

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

FRANCO NAPOLITANI

**Proprietà reticolari dell'insieme dei
sottogruppi subnormali**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 38 (1967), p. 293-304

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__38__293_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__38__293_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROPRIETÀ RETICOLARI DELL'INSIEME DEI SOTTOGRUPPI SUBNORMALI

FRANCO NAPOLITANI *)

Sia G un gruppo. Un sottogruppo K di G dicesi subnormale in G se esiste una catena di sottogruppi, ciascuno normale nel successivo,

$$K = K_0 \triangleleft K_1 \triangleleft \dots \triangleleft K_n = G$$

con n finito; se K è subnormale in G si scrive $K \triangleleft \triangleleft G$.

Indichiamo con $S(G)$ l'insieme dei sottogruppi subnormali di G . È noto che, in generale, $S(G)$ non è un reticolo rispetto alle operazioni di intersezione ed unione gruppane: l'unione di due elementi di $S(G)$ non sempre è un sottogruppo subnormale di G .

Dati due sottogruppi K ed H subnormali in G , si dice che (K, H) forma una coppia modulare di $S(G)$ se, per ogni $C \in S(G)$, $C \supseteq K$, si ha

$$(K \cup H) \cap C = K \cup (H \cap C).$$

In questa nota si prova che (K, H) è una coppia modulare di $S(G)$ se, e solo se, K ed H sono sottogruppi permutabili; da ciò segue in particolare che l'unione di due sottogruppi subnormali che formano una coppia modulare di $S(G)$ è ancora un sottogruppo subnormale di G .

*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la Matem. del C. N. R..

Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università Padova.

Nel reticolo $\mathcal{L}(G)$ di tutti i sottogruppi di G si considera poi il sottoreticolo $\overline{S(G)}$ generato da $S(G)$; si determinano i gruppi G risolubili con $\overline{S(G)}$ distributivo. La risoluzione di questa questione consente anche di completare alcuni risultati di M. Curzio e R. Permutti [1] relativi ai T -gruppi risolubili (brevemente ST -gruppi) con il reticolo dei sottogruppi normali distributivo.

Infine, considerata la classe $\mathcal{M}$ di tutti i gruppi che verificano la condizione minimale per i sottogruppi subnormali, si dà una condizione necessaria e sufficiente affinché un gruppo $G \in \mathcal{M}$ abbia $S(G)$ distributivo; questo risultato deve ritenersi una parziale estensione di un teorema di G. Zacher relativo ai gruppi finiti [5].

Le notazioni saranno quelle usuali della teoria dei gruppi.

In particolare, se H e K sono sottogruppi di un gruppo G , con $\mathcal{N}_H(K)$ e $C_H(K)$ denoteremo rispettivamente il normalizzante ed il centralizzante di K in H ; il simbolo $\langle a, b, \dots \rangle$ indicherà il sottogruppo generato dalla parte $\{a, b, \dots\}$ di G e $\pi(G)$ l'insieme di tutti i numeri primi p tali che G contenga un elemento di ordine p .

1. Si ha subito:

LEMMA I. *Siano K e H due sottogruppi subnormali di $G : (K, H)$ è una coppia modulare di $S(G)$ se, e solo se, $KH = HK$.*

DIM: È sufficiente provare che (K, H) coppia modulare di $S(G)$ implica $KH = HK$, il viceversa essendo evidente.

Sia

$$K = K_i \triangleleft K_{i-1} \triangleleft \dots \triangleleft K_0 = G$$

la serie normale discendente ¹⁾ di K in G . Se l'indice di subnormalità $i = i(K, G)$ di K in G è 0 oppure 1, la proposizione è vera; si procederà allora per induzione su i .

¹⁾ Sia K un sottogruppo subnormale di G . La serie normale discendente di K in G viene definita ponendo $K_0 = G$ e, supposto definito K_j come un sottogruppo contenente K , K_{j+1} si ottiene come intersezione di tutti i sottogruppi normali di K_j contenenti K . La lunghezza $i(K, G)$ della serie normale discendente è minore o tutt'al più uguale alla lunghezza di ogni altra catena normale tra K e G : $i(K, G)$ si chiama indice di subnormalità di K in G .

Per ogni fissato $C \in \mathcal{S}(K_1)$, $C \supseteq K$, si ha

$$\begin{aligned} [K \cup (H \cap K_1)] \cap C &= [(K \cup H) \cap K_1] \cap C = \\ &= (K \cup H) \cap C = K \cup [H \cap C] = K \cup [(H \cap K_1) \cap C] \end{aligned}$$

e quindi $(K, H \cap K_1)$ forma una coppia modulare di $\mathcal{S}(K_1)$.

Ora $i(K, K_1)$ è minore di $i(K, G)$; sicchè per l'ipotesi di induzione si ha

$$K \cup (H \cap K_1) = K(H \cap K_1).$$

Quindi, poichè (K, H) è una coppia modulare di $\mathcal{S}(G)$,

$$(K \cup H) \cap K_1 = K(H \cap K_1)$$

ed, essendo $K_1 \triangleleft G$, $K(H \cap K_1)$ è normale in $K \cup H$.

L'asserto segue allora dalla relazione

$$K \cup H = K(H \cap K_1)H = KH.$$

OSSERVAZIONE 1: Nella dimostrazione del lemma I non si è fatto uso della ipotesi che H fosse un sottogruppo subnormale di G . Pertanto si può affermare che un sottogruppo subnormale K di G è permutabile con un sottogruppo H di G se, e solamente se, per ogni $C \in \mathcal{S}(G)$, $C \supseteq K$, si ha $(K \cup H) \cap C = K \cup (H \cap C)$.

D. S. Robinson ha osservato [3] che in un gruppo l'unione di una coppia di sottogruppi subnormali permutabili è ancora un sottogruppo subnormale; si ha quindi:

COROLLARIO I. *Se $K \triangleleft\triangleleft G$, $H \triangleleft\triangleleft G$ formano una coppia modulare di $\mathcal{S}(G)$, allora $K \cup H$ è subnormale in G .*

2. Sia G un gruppo con $\overline{S(G)}$ distributivo. Poichè due qualunque sottogruppi subnormali di G formano una coppia modulare di $\mathcal{S}(G)$, segue dal corollario I che $\overline{S(G)}$ coincide con $\mathcal{S}(G)$. Inoltre ogni sottogruppo subnormale ed ogni immagine omomorfa di G ha ancora il reticolo generato dai suoi sottogruppi subnormali distributivo; e, poichè in un gruppo abeliano $\overline{S(G)} = \mathcal{L}(G)$, G quando

è abeliano, risulta localmente ciclico²⁾). Segue da ciò che ogni fattore abeliano di un sottogruppo subnormale di G è localmente ciclico: in particolare i sottogruppi subnormali abeliani di G sono localmente ciclici.

Si consideri l'unione A_G di tutti i sottogruppi subnormali abeliani di G : sempre nell'ipotesi che $\overline{S(G)}$ sia distributivo, A_G è localmente ciclico. Infatti se A_1 e A_2 sono due sottogruppi subnormali abeliani di G , dalla distributività di $\overline{S(G)}$ segue che $1 \subseteq A_1 \cap A_2 \subseteq A_1 \cup A_2$ è una catena centrale di $A_1 \cup A_2$. Allora $A_1 \cup A_2$ è nilpotente, sicchè $\overline{S(A_1 \cup A_2)}$ coincide con $\mathcal{L}(A_1 \cup A_2)$ ed $A_1 \cup A_2$ è localmente ciclico.

Sono adesso evidenti le considerazioni da fare per concludere che A_G è localmente ciclico.

LEMMA 2. *Se nella serie derivata*

$$G \supseteq G' \supseteq \dots \supseteq G^{(i-1)} \supseteq G^{(i)} \supseteq G^{(i+1)} \supseteq \dots$$

di un gruppo G due successivi quozienti $G^{(i-1)} / G^{(i)}$ e $G^{(i)} / G^{(i+1)}$, sono localmente ciclici, si ha $G^{(i+1)} = 1$.

Il lemma 2, dimostrato in [7] nell'ipotesi che i quozienti siano ciclici, si estende con analoghe argomentazioni.

LEMMA 3. *In un gruppo G con $\overline{S(G)}$ distributivo ogni sottogruppo subnormale risolubile o fattore risolubile ha serie derivata di lunghezza al più 2.*

DIM: Evidente a partire dalle considerazioni precedenti.

LEMMA 4. *Sia G un gruppo non abeliano, libero da torsione e risolubile. $\overline{S(G)}$ è distributivo se, e solo se, si ha simultaneamente:*

$\alpha)$ $G = H \rtimes \langle a \rangle$ (prodotto semi-diretto di $H \triangleleft G$ per $\langle a \rangle$) con H localmente ciclico

$\beta)$ ogni sottogruppo subnormale di G è confrontabile con H .

²⁾ È noto che un gruppo G è localmente ciclico se, e solo se, $\mathcal{L}(G)$ è distributivo.

DIM: Sia G un gruppo risolubile, non abeliano e libero da torsione; inoltre $\overline{S(G)}$ sia distributivo. Per il lemma 3 A_G contiene il derivato G' di G , sicchè $C_G(A_G)/A_G$ è localmente ciclico. Ne segue che $C_G(A_G)$ è abeliano e quindi, poichè A_G è il più grande sottogruppo subnormale abeliano di G , $C_G(A_G) = A_G \cdot G/A_G$ è allora isomorfo ad un gruppo di N di automorfismi di A_G .

Se G/A_G fosse di torsione, N avrebbe ordine 2 (si tenga presente che A_G è localmente ciclico e libero da torsione) e sarebbe generato dall'automorfismo involutorio di A_G ; esisterebbe pertanto un elemento a tale che $G = \langle a, A_G \rangle$ ed $aba^{-1} = b^{-1}$ per ogni $b \in A_G$. In particolare $a a^2 a^{-1} = a^2 = a^{-2}$, ossia $a^4 = 1$ ed a sarebbe periodico: assurdo. G/A_G è dunque libero da torsione. Ora A_G , quale gruppo abeliano libero da torsione e di rango 1, è isomorfo ad un sottogruppo di Q^+ (gruppo additivo dei numeri razionali); quindi G/A_G , dovendo essere isomorfo ad un sottogruppo libero da torsione e di rango 1 del gruppo moltiplicativo $Q - \{0\}$ dei razionali, è ciclico³⁾. Ricordando che ogni estensione di un gruppo B mediante un gruppo libero si spezza su B , si può scrivere $G = A_G \lambda \langle a \rangle$ con a aperiodico e la α) è provata.

Resta da provare la β); a tal fine, supponiamo per assurdo che esista un $T \triangleleft \triangleleft G$ non confrontabile con A_G .

Allora

$$T \cup A_G / T \cap A_G = T / T \cap A_G \times A_G / T \cap A_G$$

e $T \cup A_G / T \cap A_G$ è abeliano, essendo sia $T / T \cap A_G$ che $A_G / T \cap A_G$ abeliani, e quindi localmente ciclico. Ma ciò è assurdo, osservato che $T / T \cap A_G \cong A_G \cup T / A_G$ è libero da torsione ed, essendo $T \cap A_G \neq 1$, $A_G / T \cap A_G$ è di torsione e non identico.

Viceversa è chiaro che un gruppo G che verifica la α) e la β) ha $\overline{S(G)}$ distributivo.

Il teorema che segue consente di determinare i gruppi risolubili e senza torsione con $\overline{S(G)}$ distributivo.

³⁾ È sufficiente osservare che si ha $Q - \{0\} = Z(2) \times L$ con L gruppo abeliano libero; dunque gli unici sottogruppi localmente ciclici di $Q - \{0\}$ sono monogeni.

TEOREMA I. *Sia G un gruppo libero da torsione risolubile e non abeliano. Sono equivalenti le proposizioni:*

α) G è l'estensione di Q^+ mediante $\langle a \rangle$, dove a è un elemento che induce su Q^+ un automorfismo aperiodico.

β) $\overline{S(G)}$ è distributivo.

DIM: $\alpha) \implies \beta$).

Sia G l'estensione di Q^+ mediante $\langle a \rangle$, con a elemento che induce su Q^+ un automorfismo aperiodico. Si può scrivere $G = Q^+ \rtimes \langle a \rangle$.

Poichè l'anello degli endomorfismi $E(Q^+)$ di Q^+ è Q , esiste un razionale t tale che per ogni $m \in Q^+$ l'elemento ama^{-1} è uguale all'ordinario prodotto tm dei razionali t ed m : $ama^{-1} = tm$.

Il commutatore $[a, m] = ama^{-1}m^{-1}$ di a ed m è quindi $(t-1)m$; ora t è diverso da 1, per cui $t-1$ è un elemento invertibile di Q . Segue che il derivato di G è Q^+ .

Indicato con A un sottogruppo contenente propriamente Q^+ , A è uguale a $Q^+ \rtimes \langle a^n \rangle$ con n intero non nullo e, pertanto, rimanendo valido per A il precedente ragionamento, il derivato di A è ancora Q^+ .

Ciò premesso, supponiamo per assurdo esista un sottogruppo $T \triangleleft\triangleleft G$ non confrontabile con Q^+ . È lecito supporre $Q^+ \subsetneq \mathcal{N}_G(T)$. Si ha

$$T \cup Q^+ / T \cap Q^+ = T / T \cap Q^+ \times Q^+ / T \cap Q^+,$$

sicchè, essendo $T / T \cap Q^+$ e $Q^+ / T \cap Q^+$ abeliani, anche $T \cup Q^+ / T \cap Q^+$ è abeliano. Dunque $T \cap Q^+$ contiene il derivato di $T \cup Q^+$; osservato che $T \cup Q^+ \supsetneq Q^+$ e che $T \cap Q^+$ è contenuto propriamente in Q^+ si è pervenuti ad una contraddizione.

Il lemma 4 assicura allora che $\overline{S(G)}$ è distributivo.

$\beta) \implies \alpha$).

È sufficiente a tal fine provare che ogni estensione G di un gruppo H localmente ciclico, libero da torsione e non isomorfo a Q^+ mediante un gruppo ciclico infinito $\langle a \rangle$ non può avere $\overline{S(G)}$ distributivo. Poichè H non è un gruppo divisibile esiste un numero primo p tale che $H^p \neq H$; H^p è caratteristico in H , dunque normale in G e, tenuto conto del fatto che H è localmente ciclico, si ha che $|H/H^p| = p$.

Il centralizzante $C_{G/H^p}(H/H^p)$ di H/H^p in G/H^p ha quindi indice finito in G/H^p . Segue che $C_{G/H^p}(H/H^p)$ contiene propriamente H/H^p .

Osservato che $C_{G/H^p}(H/H^p)$ è abeliano e di tipo misto, è chiaro che $\overline{S(G)}$ non può essere distributivo.

LEMMA 5. *Sia G un gruppo risolubile con almeno un elemento periodico non identico. Se $\overline{S(G)}$ è distributivo, G è un T -gruppo ⁴⁾.*

DIM: Distinguiamo i casi seguenti:

a) A_G è di torsione.

A_G è allora un gruppo a componenti primarie del tipo $z(p^k)$, $0 \leq k \leq \infty$. Essendo ogni sottogruppo di A_G caratteristico in G e $A_G \supseteq G'$, i sottogruppi confrontabili con A_G sono normali in G .

Se G contiene un sottogruppo $T \triangleleft G$ non confrontabile con A_G , si ha

$$TA_G/T \cap A_G = T/T \cap A_G \times A_G/T \cap A_G;$$

sicchè $TA_G/T \cap A_G$ è abeliano, essendo sia $(T/T \cap A_G)$ che $A_G/T \cap A_G$ abeliani, e quindi localmente ciclico. Poichè $A_G/T \cap A_G$ è di torsione, anche $T/A_G \cap T$ è di torsione e conseguentemente anche G . Dopo dicchè con semplici considerazioni si ha $T \triangleleft G$ e G è un T -gruppo.

b) A_G è libero da torsione.

L'esistenza di un elemento di ordine finito non identico implica $[G : A_G] = 2$ e quindi $G = \langle A_G, a \rangle$ con $a^2 = 1$, $axa = x^{-1}$ ($\forall x \in A_G$). Ora $A_G^2 = A_G$, altrimenti G/A_G^2 sarebbe un gruppo abeliano elementare di ordine 2^2 ed $\overline{S(G/A_G^2)} = \mathcal{L}(G/A_G^2)$ non sarebbe distributivo. Allora i soli sottogruppi normali propri di G sono i sottogruppi di A_G , ed anche in questo caso G è un T -gruppo.

In base al lemma precedente è dunque necessario, se si vuole conoscere la struttura dei gruppi risolubili G con $\overline{S(G)}$ distributivo, determinare i T -gruppi risolubili G con $\overline{N(G)}$ distributivo. A tal

⁴⁾ Un T -gruppo è un gruppo in cui la normalità è una relazione transitiva.

fine riportiamo la classificazione dei T -gruppi risolubili, così come è stata data da D. S. Robinson [2]:

- a) gruppi abeliani;
- b) ST -gruppi di tipo 1: un ST -gruppo G si dice di tipo 1 se non è abeliano e $C_G(G')$ non è periodico;
- c) ST -gruppi di tipo 2: un ST -gruppo G non periodico si dice di tipo 2 se non è abeliano e $C_G(G')$ è periodico;
- d) ST -gruppi periodici non abeliani.

TEOREMA 2. (cfr. M. Curzio - R. Permutti [1]) *Un gruppo G è un T -gruppo risolubile di tipo 1 con $N(G)$ distributivo se, e solo se, $G = \langle A, z \rangle$ con A gruppo localmente ciclico senza torsione ed $A = A^2$, $z^2 = 1$, $zaz^{-1} = a^{-1}$ ($\forall a \in A$).*

TEOREMA 3. *Un ST -gruppo di tipo 2 ha $N(G)$ distributivo se, e solo se, si ha contemporaneamente:*

- i) G' ha componenti primarie quasi-cicliche;
- ii) G/G' è localmente ciclico e libero da torsione.

DIM: Sia G un ST -gruppo di tipo 2 che verifica la i) e la ii); $N(G)$ sarà evidentemente distributivo se ogni sottogruppo normale H di G risulterà confrontabile con G' . Infatti supponiamo (un assurdo) che esista un $H \triangleleft G$ non confrontabile con G' ; essendo $G' \not\leq H \cap G'$, $G/H \cap G'$ è un ST -gruppo con un elemento di ordine infinito che centralizza il derivato. Ora un ST -gruppo con questa proprietà è o di tipo 1 oppure abeliano [2]: la prima eventualità è però da escludere in quanto in un ST -gruppo di tipo 1 gli elementi di ordine finito non costituiscono un sottogruppo. Pertanto $G/H \cap G'$ è abeliano: un risultato che contrasta con l'assunzione che G' sia il derivato di G .

Viceversa, sia G un ST -gruppo di tipo 2 con $N(G)$ distributivo. Il derivato G' di G è un gruppo abeliano divisibile e di torsione [2], quindi vale la i). La ii) è conseguenza del fatto che $N(G/G') = \mathcal{L}(G/G')$ è distributivo e G/G' non è periodico.

TEOREMA 4. *Sia G un gruppo. Sono equivalenti le proposizioni:*

- a) G è un ST -gruppo periodico con $N(G)$ distributivo.

b) $G = A \lambda (B \lambda C)$, dove A e B sono gruppi abeliani a componenti primarie cicliche o quasi cicliche e C è un 2-gruppo di uno dei tipi seguenti: i) $Z(2^k)$ con $0 \leq k \leq \infty$; ii) $\langle Z(2^\infty), z \rangle$ con $z^2 = 1$, $zaz = a^{-1}$ per ogni $a \in Z(2^\infty)$; iii) $\langle Z(2^\infty), z \rangle$ con $z^2 = a_1$ (elemento di ordine 2 di $Z(2^\infty)$) e $zaz^{-1} = a^{-1}$ per ogni $a \in Z(2^\infty)$. Inoltre $\pi(A) \cap \pi(B) = \pi(B) \cap \pi(C) = \pi(A) \cap \pi(C) = \emptyset$.

c) G è un ST -gruppo periodico ed ogni sottogruppo di Sylow di G è un T -gruppo con il reticolo dei sottogruppi normali distributivo.

DIM: $a) \implies b)$.

Sia G un ST -gruppo periodico con $N(G)$ distributivo. $G/C_G(G')$, essendo localmente ciclico, ha (al più) la potenza del numerabile e quindi G ha la « splitting property » [2] (si spezza, cioè, sulla componente dispari del terzo termine della sua serie centrale discendente). G ha pertanto la seguente struttura [2]: $G = A \lambda (B \lambda C)$, dove A e B sono gruppi abeliani, C è un T_2 -gruppo (2-gruppo che è T -gruppo) risolubile ed inoltre

$$\pi(A) \cap \pi(B) = \pi(B) \cap \pi(C) = \pi(A) \cap \pi(C) = \emptyset.$$

Dall'ipotesi che il reticolo dei sottogruppi normali di G è distributivo segue che $\mathcal{L}(A) = N(A)$, $\mathcal{L}(B) = N(B)$ ed $N(C)$ sono distributivi, e quindi A e B sono gruppi abeliani a componenti primarie cicliche o quasi-cicliche, mentre C è un T_2 -gruppo risolubile con $N(C)$ distributivo.

Osservato che, a norma di un teorema di M. Curzio - R. Permutti [1], tutti e soli i T_2 -gruppi risolubili con il reticolo dei sottogruppi normali distributivo sono i 2-gruppi i), ii) e iii) di cui all'enunciato della b), la proposizione b) rimane provata.

$b) \implies c)$.

Sia $G = A \lambda (B \lambda C)$ con A , B e C gruppi che soddisfano alle condizioni enunciate nella b). Per un lemma di D. S. Robinson (cfr. [2] pag. 35) G è un T -gruppo. Inoltre i sottogruppi di Sylow di A , B e C sono T -gruppi con il reticolo dei sottogruppi normali distributivo. Per concludere che vale la c) basta osservare che ogni sottogruppo di Sylow di G è isomorfo ad un sottogruppo di Sylow di uno dei tre gruppi A , B , C .

c) $\implies$ a).

Supposta valida la c), siano X e Y , $X \supset Y$, due sottogruppi normali di G tali che $|X/Y| = p^2$ (p numero primo). G essendo periodico e risolubile, è localmente finito; allora (ragionando localmente) si vede che esiste un p -sottogruppo di Sylow S di G tale che $YS \supseteq X$. Ora $X \cap S$ e $Y \cap S$, $X \cap S \supset Y \cap S$, sono sottogruppi normali di S ed $X \cap S / Y \cap S \simeq X/Y$ ha ordine p^2 . Poichè $N(S)$ è distributivo, $X \cap S / Y \cap S$ è ciclico e quindi anche X/Y è ciclico. Un teorema di M. Curzio e R. Permutti [1] assicura allora che $N(G)$ è distributivo.

Raccogliendo i risultati a cui si è pervenuti, si ha che i gruppi risolubili G con il reticolo $S(G)$ distributivo sono:

- a) i gruppi localmente ciclici liberi da torsione.
- b) le estensioni del gruppo additivo Q^+ dei razionali del tipo $Q^+ \rtimes \langle a \rangle$, con a elemento che induce su Q^+ un automorfismo aperiodico.
- c) i gruppi G tali che $G = \langle A, z \rangle$ con A gruppo localmente ciclico senza torsione ed $A^2 = A$, $z^2 = 1$, $zaz = a^{-1}$ per ogni $a \in A$.
- d) i T -gruppi risolubili di tipo 2 nei quali il derivato G' è un gruppo a componenti primarie cicliche o quasi cicliche ed il quoziente G/G' è un gruppo libero da torsione localmente ciclico.
- e) i gruppi con la seguente struttura: $G = A \rtimes (B \rtimes C)$, con A e B gruppi abeliani a componenti primarie cicliche o quasi cicliche, C 2-gruppo di uno dei seguenti tipi: i) $Z(2^k)$ con $0 \leq k \leq \infty$,
 ii) $\langle Z(2^\infty), z \rangle$ con $z^2 = 1$, $zaz = a^{-1}$ per ogni $a \in Z(2^\infty)$,
 iii) $\langle Z(2^\infty), z \rangle$ con $z^2 = a_1$ (elemento di ordine 2 di $Z(2^\infty)$) e $zaz^{-1} = a^{-1}$ per ogni $a \in Z(2^\infty)$; ed inoltre $\pi(A) \cap \pi(B) = \pi(B) \cap \pi(C) = \pi(A) \cap \pi(C) = \emptyset$.

OSSERVAZIONE 2. I gruppi dei tipi a), c), d), ed e) sono T -gruppi; essi sono tutti e soli i T -gruppi risolubili con il reticolo dei sottogruppi normali distributivo.

3. In questo numero vengono caratterizzati gli $\mathcal{M}$ -gruppi G con il reticolo $S(G)$ dei sottogruppi subnormali distributivo ⁵⁾.

⁵⁾ J. E. Roseblade ha dimostrato che in un M -gruppo l'insieme dei sottogruppi subnormali è un reticolo [4].

LEMMA 5: *Sia G un $\mathcal{M}$ -gruppo. Se ogni catena normale di G ha ciclici i fattoriali di ordine quadrato di un numero primo, $S(G)$ è modulare.*

DIM: È sufficiente provare che le precedenti ipotesi implicano che i sottogruppi subnormali di G sono a due a due permutabili. Se neghiamo che $S(G)$ sia un reticolo di sottogruppi permutabili, $S(G)$ conterrà un elemento H minimale rispetto alla proprietà « esiste $B \triangleleft \triangleleft G$ tale che $HB \neq H \cup B$ ». Indicato con K il sottogruppo generato da tutti i sottogruppi subnormali propri di H , non può aversi $K = H$, altrimenti da $T \cup B = TB$ per ogni $T \triangleleft \triangleleft H (T \subset H)$ discenderebbe anche $B \cup H = BH$. Pertanto $K \subset H$ ed H/K è semplice. Se $[H:K] \neq p$ (p numero primo), H sarebbe perfetto ed a norma di un teorema ⁶⁾ di H. Wielandt [4] $H \cup B = HB$. Deve quindi essere $[H:K] = p$; poichè H non è normale in G , la serie normale discendente di H in G

$$H = H_n \triangleleft H_{n-1} \triangleleft \dots \triangleleft H_0 = G$$

ha lunghezza $n > 1$. Esiste allora $x \in H_{n-2} - H_{n-1}$ tale che $H^x = x_{-1} H x \neq H$; essendo $H \triangleleft H_{n-1} \triangleleft H_{n-2}$, H e H^x sono entrambi normali in $H \cup H^x \subseteq H_{n-1}$, e, poichè G è un $\mathcal{M}$ -gruppo, $H \cap H^x$ è un sottogruppo proprio sia di H che di H^x . Segue

$$H \cup H^x / H \cap H^x = H / H \cap H^x \times H^x / H \cap H^x$$

ed, osservato che i gruppi $H / H \cap H^x$ ed $H^x / H \cap H^x$ contengono rispettivamente $K / H \cap H^x$ e $K^x / H \cap H^x$ come sottogruppi di indice p , si ha che $H \cup H^x / K \cup K^x$ è un gruppo di ordine p^2 non ciclico. Ma ciò è assurdo, onde l'asserto.

TEOREMA 5: *Sia G un $\mathcal{M}$ -gruppo. Sono equivalenti le proposizioni:*

a) *ogni catena normale di G ha ciclici i fattoriali di ordine quadrato di un numero primo.*

⁶⁾ Precisamente: Siano G un $\mathcal{M}$ -gruppo, H e K sottogruppi subnormali di G ; se H è perfetto, allora $J = H \cup K$ è uguale a MK con $M = \bigcap_{x \in J} H^x$.

b) $S(G)$ è distributivo.

DIM: $a) \implies b)$.

Valendo la $a)$, il lemma 5 assicura che $S(G)$ è modulare. Supposto per assurdo $S(G)$ non distributivo, la condizione di catena assicura l'esistenza di un sottoreticolo $\langle A, B, C \rangle$, in cui A, B, C coprono $A \cap B = B \cap C = A \cap C$ e sono coperti da $A \cup B = A \cup C = B \cup C$.

Allora

$$A \cup B/A \cap B = A/A \cap B \times B/A \cap B = A/A \cap B \times C/A \cap B = \\ B/A \cap B \times C/A \cap B$$

è abeliano. Ma $A/A \cap B \cong B/A \cap B \cong C/A \cap B$ sono gruppi semplici, quindi $A \cup B/A \cap B$ è un gruppo di ordine p^2 non ciclico; una contraddizione che prova la validità della $b)$.

$b) \implies a)$ Evidente.

BIBLIOGRAFIA

- [1] M. CURZIO-R. PERMUTTI - *Distributività nel reticolo dei sottogruppi normali di un T-gruppo*, Le Matematiche, Catania Vol. XX, fasc. 1 (1965) pp. 46-63.
- [2] D. S. ROBINSON - *Groups in which normality is a transitive relation*, Pro. Camb. Phil. Soc., 60 (1964), pp. 21-38.
- [3] D. S. ROBINSON - *Joins of subnormal subgroups*, Illinois Journal of Mat., Vol. 9 No. 1 (1965).
- [4] J. E. ROSEBLADE - *On certain subnormal coalition*, Journal of Algebra, Vol I, No 2, pp. 132-138.
- [5] G. ZACHER - *Sui gruppi finiti per cui il reticolo dei sottogruppi di composizione è distributivo*, Rend. del Sem. Mat. Univ. Padova, 27 (1957) pp. 75-79.
- [6] G. ZAPPA - *Sui gruppi finiti risolubili per cui il reticolo dei sottogruppi di composizione è distributivo*, Boll. Un. Mat. Ital., II (1956) pp. 150-157.
- [7] H. ZASSENHAUS - *The theory of groups*, Chelsea Pub., New York (1949).

N. B. - A lavoro ultimato ho appreso dal dottor R. Schmidt che il lemma 1 è contenuto nella dissertazione di H. Heineken.

Manoscritto pervenuto in redazione il 24 giugno 1966.