

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ADALBERTO ORSATTI

**Un lemma di immersione per i gruppi abeliani
senza elementi di altezza infinita**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 38 (1967), p. 1-13

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__38__1_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__38__1_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UN LEMMA DI IMMERSIONE PER I GRUPPI ABELIANI SENZA ELEMENTI DI ALTEZZA INFINITA.

ADALBERTO ORSATTI *)

INTRODUZIONE. Con la parola gruppo intendiamo gruppo abeliano; la notazione è quella additiva.

Ad ogni gruppo G si associano un gruppo G^* ed un omomorfismo $\varphi: G \rightarrow G^*$ in questo modo: per ogni numero primo p si considera il gruppo $G_p^* = (G/p^\infty G) \otimes Z_p$ — dove $p^\infty G$ è l'intersezione dei sottogruppi $p^n G$ ($n = 1, 2, \dots$) e Z_p è l'anello dei razionali il cui denominatore è primo con p — e si definisce in modo naturale l'omomorfismo $\varphi_p: G \rightarrow G_p^*$; allora G^* è il prodotto diretto (= somma diretta completa) dei gruppi G_p^* , al variare di p nell'insieme dei numeri primi, e φ è definito per mezzo degli omomorfismi φ_p . Si dimostra quindi il seguente lemma di immersione: φ è *iniettivo se e solo se* G è *senza elementi di altezza infinita*; *l'immagine* $\varphi(G)$ *di* φ *è pura in* G^* ; $G^*/\varphi(G)$ *è divisibile*. Si prova inoltre che per ogni omomorfismo di gruppi $f: G \rightarrow H$ esiste un unico omomorfismo $f^*: G^* \rightarrow H^*$ compatibile con f , e che $(G^*)^*$ è canonicamente isomorfo a G^* .

Una conseguenza immediata del lemma suddetto è la seguente: il completamento naturale $\widehat{G}$ di un gruppo G ([2], [5], [6]) è isomorfo a quello di G^* e cioè al prodotto diretto dei completamenti p -adici dei G_p^* . Come applicazione di questa proprietà, con metodi topologici elementari e facendo uso di alcuni risultati di Kaplansky [7] e Fuchs [4], si dimostrano due teoremi già stabiliti da D. K. Harrison con metodi omologici ([5], [6]). Precisamente:

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la Matematica del C. N. R.

Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

1) Se H è un sottogruppo puro del gruppo G , $\widehat{G}$ è isomorfo alla somma diretta dei completamenti di H e di G/H .

2) Se G è un gruppo ridotto e libero da torsione e se α_p , per ogni primo p , è la dimensione dello spazio vettoriale G/pG sul corpo con p elementi, $\widehat{G}$ è individuato dai cardinali α_p e dipende solo da essi.

L'autore ringrazia il dott. F. Menegazzo per le frequenti ed utili conversazioni sull'argomento.

1. Incominciamo con alcune notazioni e definizioni. Indichiamo con Z l'anello degli interi, con p un numero primo, con Z_p l'anello dei razionali il cui denominatore è primo con p , con i_p l'iniezione canonica di Z in Z_p . Siano N e P rispettivamente l'insieme degli interi positivi e quello dei numeri primi.

Sia G un gruppo. Denotiamo con $T(G)$ il sottogruppo di torsione di G e con $T_p(G)$ la componente p -primaria di $T(G)$. Siano $p^\infty G$ il sottogruppo di G formato dagli elementi di p -altezza infinita e G_∞ quello formato dagli elementi di altezza infinita:

$$p^\infty G = \bigcap_n p^n G, \quad G_\infty = \bigcap_n n G, \quad n \in N.$$

Risulta:

$$G_\infty = \bigcap_p p^\infty G, \quad p \in P.$$

La *topologia naturale* ([2], [5]) su G si definisce prendendo come base di intorno dello zero i sottogruppi nG , $n \in N$. G con questa topologia diventa un gruppo topologico, il quale risulta di Hausdorff se e solo se $G_\infty = 0$. Per questo motivo, oltre che per brevità, diremo che un gruppo G senza elementi di altezza infinita (tale cioè che $G_\infty = 0$) è un gruppo di Hausdorff. Osserviamo che un gruppo libero da torsione è di Hausdorff se e solo se esso è ridotto.

2. Sia G un gruppo qualunque. Moltiplicando tensorialmente per G la sequenza esatta di Z -moduli:

$$0 \rightarrow Z \xrightarrow{i_p} Z_p \rightarrow Z_p/Z \rightarrow 0$$

si ottiene la sequenza esatta:

$$G \xrightarrow{j_p} G \otimes Z_p \rightarrow G \otimes (Z_p/Z) \rightarrow 0$$

dove, per ogni $g \in G$, $j_p(g) = g \otimes 1$, $1 \in Z_p$. Chiameremo $G \otimes Z_p$ il p -localizzato di G e lo indicheremo con G_p . Per le proprietà dei moduli di frazioni, [1], il nucleo S_p di j_p è formato dagli elementi periodici di G il cui periodo è primo con p . Il conucleo $G_p/j_p(G)$ di j_p è un gruppo periodico divisibile e con componente p -primaria nulla, come si deduce dalla struttura di Z_p/Z e da alcune proprietà del prodotto tensoriale di gruppi ([3], pag. 251); $j_p(G)$ è p -puro, [4], in G_p .

Moltiplicando tensorialmente per Z_p la sequenza esatta $0 \rightarrow T(G) \rightarrow G \rightarrow G/T(G) \rightarrow 0$, in cui le mappe sono quelle naturali, si vede che $T(G_p)$ è isomorfo a $T_p(G)$. In particolare se G è periodico G_p è isomorfo alla componente p -primaria di G , mentre se G è libero da torsione j_p è iniettivo e G_p è un gruppo libero da torsione avente lo stesso rango di G .

Ogni elemento di G_p è divisibile per ogni intero non nullo primo con p ed il quoziente è unico. G_p , cioè, è uno Z_p -modulo (modulo = modulo unitario).

Sia H un sottogruppo di G . Poichè la moltiplicazione tensoriale per Z_p conserva le inclusioni, H_p è un sottogruppo di G_p ; inoltre:

P.1. Se H è p -puro in G , allora H_p è puro in G_p .

Questo si verifica direttamente tenendo conto del fatto che ogni elemento di G_p può scriversi nella forma $g \otimes \frac{1}{s}$, dove $g \in G$ ed s è un intero primo con p .

Il sottogruppo di G_p formato dagli elementi di altezza infinita coincide con $p^\infty G_p$ ed il gruppo $G_p/p^\infty G_p$ è di Hausdorff.

Per ogni gruppo G e per ogni numero primo p , indicheremo con G_p^* il gruppo $G_p/p^\infty G_p$ e con φ_p , oppure con φ_p^G , l'omomorfismo di G in G_p^* ottenuto componendo j_p con la proiezione canonica ϱ_p di G_p su G_p^* . Chiameremo G_p^* il p -localizzato di Hausdorff di G . Anche G_p^* è uno Z_p -modulo.

Si verifica facilmente che se G è libero da torsione $p^\infty G_p$ coincide con il sottogruppo divisibile massimale di G_p ed anche G_p^* è libero da torsione, mentre se G è periodico G_p^* è isomorfo a $T_p(G)/p^\infty T_p(G)$.

3. Moltiplichiamo tensorialmente per Z_p la sequenza esatta :

$$(1) \quad 0 \rightarrow p^\infty G \rightarrow G \xrightarrow{\delta_p} G/p^\infty G \rightarrow 0$$

nella quale le mappe sono quelle naturali. Mettiamo quindi in evidenza gli omomorfismi canonici dei gruppi della (1) nei rispettivi p -localizzati ed i nuclei di tali omomorfismi, ed osserviamo che il nucleo S_p di j_p è contenuto in $p^\infty G$. Otteniamo il seguente diagramma

$$(1') \quad \begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & S_p & \rightarrow & S_p & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & p^\infty G & \rightarrow & G & \xrightarrow{\delta_p} & G/p^\infty G \rightarrow 0 \\ & & \downarrow j_p & & \downarrow j_p & & \downarrow j_p' \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

$$0 \rightarrow (p^\infty G) \otimes Z_p \rightarrow G_p \xrightarrow{\beta_p} (G/p^\infty G) \otimes Z_p \rightarrow 0$$

che risulta commutativo e con righe e colonne esatte. Dimostriamo ora che

$$(2) \quad (p^\infty G) \otimes Z_p = p^\infty G_p.$$

È evidente che ogni elemento di $(p^\infty G) \otimes Z_p$ è contenuto in $p^\infty G_p$. Viceversa sia $g \otimes \frac{1}{s}$ ($g \in G, \frac{1}{s} \in Z_p$) un elemento di $p^\infty G_p$; allora $g \otimes 1$, che appartiene a $j_p(G)$, è divisibile in G_p per ogni potenza di p . Ricordando che $j_p(G)$ è p -puro in G_p , segue che $g \otimes 1$ ha p -altezza infinita in $j_p(G)$. Questo significa che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un elemento $g' \in G$ tale da aversi $p^n g' - g \in S_p \subseteq p^\infty G$. Allora g è divisibile per p^n in G ; quindi $g \in p^\infty G$ attesa l'arbitrarietà di n ; di conseguenza $g \otimes \frac{1}{s} \in (p^\infty G) \otimes Z_p$. La (2) è così provata.

Paragonando l'ultima riga del diagramma (1') con la sequenza esatta :

$$0 \rightarrow p^\infty G_p \rightarrow G_p \xrightarrow{e_p} G_p^* \rightarrow 0$$

dove e_p è la proiezione canonica di G_p su G_p^* , si vede che

esiste un unico isomorfismo γ_p di $(G/p^\infty G) \otimes Z_p$ su G_p^* tale che $\varrho_p = \gamma_p \circ \beta_p$. È lecito pertanto identificare, come noi faremo, $(G/p^\infty G) \otimes Z_p$ con G_p^* e φ_p con il prodotto delle mappe δ_p e j_p'' oppure delle mappe j_p e β_p .

Esaminando il diagramma (1') si riconosce subito che il nucleo di φ_p è $p^\infty G$, mentre il conucleo di φ_p è isomorfo al conucleo di j_p'' , e quindi al gruppo $(G/p^\infty G) \otimes (Z_p/Z)$ che è divisibile, periodico e con componente p -primaria nulla; $\varphi_p(G)$ è p -puro in G_p^* .

4. Per ogni gruppo G indichiamo con G^* il prodotto diretto (= somma diretta completa) dei gruppi G_p^* al variare di p in P :

$$G^* = \prod_p G_p^*, p \in P.$$

G^* è chiaramente un gruppo di Hausdorff. Per ogni $a \in G^*$ sia a_p la sua p -componente; consideriamo quindi l'omomorfismo $\varphi: G \rightarrow G^*$ così definito:

$$\varphi(g)_p = \varphi_p(g); g \in G, p \in P.$$

Chiameremo φ l'omomorfismo canonico di G in G^* e lo indicheremo anche con φ^G . Dimostriamo ora il seguente

LEMMA D'IMMERSIONE. *Siano G un gruppo, G^* il prodotto diretto dei suoi p -localizzati di Hausdorff G_p^* ($p \in P$), φ l'omomorfismo canonico di G in G^* . Allora:*

- 1) *il nucleo di φ è G_∞ , per cui φ è iniettivo se e solo se G è di Hausdorff;*
- 2) *$\varphi(G)$ è puro in G^* ;*
- 3) *$G^*/\varphi(G)$ è divisibile.*

DIMOSTRAZIONE. Risulta $\varphi(g) = 0$ ($g \in G$) se e solo se, per ogni $p \in P$, $\varphi_p(g) = 0$ cioè $g \in p^\infty G$. Dunque il nucleo di φ è G_∞ .

Sia ora p un numero primo arbitrario e supponiamo $p^n b = \varphi(g)$ con $n \in N$, $b \in G^*$, $g \in G$. Si ha allora in G_p^* : $p^n b_p = \varphi_p(g)$, da cui $b_p = \varphi_p(g')$, $g' \in G$ poichè, come è stato precedentemente osservato,

$G_*/\varphi_p(G)$ non ha elementi di periodo p . Abbiamo dunque: $p^n b_p = p^n \varphi_p(g') = \varphi_p(g)$, quindi $p^n g' - g \in p^\infty G$. Allora g è divisibile per p^n in G ; cioè $g = p^n g''$, $g'' \in G$. Risulta perciò:

$$p^n b = \varphi(g) = \varphi(p^n g'') = p^n \varphi(g'').$$

Abbiamo così provato che $\varphi(G)$ è p -puro in G^* per ogni $p \in P$: questo significa che $\varphi(G)$ è puro in G^* .

Dimostriamo infine che $G^*/\varphi(G)$ è divisibile. Allo scopo basta provare che esso è divisibile per un arbitrario numero primo q ; cioè che, fissato un elemento $b \in G^*$, esiste un elemento $b' \in G^*$ tale da aversi: $b - qb' \in \varphi(G)$. Ora b' esiste se e solo se esiste un elemento $a \in \varphi(G)$ tale che:

$$(3) \quad b - a \in q G^*$$

e questa condizione è verificata se e solo se, per ogni $p \in P$, risulta:

$$b_p - a_p \in q G_p^*.$$

Se $p \neq q$ le relazioni precedenti valgono qualunque sia l'elemento $a \in \varphi(G)$, poichè in tal caso $q G_p^* = G_p^*$. Basta dunque trovare un elemento $a \in \varphi(G)$ per il quale si abbia $b_q - a_q \in q G_q^*$. A questo punto ricordiamo che, come è stato osservato alla fine del n° precedente, $G_q^*/\varphi_q(G)$ è divisibile: pertanto $G_q^* = \varphi_q(G) + q G_q^*$ e quindi $b_q \in \varphi_q(G) + q G_q^*$ dove g è un opportuno elemento di G . Allora l'elemento $a = \varphi(g) \in \varphi(G)$ soddisfa la (3). Il lemma è così provato.

Osserviamo che G^* è naturalmente dotato di una struttura di Z^* -modulo, dove Z^* è l'anello prodotto diretto degli Z_p .

5. P.2. Siano G ed H gruppi, φ^G e φ^H gli omomorfismi canonici rispettivamente di G in G^* e di H in H^* . Allora per ogni omomorfismo $f: G \rightarrow H$ esiste un unico omomorfismo $f^*: G^* \rightarrow H^*$ tale che:

$$(4) \quad f^* \circ \varphi^G = \varphi^H \circ f$$

DIMOSTRAZIONE. Poichè $f(p^\infty G) \subseteq p^\infty H$, f induce, in modo naturale, un omomorfismo $f^{(p)}: G/p^\infty G \rightarrow H/p^\infty H$; l'omomorfismo

$f_p^*: G_p^* \rightarrow H_p^*$, ottenuto moltiplicando tensorialmente $f^{(p)}$ per l'identità su Z_p , è una estensione di $f^{(p)}$; risulta pertanto $f_p^* \circ \varphi_p^G = \varphi_p^H \circ f$. Allora l'omomorfismo $f^*: G^* \rightarrow H^*$ così definito:

$$f^*(a)_p = f_p^*(a_p) \quad (a \in G^*, p \in P)$$

verifica la (4). Sia $\bar{f}$ un altro omomorfismo di G^* in H^* soddisfacente la condizione $\bar{f} \circ \varphi^G = \varphi^H \circ f$; allora f^* ed $\bar{f}$ coincidono sopra l'immagine di φ^G . Introduciamo nei gruppi di Hausdorff G^* ed H^* la topologia naturale e ricordiamo che gli omomorfismi sono, per questa topologia, delle applicazioni continue, [2]. Per il lemma d'immersione il conucleo di φ^G è divisibile, quindi l'immagine di φ^G è un sottogruppo denso di G^* ([5], Lemma 3.5.). Allora f^* ed $\bar{f}$ sono due applicazioni continue dello spazio topologico G^* nello spazio di Hausdorff H^* le quali coincidono sopra un sottoinsieme denso di G^* ; di conseguenza, per un ben noto teorema di topologia generale, esse coincidono su tutto G^* . La dimostrazione è così completa.

Osserviamo che f^* è un omomorfismo di Z^* -moduli.

Per ogni omomorfismo f di gruppi siano $f^{(p)}, f_p^*, f^*$ gli omomorfismi individuati da f nel modo precedentemente descritto. Dimostriamo quindi le proposizioni seguenti:

P.3. *Se G è un gruppo ed f è la proiezione canonica di G su G/G_∞ , l'omomorfismo $f^*: G^* \rightarrow (G/G_\infty)^*$ è un isomorfismo.*

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che il sottogruppo degli elementi di p -altezza infinita di G/G_∞ è $(p^\infty G)/G_\infty$. Pertanto $f^{(p)}$ e, di conseguenza, f_p^* sono isomorfismi. Allora anche f^* è un isomorfismo.

P.4. *Siano G un gruppo, H un sottogruppo puro di G , f l'iniezione canonica di H in G ; allora, per ogni $p \in P$, l'omomorfismo $f_p^*: H_p^* \rightarrow G_p^*$ è iniettivo e la sua immagine è un sottogruppo puro di G_p^* . Di conseguenza f^* è iniettivo e la sua immagine è un sottogruppo puro di G^* .*

DIMOSTRAZIONE. Poichè $p^\infty H = (p^\infty G) \cap H$, $f^{(p)}$ è iniettivo e la sua immagine coincide con $(H + p^\infty G)/p^\infty G$ il quale è un sottogruppo p -puro di $G/p^\infty G$. Passando ai p -localizzati di $H/p^\infty H$ e di

$G/p^\infty G$, l'immagine di $f^{(p)}$ va nell'immagine di f_p^* che è pura in G_p^* per la P.1. Infine f_p^* è iniettivo poichè la moltiplicazione tensoriale per Z_p conserva le iniezioni.

6. Richiamiamo brevemente alcune proprietà della topologia naturale.

Sia G un gruppo di Hausdorff dotato di questa topologia. Il completamento naturale $\widehat{G}$ di G è il completamento del gruppo G rispetto alla struttura uniforme (generabile con una metrica) indotta dalla topologia naturale. La topologia di $\widehat{G}$ è ancora la topologia naturale, $\widehat{G}$ è uno $\widehat{Z}$ -modulo (dove $\widehat{Z}$ indica il completamento di Z) e G si può identificare con un sottogruppo puro e denso di $\widehat{G}$, [2].

Sia H un sottogruppo di G : se H è puro in G , la topologia relativa di H coincide con la topologia naturale ed $\widehat{H}$ si può identificare con la chiusura di H in $\widehat{G}$, [2]; H è denso in G se e solo se G/H è divisibile, [5]; se H è puro e denso in G allora $\widehat{H} \cong \widehat{G}$, [2].

In particolare, se G è uno Z_p -modulo, la sua topologia naturale coincide con la topologia p -adica, definita prendendo come base di intorno dello zero i sottogruppi $p^n G$ ($n \in N$), e $\widehat{G}$ è uno $\widehat{Z}_p$ -modulo; $\widehat{Z}_p$ è l'anello degli interi p -adici.

Se G non è di Hausdorff chiameremo completamento naturale di G , e lo indicheremo ancora con $\widehat{G}$, il completamento naturale del gruppo di Hausdorff G/G_∞ . In ogni caso $\widehat{G}$ è di Hausdorff ed è isomorfo al limite proiettivo dei gruppi G/nG ($n \in N$) rispetto agli omomorfismi naturali $G/nG \rightarrow G/mG$, $nG \subseteq mG$, [6].

7. La proposizione seguente è un corollario immediato del lemma d'immersione.

P.5. *Il completamento naturale di un gruppo G è isomorfo a quello di G^* .*

Infatti G/G_∞ è isomorfo ad un sottogruppo puro e denso di G^* .

Chiameremo G^* il *pre-completamento naturale* di G . Questa definizione ci sembra giustificata anche dalle considerazioni seguenti:

1) Sia $f: G \rightarrow H$ un omomorfismo di gruppi: esiste un unico omomorfismo $f^*: G^* \rightarrow H^*$ di Z^* -moduli compatibile con f , come

risulta dalla P.2. Il carattere funtoriale della corrispondenza che associa G^* a G ed f^* ad f è manifesto.

2) $(G^*)^*$ è isomorfo a G^* . Infatti $p^\infty G^*$ è formato dagli elementi di G^* la cui p -componente è nulla; quindi $G^*/p^\infty G^*$ è isomorfo a G_p^* il quale, essendo uno Z_p -modulo, coincide con il suo p -localizzato.

Sia A un anello con unità. Definiamo A_p^* ed A^* a partire dal gruppo additivo di A ed osserviamo che $p^\infty A$ è un ideale di A . La moltiplicazione di $A/p^\infty A$ si estende canonicamente ad A_p^* che risulta così un anello. Se (il gruppo additivo di) A è di Hausdorff, la moltiplicazione di cui è dotato A^* in quanto prodotto diretto degli anelli A_p^* è una estensione di quella di A . Tale estensione è unica.

Si vede così che le proprietà del completamento naturale di un gruppo G , o di un anello A , di Hausdorff esposte nel Lemma 1.4. di [2] sono anche proprietà del pre-completamento. In particolare G^* è libero da torsione se G è libero da torsione; A^* ha la stessa unità di $\varphi(A)$ ed è commutativo se A è commutativo.

Per ogni gruppo G , la struttura di $\widehat{G}$ è determinata da quella di G^* nel modo seguente.

TEOREMA 1. *Il completamento naturale di un gruppo G è isomorfo al prodotto diretto dei completamenti dei p -localizzati di Hausdorff di G :*

$$\widehat{G} \cong \prod_p \widehat{G}_p^* \quad (p \in P)$$

DIMOSTRAZIONE. Il ragionamento è analogo a quello usato in [2] per determinare la struttura di $\widehat{Z}$. Poniamo $K = \prod_p \widehat{G}_p^* \quad (p \in P)$ ed osserviamo che se n è un intero positivo primo con p risulta $n \widehat{G}_p^* = \widehat{G}_p^*$ poichè $\widehat{G}_p^*$ è uno $\widehat{Z}_p$ -modulo. Pertanto in K la topologia naturale coincide con la topologia prodotto delle topologie naturali dei $\widehat{G}_p^*$. Allora K , in quanto prodotto topologico di spazi uniformi completi, è completo. Per ogni $p \in P$, G_p^* è isomorfo ad un sottogruppo puro e denso di $\widehat{G}_p^*$; per cui G^* è isomorfo ad un sottogruppo puro e denso di K . Quindi $\widehat{G^*} \cong K$ e la conclusione segue dalla P.5.

Per ogni $p \in P$, si può definire il *completamento p -adico* di un gruppo G come il completamento di $G/p^\infty G$ rispetto alla struttura uniforme di Hausdorff indotta dalla topologia p -adica. $G/p^\infty G$ è isomorfo a $\varphi_p(G)$, $\varphi_p(G)$ è p -puro in G_p^* , il quale è uno $\mathbb{Z}_p$ -modulo, ed il gruppo $G_p^*/\varphi_p(G)$ è p -divisibile: quindi tale completamento è isomorfo a $\widehat{G}_p^*$. Pertanto dal teorema 1 discende il seguente

COROLLARIO. *Il completamento naturale di un gruppo è isomorfo al prodotto diretto dei suoi completamenti p -adici, al variare di p in P .*

8. A titolo di applicazione dei risultati precedenti dimostreremo ora due teoremi già provati per altra via da D. K. Harrison ([5], [6]).

TEOREMA 2. *Siano G un gruppo di Hausdorff ed H un sottogruppo puro di G . Allora $\widehat{H}$ è un sommando diretto di $\widehat{G}$ e $(G/H)^\wedge$ è isomorfo ad un sommando diretto di $\widehat{G}$ complementare di $\widehat{H}$.*

OSSERVAZIONE. Nell'enunciato e nella dimostrazione di questo teorema si considera G come sottogruppo puro e denso di $\widehat{G}$, identificando $\widehat{H}$ con la chiusura di H in $\widehat{G}$.

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $p \in P$ possiamo identificare, per la P.4, H_p^* con un sottogruppo puro di $(G_p^*$ e quindi di) $\widehat{G}_p^*$. Con lo stesso ragionamento usato nella dimostrazione del Lemma 20 di [7] si vede che anche $\widehat{H}_p^*$ è puro in $\widehat{G}_p^*$; pertanto ([7], Teorema 23) $\widehat{H}_p^*$ è un sommando diretto di $\widehat{G}_p^*$. Allora, per il teorema 1, $\widehat{H}$ è un sommando diretto di $\widehat{G}$.

Il completamento del gruppo $B = G/H$ è per definizione il completamento del gruppo di Hausdorff B/B_∞ . Osserviamo che un elemento $a \in G$ rappresenta un elemento di B_∞ se e solo se, per ogni $n \in N$, esistono un elemento $g_n \in G$ ed uno $h_n \in H$ tali da aversi: $a - ng_n = h_n$. Questo significa che a è limite della successione $\{h_n, n \in N\}$ di elementi di H . Pertanto $B/B_\infty = G/\overline{H}$ dove $\overline{H}$ è la chiusura di H in G , cioè: $\overline{H} = G \cap \widehat{H} \subseteq \widehat{H}$. Consideriamo ora la proiezione canonica $f: G \rightarrow G/\overline{H}$. Essa si estende per continuità ad un

omomorfismo $\widehat{f}: \widehat{G} \rightarrow (G/\overline{H})^\wedge = (\widehat{G/H})^\wedge$. Poiché $\widehat{f}$ è continuo e $(G/\overline{H})^\wedge$ è di Hausdorff, il nucleo $\text{Ker } \widehat{f}$ di $\widehat{f}$ contiene la chiusura di H in $\widehat{G}$, cioè $\text{Ker } \widehat{f} \supseteq \widehat{H}$. Siano x un elemento di $\text{Ker } \widehat{f}$ e $\{x_n, n \in N\}$ una successione di elementi di G convergente verso x . Allora la successione $\{f(x_n)\}$ converge verso lo zero e si può supporre che $f(x_n) \in n(G/\overline{H}) = n f(G)$. Esistono perciò, per ogni $n \in N$, un elemento $g_n \in G$ ed uno $h_n \in \overline{H} \subseteq \widehat{H}$ tali da aversi $x_n - ng_n = h_n$; quindi la successione $\{h_n\}$ converge verso x il quale pertanto appartiene ad $\widehat{H}$. Dunque $\text{Ker } \widehat{f} = \widehat{H}$. Per la prima parte del teorema, $\widehat{f}(\widehat{G})$ è isomorfo ad un sommando diretto K di $\widehat{G}$ complementare di $\widehat{H}$: $\widehat{G} = \widehat{H} \oplus K$. Si verifica immediatamente che la topologia naturale di $\widehat{G}$ è la topologia prodotto delle topologie naturali di $\widehat{H}$ e di K , quindi ([8], Teorema 25, Cap. 6) K è completo. Allora $\widehat{f}(\widehat{G})$ è completo, contiene $(G/\overline{H})$ come sottogruppo puro ed è contenuto in $(G/\overline{H})^\wedge$; pertanto $\widehat{f}(\widehat{G}) = (G/\overline{H})^\wedge$.

Per ogni numero cardinale α sia $\Gamma_p(\alpha)$ il prodotto diretto di α gruppi ciascuno isomorfo al gruppo degli interi p -adici (se $\alpha = 0$, $\Gamma_p(\alpha) = 0$); per ogni gruppo G indichiamo con $\alpha_p(G)$ la dimensione dello spazio vettoriale G/pG sul corpo Z/pZ . Possiamo ora enunciare il

TEOREMA 3. *Il completamento naturale di un gruppo ridotto e libero da torsione G è isomorfo ad un sommando diretto del prodotto diretto Γ dei gruppi $\Gamma_p(\alpha_p(G))$, $p \in P$; se poi tutti gli α_p sono finiti si ha $\widehat{G} \cong \Gamma$.*

Due gruppi ridotti e liberi da torsione G ed H hanno completamenti isomorfi se e solo se $\alpha_p(G) = \alpha_p(H)$ per ogni $p \in P$.

La dimostrazione si conduce in questo modo: si prova prima il teorema quando la topologia naturale coincide con quella p -adica, nel qual caso i gruppi liberi da torsione sono Z_p -moduli; quindi si applica il teorema 1.

Dimostriamo pertanto le proposizioni seguenti.

P.6. Se M è uno Z_p -modulo ridotto e libero da torsione, $\widehat{M}$ è isomorfo al completamento naturale di uno Z_p -modulo libero di rango $\alpha_p(M)$. Due Z_p -moduli ridotti e liberi da torsione L ed M hanno completamenti isomorfi se e solo se $\alpha_p(L) = \alpha_p(M)$.

DIMOSTRAZIONE. Sia S un sistema di elementi di M rappresentante una base dello spazio vettoriale M/pM . Si verifica immediatamente che S , nel gruppo M , è un sistema massimale di elementi p -indipendenti, [4]. Pertanto il sottogruppo B generato da S è libero di rango $\alpha_p(M)$, è p -puro in M ed il gruppo M/B è p -divisibile ([4], Lemma 3). Poichè gli elementi di S sono indipendenti sopra Z , essi sono indipendenti anche sopra Z_p ; quindi il sotto- Z_p -modulo B_p generato da S è libero di rango $\alpha_p(M)$; inoltre B_p è puro in M ed M/B_p è divisibile. Allora $\widehat{B}_p \cong \widehat{M}$. La seconda parte della proposizione è conseguenza della prima e del fatto che, essendo M puro e denso in $\widehat{M}$, risulta: $M/pM = M/(M \cap p\widehat{M}) \cong (M + p\widehat{M})/p\widehat{M} = \widehat{M}/p\widehat{M}$.

P.7. Se M è uno Z_p -modulo ridotto e libero da torsione, $\widehat{M}$ è isomorfo ad un sommando diretto di $\Gamma_p(\alpha_p(M))$. Se poi $\alpha_p(M)$ è finito, si ha $\widehat{M} \cong \Gamma_p(\alpha_p(M))$.

DIMOSTRAZIONE. Poniamo $\Gamma = \Gamma_p(\alpha_p(M))$ e sia K uno Z_p -modulo libero di rango $\alpha_p(M)$. Si ha: $K = \sum_i K_i$, $i \in I$, dove l'insieme indicante I ha cardinale $\alpha_p(M)$ e K_i è isomorfo al gruppo additivo di Z_p per ogni $i \in I$. Per mezzo delle inclusioni naturali $K = \sum_i K_i \subseteq \prod_i K_i \subseteq \prod_i \widehat{K}_i = \Gamma$ si vede che K è un sottogruppo puro di Γ . Osserviamo ora che Γ è completo nella topologia naturale.

Dopo aver identificato Γ con un sottogruppo puro e denso di $\widehat{\Gamma}$, siano ξ un elemento di $\widehat{\Gamma}$ e $\{\xi_n, n \in N\}$ una successione di Cauchy in Γ convergente verso ξ in $\widehat{\Gamma}$. Per ogni $i \in I$, la successione $\{\xi_{n,i}\}$, ottenuta proiettando su $\widehat{K}_i$ la $\{\xi_n\}$, è di Cauchy in $\widehat{K}_i$, quindi converge verso un elemento $f_i(\xi) \in \widehat{K}_i$ e si verifica subito che $f_i(\xi)$ non varia sostituendo la successione $\{\xi_n\}$ con un'altra di Cauchy in Γ e convergente verso ξ in $\widehat{\Gamma}$. In particolare, se $\xi \in \Gamma$, $f_i(\xi)$ coincide con la i -com-

ponente ξ_i di ξ . Abbiamo così un omomorfismo $f_i: \widehat{\Gamma} \rightarrow \widehat{K}_i$. L'omomorfismo $f: \widehat{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ definito dalle relazioni $f(\xi)_i = f_i(\xi)$, $i \in I$, subordina sopra Γ l'identità; pertanto Γ è un sommando diretto di $\widehat{\Gamma}$, quindi Γ è completo e $\Gamma = \widehat{\Gamma}$. Allora, per il teorema 2, $\widehat{K}$ è un sommando diretto di Γ e, per la P.6, $\widehat{K} \cong \widehat{M}$. Se $\alpha_p(M)$ è finito, $K = \prod_i K_i$ e $\prod_i K_i$ è puro e denso in $\prod_i \widehat{K}_i = \Gamma$; dunque $\widehat{M} \cong \Gamma$.

P.8. Se G è un gruppo di Hausdorff, i gruppi G/pG e G_p^*/pG_p^* sono isomorfi per ogni $p \in P$.

DIMOSTRAZIONE. Moltiplichiamo tensorialmente per Z/pZ la sequenza esatta

$$0 \rightarrow G \xrightarrow{\varphi} G^* \rightarrow G^*/\varphi(G) \rightarrow 0;$$

$\varphi(G)$ è puro in G^* ed il prodotto tensoriale di un gruppo divisibile per uno di torsione è nullo: dunque $G/pG \cong G^*/pG^*$. D'altra parte G^*/pG^* è chiaramente isomorfo a G_p^*/pG_p^* .

Il teorema 3 è ora una conseguenza immediata del teorema 1, delle proposizioni precedenti e del fatto che, per ogni $p \in P$, risulta $G/pG \cong \widehat{G/pG}$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] N. BOURBAKI, *Algebre commutative*, Ch. I. Paris 1961.
- [2] A. L. S. CORNER, *Every countable reduced torsion-free ring is an endomorphism ring*. Proc. London Math. Soc. (3) 13 (1963) 687-710.
- [3] L. FUCHS, *Abelian groups*, Budapest 1958.
- [4] L. FUCHS, *Notes on abelian groups. II*. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 11 (1960) 117-125.
- [5] D. K. HARRISON, *Infinite abelian groups and homological methods*, Annals of Math. 69 (1959) 366-91.
- [6] D. K. HARRISON, *On the structure of Ext*. Topics in abelian groups, Edited by J. M. Irwin and E. A. Walker (1963) 195-209.
- [7] I. KAPLANSKY, *Infinite abelian groups* (Ann. Arbor 1954).
- [8] J. KELLEY, *General topology*. (1955).