

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

C. BARDOS

**Approximation semi discrète de la solution d'une
équation variationnelle, astreinte à vérifier des
conditions aux limites dépendant du temps**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 38 (1967), p. 41-59

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__38__41_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

APPROXIMATION SEMI DISCRETE DE LA SOLUTION D'UNE EQUATION VARIATIONELLE, ASTREINTE A VERIFIER DES CONDITIONS AUX LIMITES DEPENDANT DU TEMPS

C. BARDOS *) **)

I. Le problème exact.

Soient deux espaces de Hilbert K et H ; on notera $(,)_K, | \cdot |_K$ (resp. $(,)_H, | \cdot |_H$) le produit scalaire et la norme dans K (resp. dans H). K et H vérifient:

(1,1) $K \subset H$ algébriquement et topologiquement; K est dense dans H . K est séparable (ce qui entraîne que H est séparable). L'injection de K dans H est compacte.

On se donne une famille $V(t)_{t \in [T_0, T_1]}$ d'espaces de Hilbert dépendant du paramètre t variable dans l'intervalle $[T_0, T_1]$ ($-\infty \leq T_0 < T_1 \leq +\infty$) et on suppose que:

(1,2) pour tout $t \in [T_0, T_1]$ $V(t)$ est un sous espace vectoriel fermé de K dense dans H .

(1,3) La famille $\{V(t)\}$ dépend mesurablement de t c'est à dire que si on note $P(t)$ la projection de K sur $V(t)$, pour tout $k \in K$, l'application $t \rightarrow P(t)k$ de $[T_0, T_1]$ dans K est mesurable.

*) Indirizzo dell'A.: 11 rue Laromiguière, Paris, 5.

**) Attaché de Recherches au C. N. R. S.

On considère $L^2(T_0, T_1; V(t))$ défini par $L^2(T_0, T_1; V(t)) = \{v(t), v(t) \in L^2(T_0, T_1; K) \mid v(t) \in V(t) \text{ pour presque tout } t \in [T_0, T_1]\}$. $L^2(T_0, T_1; V(t))$ est un sous espace fermé de $L^2(T_0, T_1; K)$ c'est donc un espace de Hilbert pour la norme induite par $L^2(T_0, T_1; K)$.

On désigne par $\Phi(T_0, T_1; V(t))$ le sous espace de $L^2(T_0, T_1; V(t))$ défini par : $\Phi(T_0, T_1; V(t)) = \{\varphi(t) \in L^2(T_0, T_1; V(t)), \varphi'(t) \in L^2(T_0, T_1; H) \mid \varphi(T_1) = 0\}$.

On se donne pour tout $t \in [T_0, T_1]$ une forme $a(t; u, v)$ sesquiliénaire continue sur K , telle que :

(1,4) Pour tout couple u, v d'éléments de K la fonction $t \rightarrow a(t; u, v)$ est mesurable.

(1,5) Il existe une constante M telle que pour tout couple d'éléments de K et pour tout $t \in [T_0, T_1]$ on ait :

$$|a(t; u, v)| \leq M |u|_{K'} |v|_K.$$

(1,6) Il existe $\alpha > 0$ indépendante de t telle que pour tout $u \in K$ et tout $t \in [T_0, T_1]$ on ait :

$$\operatorname{Re} a(t; u, v) \geq \alpha |u|_K^2.$$

On sait d'après [1] que la condition (1,4) entraîne la mesurabilité (et la condition (1,5) la sommabilité) de la fonction $t \rightarrow a(t; u(t), v(t))$ pour tout couple $u(t), v(t)$ d'éléments de $L^2(T_0, T_1; V(t))$.

On pose alors le problème suivant :

PROBLÈME I.1.

Soit $u_0 \in H$ arbitraire (si $T_0 = -\infty$ on prend $u_0 = 0$) et $f \in L^2(T_0, T_1; K)'$ trouver u vérifiant pour tout $\varphi \in \Phi(T_0, T_1; V(t))$:

$$(1.7) \quad \int_{T_0}^{T_1} [a(t; u(t), \varphi(t)) - (u(t), \varphi(t))_H] dt = (u_0, \varphi(T_0))_H \\ + \int_{T_0}^{T_1} \langle f(t), \varphi(t) \rangle_{K', K} dt.$$

On sait d'après [6] que le problème I.1 admet toujours au moins une solution.

Soit V un sous espace fermé de K dense dans H , V' son dual, puisque V est dense dans H , H s'identifie à un sous espace dense de V' ; puisque V est fermé dans K V' s'identifie à un sous espace fermé de K' . Grâce à la première identification, on sait d'après [7] (théorème 4.1 chap. III) que $[V, V']_{1/2} = H$.

On suppose alors

(1,8) Il existe un sous espace fermé de K dense dans H , V , tel que $V \subset V(t)$ pour tout $t \in [T_0, T_1]$ et que $[K, V']_{1/2} = H$.

Pour t réel quelconque on pose $V^*(t) = V(t)$ si $t \in [T_0, T_1]$ et $V^*(t) = V$ si $t \notin [T_0, T_1]$. On désigne par $H^{1/2}(H)$ l'espace $H^{1/2}(-\infty, +\infty; H)$ et on suppose que parmi les sous espaces vérifiant (1,8) il en existe un, toujours noté V tel que :

(1,9) $\Phi(-\infty, +\infty; V^*(t))$ est dense dans $L^2(-\infty, +\infty; V^*(t)) \cap H^{1/2}(H)$.

Baiocchi montre dans [2] (théorème 5,2) que sous les hypothèses (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (1,8), (1,9) la solution du problème I.1 est unique et dépend continuellement des données dans le sens suivant :

$$(1,10) \quad \|u\|_{L^2(T_0, T_1; V(t))} \leq C(f_{L^2(T_0, T_1; K)} + \|u_0\|_H)$$

REMARQUE.

L'hypothèse (1,8) sera explicitement utilisée dans la suite alors que l'hypothèse (1,9) pourra être remplacée par l'hypothèse abstraite plus forte ; « la solution du problème I.1 est unique ».

II. Approximation en la variable de temps.

On suppose que $T_0 = 0$ et que $T_1 = T$ est fini, pour tout entier m on pose $k = T/m$ et on se donne une suite $V_k(q)$, $0 \leq q \leq m-1$ de sous espaces fermés de K contenant V .

On sait que si la fonction $u(t)$ est mesurable il en est de même de la fonction $P(t)u(t)$ [2]. On note alors P l'application de $L^2(0, T; K)$ dans $L^2(0, T; V(t))$ définie par $P(u(t)) = P(t) \cdot u(t)$. On a bien entendu $|P| \leq 1$. De même on note $P_k(q)$ la projection de K sur le sous espace $V_k(q)$ et $P_k(q)$ l'endomorphisme de $L^2(0, T; K)$ défini par

$$P_k \cdot u(t) = P_k(q) \cdot u(t) \text{ pour tout } t \in [qk, (q+1)k].$$

Enfin on désigne par $L^2(0, T; V_k)$ le sous espace vectoriel des fonctions u constantes sur tout intervalle de la forme $[qk, (q+1)k]$. (on note $u(q)$ la valeur de la fonction u sur l'intervalle $[qk, (q+1)k]$ vérifiant $u(q) \in V_k(q)$).

On dira que la famille $V_k(q)$ est consistante à la famille $V(t)$ si :

(2,1) Pour tout $u(t) \in L^2(0, T; K)$ on a :

$$\lim_{k \rightarrow 0} |P \cdot u(t) - P_k \cdot u(t)|_{L^2(0, T; K)} = 0$$

Et si :

Pour toute fonction $\varphi \in \Phi(0, T; V(t))$, on peut trouver une suite $\varphi_k, \varphi_k \in L^2(0, T; V_k)$ vérifiant :

(2,2) φ_k tend vers φ dans $L^2(0, T; K)$; $\varphi_k(0)$ (resp. $\varphi_k(T-k)$) tend vers $\varphi(0)$ (resp. $\varphi(T)=0$) dans H lorsque k tend vers zero.

(2,3) $\nabla \varphi_k$ ⁽¹⁾ est borné dans $L^2(0, T-k; K)$ indépendamment de k .

On remarque alors que la conjonction de (2,2) et de (2,3) entraîne que pour tout $u \in L^2(0, T; H)$ on a :

$$\lim_{k \rightarrow 0} \int_0^{T-k} (u(t), \nabla \varphi_k(t))_H dt = \int_0^T (u, \varphi')_H dt.$$

¹⁾ Comme d'habitude pour toute fonction u définie sur $[T_0, T_1]$, ∇u (resp. $\bar{\nabla} u$) désigne la fonction définie sur $[T_0, T_1 - k]$ (resp $[k, T_1]$) par la relation :

$$\nabla u = \frac{1}{k} [u(t+k) - u(t)] \left(\text{resp. } \bar{\nabla} u = \frac{1}{k} [u(t) - u(t-k)] \right).$$

On définit alors pour tout $t \in [0, T]$ la forme sesquilinéaire $a_k(t; u, v)$ et l'élément $f_k(t)$ de K' par les relations

$$(2,4) \quad a_k(t; u, v) = 1/k \int_{qk}^{(q+1)k} a(t; u, v) dt$$

$$(2,5) \quad \langle f_k(t), v \rangle_{K', K} = 1/k \int_{qk}^{(q+1)k} \langle f(t), v \rangle_{K', K} dt$$

pour t appartenant à l'intervalle $[qk, (q+1)k[$.

Enfin on se donne une suite d'éléments de H , u_{k0} , vérifiant l'assertion :

(2,6) $u_{k0} \in V_k(0)$ et la suite u_{k0} tend vers u_0 dans H lorsque k tend vers 0 ce qui est possible car $V_k(0)$ est dense dans H .

on pose alors le problème approché suivant :

PROBLÈME II.1

Trouver une fonction $u_k \in L^2(0, T; V_k)$ vérifiant

$$(2,7) \quad u_k(q) \in V_k(q) \text{ pour tout } q; 0 \leq q \leq m-1$$

$$(2,8) \quad u_k(0) = u_{k0}$$

$$(2,9) \quad (\bar{V} u_k(q), v)_H + a_k(q; u_k(q), v) = (f_k(q), v)_{K', K}$$

pour tout $v \in V_k(q)$ et tout $q, 1 \leq q \leq m-1$.

PROPOSITION II.1

Le problème II.1 admet une unique solution.

En effet en écrivant (2,9) sous la forme :

$$(2,10) \quad (u_k(q), v)_H + k \cdot a_k(q; u_k(q), v) = \langle k \cdot f_k(q) + u_k(q-1), v \rangle_{K'K}$$

on voit que le second membre est une forme linéaire continue en $v \in V_k(q)$; quant au premier c'est une forme sesquilinéaire en $u_k(q), v$,

vérifiant pour tout élément v de $V_k(q)$:

$$(2,11) \quad \operatorname{Re}(v, v) + k \cdot a_k(q; v, v) \geq k \cdot \alpha |v|_{V_k(q)}^2$$

$u_k(q)$ est ainsi déterminé de manière unique à partir de $u_k(q-1)$.
et on a le

THÉORÈME II.1

Sous les hypothèses (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (1,8), (1,9) (l'hypothèse (1,9) pouvant être remplacée par l'hypothèse plus forte : « la solution du problème exact est unique » si la famille $V_k(q)$ est consistante à la famille $V(t)$ la suite $u_k(t)$ tend vers l'unique solution du problème I.1 au sens de $L^2(0, T; H)$), lorsque k tend vers zéro.

On désigne par $\mathcal{F}(V_k^*)$ le sous espace de $\mathcal{F}(-\infty, +\infty; K)$ des fonctions $v(t)$ vérifiant :

$$(2,12) \quad v(t) \text{ est constante sur tout intervalle de la forme } [qk, (q+1)k] \\ -\infty \leq q \leq +\infty \text{ (on note } v(q) \text{ la valeur de la fonction } v(t) \\ \text{sur un tel intervalle)}$$

$$(2,13) \quad v(t)|_{[0, T]} \in L^2(0, T; V_k) \text{ et } v(t) \in V \text{ pour } t \notin [0, T].$$

Pour la démonstration du théorème II.1 on commence par prolonger $u_k(t)$ en une fonction $u_k(t) \in \mathcal{F}(V_k^*)$.

Prolongement de $u_k(t)$.

Pour $m \leq q$ on définit la fonction $u_k(t)$ par les relations

$$(2,14) \quad (\bar{V} u_k(q), v)_H + (u_k(q), v)_V = 0$$

pour tout v de V et tout $q, m \leq q$.

(On voit que, compte tenu de l'hypothèse $u_k(q) \in V$, (2,14) détermine $u_k(q)$ de manière unique).

De même en changeant q en $-q$ on voit que le problème : trouver pour $q < 0$ une suite $u_k^0(q)$ vérifiant :

$$(2,15) \quad u_k^0(0) = u_{k0} \quad \text{et} \quad u_k^0(q) \in V \quad \text{pour tout } q < 0$$

$$(2,16) \quad -(\nabla u_k^0(q), v)_H + (u_k^0(q), v)_V = 0$$

pour tout v de V .

Admet une unique solution qui (en ajoutant dans chaque membre de (2,16) $(\nabla u_k^0(q) + \bar{\nabla} u_k^0(q), v)$) vérifie :

$$(2,17) \quad (\bar{\nabla} u_k^0(q), v)_H + (u_k^0(q), v)_V = (\nabla u_k^0(q) + \bar{\nabla} u_k^0(q), v)_H.$$

On pose alors :

$$(2,18) \quad a_k^*(t; u, v) = \begin{cases} a_k(q; u, v) & \text{pour } t \in [qk, (q+1)k[\\ \text{avec } 1 \leq q \leq m-1 \\ (u, v)_V & \text{pour } t \notin [k, T] \end{cases}$$

$$(2,19) \quad f_k^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t > T \\ f_k(q) & \text{pour } t \in [qk, (q+1)k[, 1 \leq q \leq m-1. \\ \nabla u_k^0(q) + \bar{\nabla} u_k^0(q) & \text{pour } t < k. \end{cases}$$

REMARQUE.

Comme $u_k^0(q)$ appartient à V pour $t \leq k$, en remplaçant v par $\bar{\nabla} u_k^0(q)$ dans (2,16) et sommant de p à -1 (p entier négatif) il vient :

$$(2,20) \quad - \int_{pk}^{-k} |\nabla u_k^0(t)|_H^2 dt + \int_{pk}^{-k} (u_k^0(t), \nabla u_k^0(t))_V dt = 0.$$

Soit en prenant deux fois de la partie réelle du premier membre et en utilisant un lemme de [8] il vient :

$$(2,21) \quad -2 \int_{pk}^{-k} |\nabla u_k^0(t)|_H^2 dt - k \int_{pk}^{-k} (\nabla u_k^0(t), \nabla u_k^0(t))_V dt + \int_{pk}^{-k} |\nabla u_k^0(t)|_V^2 dt = 0$$

Soit :

$$(2,22) \quad 2 \int_{pk}^{-k} | \nabla u_k^0(t) |_H^2 dt \leq \int_{pk}^{-k} | \nabla u_k^0(t) |_V^2 dt (= | u_k^0(-k) |_V^2 - | u_k^0(pk) |_V^2).$$

Et comme l'injection de V dans H est continue on a :

$$(2,23) \quad \int_{pk}^{-k} | u_k^0(t) |_H^2 dt \leq | u_k^0(-k) |_V^2 \leq C | u_k^0(-k) |_H^2.$$

Enfin en faisant $q = -1$ dans (2,16) et en remplaçant v par $u_k \circ (-k)$ on obtient :

$$(2,24) \quad \int_{-\infty}^{-k} | u_k^0(t) |_H^2 dt \leq C | u_0 |_H^2$$

ou C est une constante indépendante de k .

Alors par construction de la fonction $f_k(t)$ on a :

$$(2,25) \quad | f_k^*(t) |_{L^2(-\infty, +\infty; K')}^2 \leq C [| f |_{L^2(0, T, K')}^2 + | u_0 |_H^2].$$

ou C désigne toujours une constante indépendante de k .

Enfin on pose

$$(2,26) \quad u_k^*(t) = \begin{cases} u_k(t) & \text{pour } t \geq 0. \\ u_k^0(t) & \text{pour } t < 0. \end{cases}$$

Il est évident que pour toute fonction $v_k^*(t) \in \mathbf{J}^*(V_k^*)$, $u_k^*(t)$ vérifie la relation

$$(2,27) \quad (\bar{V} u_k^*(t), v_k^*(t)) + a_k^*(t; u_k^*(t), v_k^*(t)) = \langle f_k^*(t), v_k^*(t) \rangle_{K', K}.$$

LEMME II.1

$u_k^*(t)$ et $\bar{\nu} u_k(t)$ sont bornés indépendamment de k , respectivement dans $L^2(V_k^*) (= \mathcal{F}(V_k^*) \cap L^2(-\infty, +\infty; K))$ et dans $L^2(-\infty, +\infty; V')$.

En effet, comme $u_k^*(t) \in \mathcal{F}(V_k^*)$, on remplace $v_k^*(t)$ par $u_k^*(t)$ dans (2,27) et en utilisant la méthode de [8] on obtient :

$$(2,28) \quad 2 \operatorname{Re} \int_0^\infty a_k^*(t; u_k^*(t), u_k^*(t)) dt \leq 2 \int_0^\infty |\langle f_k^*(t), u_k^*(t) \rangle| dt + |u_{k0}|_H^2.$$

D'où l'on déduit :

$$(2,29) \quad \int_0^\infty |u_k^*(t)|_K^2 dt \leq C_1 [|f_k^*(t)|_{L^2(-\infty, +\infty; K')}^2 + |u_{k0}|_H^2]$$

Soit d'après (2,19) et (2,6) :

$$(2,30) \quad \int_0^\infty |u_k^*(t)|_H^2 dt \leq C_2 [|f(t)|_{L^2(0, T; K')}^2 + |u_0|_H^2].$$

De même utilisant (2,26), (2,17) et (2,24) on obtient :

$$(2,31) \quad \int_{-\infty}^0 |u_k^*(t)|_K^2 dt \leq C_3 |u_0|_H^2.$$

Il en résulte

$$(2,32) \quad |u_k^*(t)|_{L^2(V_k^*)}^2 \leq C_4 [|f|_{L^2(0, T; K)}^2 + |u_0|_H^2].$$

Soit maintenant $\varphi \in L^2(-\infty, +\infty; V)$, comme pour tout q $0 \leq q \leq m-1$ on a $V \subset V_k(q)$, pour presque tout t , $t \in [qk, (q+1)k[$ $\varphi(t) \in V_k(q)$. On a donc pour presque tout $-\infty < t < +\infty$. La relation :

$$(2,33) \quad (\bar{\nu} u_k^*(t), \varphi(t))_H + a_k^*(t; u_k^*(t), \varphi(t)) = \langle f_k^*(t), \varphi(t) \rangle_{K', K}.$$

Ce qui, par définition de la forme $a_k^*(t; u, v)$ et de la fonction $f_k^*(t)$, donne, compte tenu de (1,5) :

$$(2,34) \quad (\bar{V} u_k^*(t), \varphi(t))_H \leq C_5 \|\varphi(t)\|_{L^2(-\infty, +\infty; V)}.$$

Il en résulte que $\bar{V} u_k^*(t)$ est borné dans $L^2(-\infty, +\infty; V')$ indépendamment de k . Ce qui achève la démonstration du lemme II.1.

Soit $\kappa_k = 1/k \theta_k$ ou θ_k est la fonction caractéristique de l'intervalle $[-k, 0]$. On pose :

$$(2,55) \quad v_k^* = \kappa_k * u_k^*.$$

On a alors

$$(2,36) \quad \frac{d}{dt} v_k^* = \bar{V} u_k^*.$$

Il en résulte que v_k^* est borné dans $L^2(-\infty, +\infty; K)$ et que $v_k^{*'}$ est borné dans $L^2(-\infty, +\infty; V')$. D'après [2,3] on sait que compte tenu de (1,8) v_k^* est borné dans $H^{1/2}(-\infty, +\infty; K, H)$. Soit v_k la restriction de v_k^* à l'intervalle $[0, T]$. v_k est borné dans $L^2(0, T; K)$ et dans $H^{1/2}(0, T; K, H)$. On sait d'après [4] prop. 4,2 chap. IV, que l'injection de $H^{1/2}(0, T; K, H)$ dans $L^2(0, T; H)$ est compacte. Il en résulte que l'on peut extraire de la suite v_k une sous suite v_k , convergent vers v dans $L^2(0, T; H)$ fort et dans $L^2(0, T; K)$ faible.

D'après un calcul fait dans [8] chap. I ((9,17) - (9,19)) on a :

$$(2,37) \quad \left(\int_0^T \|v_k - u_k\|_H^2 dt \right)^{1/2} \leq \sqrt{k/3} \cdot \left[\|u_k(0)\|_H + \|u_k(T)\|_H + k \cdot \int_0^T \|\bar{V} u_k(t)\|_H^2 dt \right]^{1/2}.$$

Le premier terme du second membre est borné car $u_k(0) = u_{k0}$. Pour majorer le second on remplace v par $u_k(q)$ et comme dans le lemme II.1 selon la méthode de [8] on obtient :

$$(2,38) \quad \|u_k(T)\|_H^2 \leq C [\|f\|_{L^2(0, T; K')}^2 + \|u_0\|_H^2].$$

Enfin d'après l'hypothèse (1,8) $([K, V']_{1/2} = H)$ il existe une constante c telle que pour tout $a \in K$ on ait :

$$(2,39) \quad \|a\|_H \leq c \|a\|_{V'}^{1/2} \cdot \|a\|_K^{1/2}$$

(cf. [7] par exemple).

Alors :

$$(2,40) \quad \int_0^T \|u(t+k) - u_k(t)\|_H^2 dt \leq \\ c \int_0^T \|u_k(t+k) - u_k(t)\|_{V'} \cdot \|u_k(t+k) - u(t)\|_K dt.$$

et d'après l'inégalité de Holder.

$$(2,41) \quad \leq 2c \left[\int_0^T \|u_k(t+k) - u_k(t)\|_{V'}^2 dt \right]^{1/2} \left[\int_0^T \|u_k(t)\|_K^2 dt \right]^{1/2}.$$

Soit

$$(2,42) \quad \int_0^T \|V u_k(t)\|_H^2 dt \leq 1/k \cdot 2c \left[\int_0^T \|V u_k(t)\|_{V'}^2 dt \right]^{1/2} \left[\int_0^T \|u_k(t)\|_H^2 dt \right]^{1/2}.$$

Il résulte alors des majorations du lemme II.1 que $\int_0^T \|V u_k(t)\|_H^2 dt$.

est borné indépendamment de k .

Enfin comme dans [8] on a :

$$(2,43) \quad \int_0^T \|u_k(t) - v_k(t)\|_H^2 dt = O(k^{1/2}).$$

La suite u_k , tend donc vers v dans $L^2(0, T; k)$ faible et dans $L^2(0, T; H)$ fort.

Il reste à montrer que v est égal à u solution du problème I. 1.

LEMME II.1

v appartient à $L^2(0, T; V(t))$.

En effet $P \cdot v$ appartient à $L^2(0, T; V(t))$ et pour tout w de $L^2(0, T; K)$ on a :

$$(2,44) \quad (u_k - P \cdot v, w)_{L^2(0, T; K)} = (P_k \cdot u_k - P \cdot v, w)_{L^2(0, T; K)}.$$

Comme les opérateurs P_k et P sont autoadjoints dans $L^2(0, T; K)$ on a :

$$(2,45) \quad (u_k - P \cdot v, w)_{L^2(0, T; K)} = (u_k - v, (P_k - P) \cdot w)_{L^2(0, T; K)} \\ \leq C \| (P_k - P) \cdot w \|_{L^2(0, T; K)}.$$

Car u_k est borné dans $L^2(0, T; k)$; et cette expression tend vers zéro avec k d'après l'hypothèse de consistance que vérifie la famille $V_k(q)$. Il en résulte que $v = P \cdot v$ donc que v appartient à $L^2(0, T; V(t))$.

Enfin soit $\varphi \in \Phi(0, T; V(t))$, puisque la famille $V_k(q)$ est consistance à la famille $V(t)$ il existe une suite φ_k d'éléments de $L^2(0, T; V_k)$ vérifiant les hypothèses (2,2) et (2,3).

On notera désormais u_k et φ_k les suites $u_{k'}$ et $\varphi_{k'}$.

Les suites u_k et φ_k satisfont alors à la relation :

$$(2,46) \quad \int_k^T [(\bar{V} u_k, \varphi_k)_h + a_k(t; u_k, \varphi_k)] dt = \int_k^T \langle f_k, \varphi_k \rangle_{K', K} dt.$$

Ce qui par construction de la fonction f_k et de la forme sesquilinéaire $a_k(t; u, v)$ donne :

$$(2.47) \quad \int_k^T [(\bar{V} u_k, \varphi_k)_h + a(t; u_k, \varphi_k)] dt = \int_k^T \langle f, \varphi_k \rangle_{K', K} dt.$$

Comme φ_k tend vers φ dans $L^2(0, T; K)$ fort et comme u_k tend vers v dans $L_2(0, T; k)$ faible on a :

$$(2,48) \quad \lim_k \int_0^T a(t; u_k, \varphi_k) dt = \int_0^T a(t; v, \varphi_k) dt.$$

Et

$$(2,49) \quad \lim_k \int_0^T \langle f, \varphi_k \rangle_{K', K} dt = \int_0^T \langle f, \varphi \rangle_{K', K} dt.$$

Il reste à étudier la limite de l'expression $\int_0^T (\bar{V} u_k, \varphi_k)_H dt$. Mais :

$$(2,50) \quad \int_0^T (\bar{V} u_k, \varphi_k)_H dt = \int_0^{T-k} (u_k(t), \bar{V} \varphi_k)_H dt - (u_{k0}, \varphi_k(0))_H \\ + (u_k(T-k), \varphi_k(T-k))_H.$$

D'après (2,3), comme u_k tend vers v dans $L^2(0, T; H)$ fort on a :

$$(2,51) \quad \lim_{k \rightarrow 0} \int_0^{T-k} (u_k(t), \bar{V} \varphi_k)_H dt = \int_0^T (v, \varphi')_H dt.$$

Et d'après (2,2), comme u_{k0} tend vers u_0 dans H fort et comme $u_k(T-k)$ reste borné dans H indépendamment de k , on a :

$$(2,52) \quad \lim - (u_{k0}, \varphi_k(0))_H + (u_k(T-k), \varphi_k(T-k))_H = - (u_0, \varphi(0))_H.$$

Enfin (2,48), (2,49), (2,51) et (2,52) montrent que v limite de la suite u_k est solution du problème exact. Comme cette solution est unique il s'en suit que non seulement une suite extraite, mais la suite u toute entière converge vers v dans $L^2(0, T; H)$ fort.

Exemples de cas où sont vérifiées les hypothèses (2,1), (2,2) et (2,3).

PROPOSITION II. 2.

Si on suppose que pour tout $V \in K$ l'application $t \rightarrow P(t) V$ est continue de $[0, T]$ dans K et si l'on pose $V_k(q) = V(t_q)$ où $t_q \in [qk, (q+1)k]$, la condition (2,1) est vérifiée.

DÉMONSTRATION.

On montre que pour toute fonction continue φ de $[0, T]$ dans K , $|(P - P_k)\varphi|_{L^2(0, T; K)}$ tend vers zéro avec k et on étend ensuite ce résultat par continuité à $L^2(0, T; K)$ en remarquant que P_k et P sont de norme inférieure ou égale à 1. :

L'application $t \rightarrow P(t)$ est continue de $[0, T]$ dans $L(K, K)$ muni de la topologie simple forte, elle est donc continue de $[0, T]$ dans $L(K, K)$ muni de la topologie de la convergence compacte. Comme φ est continue, l'ensemble des points $\{\varphi(t)/t \in [0, T]\}$ est un compact de K .

Soit ε donné, pour tout point t_0 il existe un intervalle ouvert de centre t_0 , U_{t_0} tel que pour tout $t \in U_{t_0}$ et tout $\zeta \in [0, T]$ on ait

$$(2,53) \quad |P(t_0)\varphi(\zeta) - P(t)\varphi(\zeta)|_K \leq 1/4 \cdot \sqrt{\varepsilon/T}$$

donc en particulier :

$$(2,54) \quad |P(t_0)\varphi(t) - P(t)\varphi(t)|_K \leq 1/4 \cdot \sqrt{\varepsilon/T}.$$

On extrait alors de la famille U_{t_0} $t_0 \in [0, T]$ un recouvrement fini U_{t_j} de $[0, T]$ $t_j \leq t_{j+1}$; on choisit k inférieur à la moitié du plus petit des intervalles U_{t_j} :

S'il existe j tel que $qk \in U_{t_j}$ et $qk \leq t_j$ l'intervalle $[qk, (q+1)k]$ est tout entier contenu dans U_{t_j} alors pour tout $t \in [qk, (q+1)k]$ on a :

$$(2,55) \quad |P(t_q)\varphi(t) - P(t) \cdot \varphi(t)|_K \leq |(P(t_j) - P(t_q)) \cdot \varphi(t)|_K \\ + |(P(t_j) - P(t)) \varphi(t)|_K \leq 1/2 \sqrt{\varepsilon/T}.$$

S'il n'existe pas de j vérifiant $qk \in U_{t_j}$ et $qk \leq t_j$ alors il existe un point $s \in [qk, (q+1)k]$ et deux points $t_{j'}$ et $t_{j''}$ vérifiant : $t_{j'} < qk < t_{j''}$ et $s \in U_{t_{j'}} \cap U_{t_{j''}}$; alors l'intervalle $[qk, (q+1)k]$ est contenu dans $U_{t_{j'}} \cup U_{t_{j''}}$ et on a :

$$(2,56) \quad |P(t_q) \cdot \varphi(t) - P(t) \cdot \varphi(t)|_K \leq |P(t_q) \cdot \varphi(t) - P(s) \cdot \varphi(t)|_K \\ + |(P(s) \cdot \varphi(t) - P(t) \cdot \varphi(t))|_K.$$

Comme s et t (resp. s et t_q) appartiennent à la fois à $U_{t_j'}$ ou à $U_{t_j''}$, on a :

$$(2,57) \quad |(P(t_q) - P(t)) \varphi(t)|_K \leq \sqrt{\varepsilon/T}$$

Il en résulte :

$$(2,58) \quad \int_0^T |P \cdot \varphi - P_k \cdot \varphi|_K^2 dt = \sum_q \int_{qk}^{(q+1)k} |(P(t_q) - P(t)) \varphi(t)|_K^2 dt \\ \leq \sum_q k \cdot \varepsilon / T = \varepsilon.$$

Les conditions (2,2) et (2,3) sont également vérifiées si pour k assez petit on peut choisir $V_k(q)$ tel que pour tout t de l'intervalle $[qk, (q+1)k[$ on ait : $V_k(q) \supset V(t)$. On posera alors :

$$(2,59) \quad \varphi_k(q) = 1/k \int_{qk}^{(q+1)k} \varphi(t) dt.$$

Mais on a de plus la proposition

PROPOSITION II. 3.

On suppose comme dans la proposition II. 2 que l'application $t \rightarrow P(t) \cdot v$ est continue de $[0, T]$ dans K pour tout $v \in K$; et on suppose de plus que cette application vérifie une condition de Lipchitz dans le sens suivant : pour tout couple u, v d'éléments de K et tout réel h assez petit on a :

$$(2,60) \quad |(u, P(t+h) \cdot v)_K - (u, P(t) \cdot v)_K| \leq C \cdot h |u|_K \cdot |v|_K$$

ou C est une constante indépendante de t, u et v .

Alors la famille $V_k(q)$ ou $V_k(q) = V(qk)$ est consistante à la famille $V(t)$.

DÉMONSTRATION :

D'après la proposition II. 2 la famille $V(t)$ satisfait à l'hypothèse (2,1). Soit $\varphi \in \Phi(0, T; V(t))$; on pose

$$(2,61) \quad \Psi_k(q) = \int_{qk}^{(q+1)k} \varphi(t) dt \quad \text{et} \quad \varphi_k(q) = P(qk) \Psi_k(q).$$

Et on se propose de montrer que la suite φ_k vérifie bien les hypothèses de consistance.

Premièrement on a :

$$(2,62) \quad \begin{aligned} & \|\varphi_k - \varphi\|_{L^2(0, T; K)} \leq \|P_k \Psi_k - P_k \varphi\|_{L^2(0, T; K)} \\ & + \|P_k \varphi - \varphi\|_{L^2(0, T; K)} \leq \|\Psi_k - \varphi\|_{L^2(0, T; K)} + \|(P_k - P) \varphi\|_{L^2(0, T; K)}. \end{aligned}$$

Le premier terme tend vers zéro par construction de la fonction Ψ_k ; quant au second il tend vers zéro d'après la proposition II. 2

Ensuite :

Comme φ appartient à $C[0, T; H]$ (après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle) $\Psi_k(0)$ tend vers $\Psi(0)$ dans H fort. Donc pour montrer que $\varphi_k(0)$ tend vers $\varphi(0)$ il suffit de montrer que $\|\Psi_k(0) - \varphi(0)\|_H$ tend vers zéro.

Or :

$$(2,63) \quad \begin{aligned} & \|\Psi_k(0) - \varphi_k(0)\|_H \leq c \|\Psi_k(0) - \varphi_k(0)\|_K \\ & \leq c \cdot \int_0^k \|(P(k) - P(t))/k \cdot \varphi(t)\|_K dt \leq c \cdot C \int_0^k \|\varphi(t)\|_K dt. \end{aligned}$$

Et le dernier terme de (2,63) tend vers zéro avec k .

On procéderait de même pour montrer que $\varphi_k(T-k)$ tend dans H vers $\varphi(T)$ lorsque k tend vers zéro.

Enfin :

$$(2,64) \quad \begin{aligned} & \|\varphi_k\|_{L^2(0, T; H)}^2 = \sum_q k \|(P_k(q+1) \cdot \Psi_k(q+1) - P_k(q) \Psi_k(q))/k\|_H^2 \\ & \leq c \sum_q k \|(P_k(q+1) \Psi_k(q+1) - \Psi_k(q+1))/k\|_K^2 + \sum_q k \|(\Psi_k(q+1) - \Psi_k(q))/k\|_H^2 \\ & \quad + c \sum_q k \|(P_k(q) \Psi_k(q) - \Psi_k(q))/k\|_K^2. \end{aligned}$$

Le premier terme du second membre est majoré indépendamment de k ; en effet il est égal à :

$$(2,65) \quad c \cdot \sum_q k \left| \frac{1}{k} \int_{qk}^{(q+1)k} (P(q+1) - P(t)) / k \cdot \varphi(t) dt \right|_K^2$$

et d'après l'hypothèse (2,60), (2,65) est majoré par :

$$(2,66) \quad c \sum_q k \cdot \left[\frac{1}{k} \int_{qk}^{(q+1)k} c |\varphi(t)|_K dt \right]^2.$$

Et d'après l'inégalité de Holder (2,66) est majoré par :

$$(2,67) \quad c \cdot C \sum_q k \cdot \frac{1}{k} \int_{qk}^{(q+1)k} |\varphi(t)|_K^2 dt = c \cdot C \cdot |\varphi|_{L^2(0, T; K)}.$$

On établirait de la même manière une majoration pour le troisième terme du second membre de (2,64).

Le second terme du second membre de (2,64) est égal à

$$(2,68) \quad \sum_q \frac{1}{k} \left| \int_{qk}^{(q+1)k} (\varphi(t+k) - \varphi(t)) / k dt \right|_H^2.$$

On démontre que ce terme est majoré indépendamment de k en utilisant l'inégalité de Holder et l'hypothèse $\varphi'(t) \in L^2(0, T; H)$.

Exemples d'applications :

Soit Ω un ouvert suffisamment régulier de R^n et Γ sa frontière ; on note $H_0^m(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$ (et $H^{-m}(\Omega)$ le dual de $H_0^m(\Omega)$) on a alors :

$$(2,69) \quad [H^m(\Omega), H^{-m}(\Omega)]_{1/2} = L^2(\Omega).$$

L'ouvert Ω étant suffisamment régulier on définit de manière unique pour tout $u \in H^m(\Omega)$

$$\gamma_j u = \frac{\partial j}{\partial \nu^j} u \in H^{m-j-1/2}(\Gamma) \quad 0 \leq j \leq m-1.$$

Alors :

I⁰. Soit Γ_t une famille d'ensembles de mesure positive de Γ on note :

$$(2,70) \quad H_t^1(\Omega) = \{u \in H_0^1(\Omega), \gamma_0 u|_{\Gamma_t} = 0\}.$$

Pour tout t $H_t^1(\Omega)$ est un sous espace fermé de $H^1(\Omega)$. Et comme d'habitude on note $P(t)$ la projection de $H^1(\Omega)$ sur $H_t^1(\Omega)$.

On suppose que les opérateurs $P(t)$ vérifient la condition de la proposition II. 2 : Pour tout $v \in K$ l'application $t \rightarrow P(t) \cdot v$ est continue de $[0, T]$ dans K ; et on suppose que pour k assez petit il existe dans tout intervalle de la forme $[qk, (q+1)k]$ un point t_q vérifiant

$$(2,71) \quad \Gamma_t \subset \Gamma_{t_q} \text{ pour tout } t \in [qk, (q+1)k].$$

Alors la famille $V_k(q) = H_{t_q}^1(\Omega)$ est consistante à la famille $V(t) = H_t^1(\Omega)$; et le procédé de calcul de II donne une approximation de la solution du problème (2) de [2].

II⁰. Soit $b_1(x, t)$ et $b_2(x, t)$ des fonctions définies sur $\Gamma \times [0, T]$; appartenant à $L^\infty(\Gamma \times [0, T])$ ainsi que leurs dérivées d'ordre ≤ 4 .

On note :

$$V(t) = \{u \in H^3(\Omega) / \gamma_1 u(x) = b_1(x, t) \gamma_0 u(x) \text{ et } \gamma_2 u(x) = b_2(x, t) \gamma_0 u(x)\}$$

$V(t)$ est alors un sous espace fermé de $H^3(\Omega)$ et on montre que en plus de la propriété de continuité simple forte, la famille $P(t)$ vérifie l'assertion suivante :

$$(2,72) \quad \text{Pour tout } v \in H^3(\Omega) \quad h^{-1}(P(t+h) - P(t)) \cdot v \text{ tend vers } P'(t) \cdot v \text{ dans } H^3(\Omega) \text{ faible; et la fonction } t \rightarrow P'(t) \cdot v \text{ est continue de } [0, T] \text{ dans } H^3(\Omega) \text{ faible.}$$

Il en résulte que la famille $P'(t)$ est bornée dans $L(H^3(\Omega), H^3(\Omega))$ et que la famille $P(t)$ vérifie l'assertion (2,60).

On peut donc en prenant $V_k(q) = V(qk)$ construire une approximation du premier problème du § 7 du chapitre 7 de [4].

Je remercie Monsieur le Professeur Lions pour les fructueuses discussions que j'ai eues avec lui sur ce sujet et qui m'ont permis de mener à bien ce travail.

BIBLIOGRAPHY

- [1] AUBIN — Thèse Paris, 1966 (à paraître)
- [2] BAIocchi — *Regolarità e unicità della soluzione di una equazione differenziale astratta*. Seminario Matematico della Università di Padova. XXXV (1965) pag. 380-417.
- [3] LIONS — *Espaces intermédiaires entre espaces de hilbert et applications*, Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. Phys. R.P.R. Bucarest. 2 (1958) pag. 419-432.
- [4] LIONS — *Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites*. Springer Verlag, t. 111.
- [5] LIONS — *Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles*. Université de Montréal 1962.
- [6] LIONS — *Equazioni differenziali astratte* — C.I.M.E., 1963, ed. Cremonese - Roma.
- [7] LIONS et PEETRE — *Sur une classe d'espaces d'interpolation*. I.H.E.S. N° 19.
- [8] RAVIART — Thèse, Paris 1965 (à paraître).

Manoscritto pervenuto in redazione il 7 novembre 1966.