x_0)} \sum_{i=1}^{m+1} (\delta_i w)^2 dH_m} \sqrt{H_m(S_{\sigma}(x_0))}.$$

Dal Lemma 3 si ha, per ogni  $\tau$  ( $\sigma < \tau < d$ ),

$$(4.37) \quad \int_{\tilde{S}_{\sigma}(x_0)} \sum_{i=1}^{m+1} (\delta_i w)^2 dH_m \leq \gamma(m) \left( \frac{\tau}{\tau - \sigma} \right)^2 \sigma^{m-2},$$

e quindi, ricordando il Teorema 3, dalla (4.36) si ricava

$$(4.38) \quad \int_{S_{\varrho}(x_0)} c^2 dH_m \leq \sqrt{\gamma(m) \frac{m+1}{2} \omega_{m+1}} \cdot \frac{\tau \cdot \sigma^{m-1}}{(\tau - \sigma)(\sigma - \varrho)},$$

$$\forall \sigma, \tau (\varrho < \sigma < \tau < d).$$

Se si scelgono  $\sigma, \tau$  in modo che  $\sigma - \varrho = \tau - \sigma$ , da (4.38) si ha

$$(4.39) \quad \int_{S_{\varrho}(x_0)} c^2 dH_m \leq 4 \sqrt{\gamma(m) \frac{m+1}{2} \omega_{m+1}} \cdot \frac{\tau^m}{(\tau - \varrho)^2}, \quad \forall \tau (\varrho < \tau < d).$$

Dalla (4.39) segue l'asserto ripetendo il ragionamento della dimostrazione del Lemma 3 a partire dalla formula (4.25).

c. v. d.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] HEINZ, E.: « *Über die Lösungen der Minimalflächengleichung* ». Nachr. Ak. Wiss., Göttingen, Math. Phys. Kl., 1952.
- [2] HOPF, E.: « *On an inequality for minimal surfaces  $z = z(x, y)$*  ». J. Rat. Mech. Anal., 1953.
- [3] OSSERMANN, R.: « *On the Gauss curvature of minimal surfaces* ». Trans. A.M.S., 1960.
- [4] FINN, R. OSSERMANN R.: « *On the Gauss curvature of the non-parametric minimal surfaces* ». J. Anal. Math., 1964.
- [5] HOPF, E.: « *Über den Funktionalen, insbesondere den analytischen Charakter der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen* ». Math. Zeit., 1932.
- [6] BIANCHI, L.: « *Lezioni di geometria differenziale* », vol. I. III ediz., Pisa 1922.
- [7] MIRANDA, M.: « *Un teorema di esistenza e unicità per il problema dell'area minima in  $n$  variabili* ». Ann. Sc. Norm. Sup., 1965.
- [8] MIRANDA, M.: « *Analiticità delle superfici di area minima in  $R^4$*  ». Rend. Acc. Naz. Lincei, 1965.
- [9] MIRANDA, M.: « *Sul minimo dell'integrale del gradiente di una funzione* ». Ann. Sc. Norm. Sup., 1965.
- [10] MIRANDA, M.: « *Superfici cartesiane generalizzate ed insiemi di perimetro localmente finito sui prodotti cartesiani* ». Ann. Sc. Norm. Sup., 1964.
- [11] DE GIORGI, E.: « *Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari* ». Mem. Acc. Sc., 1957.
- [12] STAMPACCHIA, G.: « *On some regular multiple integral problems in the calculus of variations* ». Comm. P.A.M., 1963.
- [13] MORREY, C. B.: « *Second order elliptic systems of differential equations* ». Ann. Math. Stud., Princeton, 1954.

Manoscritto pervenuto in redazione il 10 luglio 1966.