

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

M. MIRANDA

Sulle singolarità delle frontiere minimali

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 38 (1967), p. 180-188

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__38__180_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__38__180_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SULLE SINGOLARITÀ DELLE FRONTIERE MINIMALI

M. MIRANDA ^{*)}

Per le definizioni e le notazioni rinviamo a [5].

In questo lavoro si prova che la dimensione di Hausdorff dell'insieme delle singolarità di una frontiera minimale n -dimensionale, approssimabile in L^1_{loc} con ipersuperfici minimali cartesiane analitiche non può superare $n-2$.

Ringrazio Ennio De Giorgi con il quale ho discusso i risultati di questo lavoro.

1. Estendendo un risultato di Triscari (v. Teorema V di [8]) per le funzioni caratteristiche d'insieme dimostriamo il

TEOREMA 1. *Sia $\Omega \subset R^n$ aperto e $f \in BV_{\text{loc}}(\Omega)$. Indicata con f^* la funzione definita in $\Omega \times R$ da*

$$f^*(x, y) = f(x), \quad \text{per} \quad x \in \Omega, \quad y \in R,$$

si ha che f ha gradiente minimale in Ω se e solo se f^ ha gradiente minimale in $\Omega \times R$.*

DIM. Ricordiamo (v. § 3 di [4]) che se per $g \in BV_{\text{loc}}(\Omega \times R)$ e $A \subset \Omega \times R$ aperto si pone

$$(1.1) \quad \int_A |D_x g| = \sup \left\{ \int \left(g \sum_{i=1}^n D_i \alpha_i \right) dx dy; \alpha_i \in C_0^1(A), \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \leq 1 \right\},$$

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università, Pisa.

^{*)} Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca del Comitato Nazionale per la Matematica del C. N. R..

si ha (cfr. Teor. 3.3 di [4])

$$(1.2) \quad \int_A |D_x g| = \int_R dy \int_{A_y} |Dg_y|,$$

dove si è posto, per ogni $y \in R$, $A_y = \{x; x \in R^n, (x, y) \in A\}$ e $g_y(x)$ è la funzione definita in A_y dalla relazione $g_y(x) = g(x, y)$. Dalla (1.2) si ricava, se $\Omega_0 \subset \Omega$ è aperto e $I \subset R$ è un intervallo,

$$(1.3) \quad \int_{\Omega_0 \times I} |Df^*| = \int_{\Omega_0 \times I} |D_x f^*| = \int_I dy \int_{\Omega_0} |Df| = \text{mis } I \cdot \int_{\Omega_0} |Df|.$$

Cominciamo allora col provare che se f ha gradiente minimale in Ω allora f^* ha gradiente minimale in $\Omega \times R$. Si tratta di far vedere che per ogni compatto $K \subset \Omega \times R$ e ogni $g \in BV_{\text{loc}}(\Omega \times R)$ con $g = f^*$ in $\Omega \times R - K$ vale

$$(1.4) \quad \int_K |Df^*| \leq \int_K |Dg|.$$

Fissati K e g sia Ω_0 un aperto relativamente compatto in Ω e I un intervallo di R tali che

$$(1.5) \quad \Omega_0 \times I \supset K.$$

Si avrà allora, per le (1.1) e (1.2),

$$(1.6) \quad \int_{\Omega_0 \times I} |Dg| \geq \int_{\Omega_0 \times I} |D_x g| = \int_I dy \int_{\Omega_0} |Dg_y|.$$

Per la proprietà di minimo di f essendo

$$(1.7) \quad \int_{\Omega_c} |Df| \leq \int_{\Omega_0} |Dg_y|, \quad \forall y \in R,$$

dalle (1.3) e (1.6) si ricava

$$(1.8) \quad \int_{\Omega_0 \times I} |Df^*| \leq \int_{\Omega_0 \times I} |Dg|.$$

Poichè vale ovviamente

$$(1.9) \quad \int_{\Omega_0 \times I-K} |Df^*| = \int_{\Omega_0 \times I-K} |Dg|,$$

dalle (1.5) e (1.8) si ricava la (1.4).

Proviamo ora che se f^* ha gradiente minimale in $\Omega \times R$ allora f ha gradiente minimale in Ω . Si tratta di far vedere che per ogni compatto $K \subset \Omega$ e ogni $g \in BV_{\text{loc}}(\Omega)$ con $g = f$ in $\Omega - K$ si ha

$$(1.10) \quad \int_K |Df| \leq \int_K |Dg|.$$

Fissati K e g , per ogni $\varrho > 0$ poniamo

$$g_\varrho(x, y) = \begin{cases} f(x), & \text{per } y \geq \varrho \text{ oppure } y \leq 0, \\ g(x), & \text{per } 0 < y < \varrho, \end{cases}$$

e indichiamo con Ω_0 un aperto relativamente compatto in Ω verificante

$$(1.11) \quad \Omega_0 \supset K.$$

Per la proprietà di minimo di f^* , se si indica con I_ϱ l'intervallo chiuso $(0, \varrho)$, si ha

$$(1.12) \quad \int_{\Omega_0 \times I_\varrho} |Dg_\varrho| \geq \int_{\Omega_0 \times I_\varrho} |Df^*| = \varrho \cdot \int_{\Omega_0} |Df|.$$

D'altra parte vale

$$(1.13) \quad \int_{\Omega_0 \times I_\varrho} |Dg_\varrho| \leq \int_{\Omega_0 \times I_\varrho} |D_x g_\varrho| + \int_{\Omega_0 \times I_\varrho} |D_{n+1} g_\varrho|,$$

e per il Teor. 3.3 di [4] e la definizione di g_ϱ si ha

$$(1.14) \quad \int_{\Omega_0 \times I_\varrho} |D_{n+1} g_\varrho| = \int_{\Omega_0} dx \int_{I_\varrho} |D_{n+1} g_\varrho| = 2 \int_{\Omega_0} |f(x) - g(x)| dx,$$

mentre per le (1.2) e la definizione di g_ϱ si ha

$$(1.15) \quad \int_{\Omega_0 \times I_\varrho} |D_x g_\varrho| = \varrho \cdot \int_{\Omega_0} |Dg|.$$

Dalle (1.12), (1.13), (1.14) e (1.15) si ricava allora

$$(1.16) \quad \varrho \int_{\Omega_0} |Df| \leq \varrho \int_{\Omega_0} |Dg| + 2 \int_{\Omega_0} |f(x) - g(x)| dx,$$

da cui, per l'arbitrarietà di ϱ , segue

$$(1.17) \quad \int_{\Omega_0} |Df| \leq \int_{\Omega_0} |Dg|.$$

Poichè vale ovviamente

$$(1.18) \quad \int_{\Omega_0 - K} |Df| = \int_{\Omega_0 - K} |Dg|.$$

dalle (1.17) e (1.11) segue la (1.10).

c. v. d.

2. Ricordiamo (v. [5]) che un insieme $E \subset R^n$ ha frontiera minimale nell'aperto $\Omega \subset R^n$ se la sua funzione caratteristica ha gradiente minimale in Ω . Ricordiamo inoltre (v. Teor. 6.5 di [5]) che se la frontiera di E è minimale in Ω allora $\mathcal{F}E \cap \Omega$ risulta costituita di una parte singolare N , chiusa in Ω , e avente misura $(n-1)$ -dimensionale nulla e di una parte regolare che è una ipersuperficie analitica. Allora in ogni punto regolare di $\mathcal{F}E \cap \Omega$ si possono considerare le curvature dell'ipersuperficie $\mathcal{F}E \cap \Omega$. Indicheremo allora (v. [6], § 4) con γ_E la misura su Ω definita da

$$(2.1) \quad \gamma_E(B) = \int_{B \cap (\mathcal{F}E - N)} c^2 dH_{n-1}, \quad \forall B \subset \Omega \text{ di Borel},$$

dove c^2 indica la somma dei quadrati delle curvature principali di $\mathcal{F}E \cap \Omega$.

In [6] è stato provato (v. Teor. 6 di [6]) che la misura γ_E è semi-continua (sugli aperti) rispetto alla convergenza in L^1_{loc} per l'insieme E . Utilizzando questo risultato possiamo provare il seguente

TEOREMA 2. *Per ogni intero $n > 4$ ⁽¹⁾ esiste una costante positiva $\delta(n)$ tale che: se $E \subset R^n$ ha frontiera minimale nell'aperto $\Omega \subset R^n$, se x_0 è un punto singolare di $\mathcal{F}E \cap \Omega$ e $\varrho \leq \text{dist}(x_0, \partial\Omega)$, allora si ha*

$$(2.2) \quad \gamma_E(\{x; |x - x_0| < \varrho\}) \geq \delta(n) \varrho^{n-3}.$$

DIM. Supponiamo per assurdo che per un intero n la costante $\delta(n)$ non esista. In tale caso, essendo l'espressione

$$\varrho^{3-n} \gamma_E(\{x; |x - x_0| < \varrho\})$$

invariante per traslazioni e omotetie, si può costruire una successione di insiemi $\{E_h\}$ aventi frontiera minimale in $\{x; |x| < 1\}$ e tali che l'origine sia punto singolare per $\mathcal{F}E_h$ e per i quali valga

$$(2.3) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \gamma_{E_h}(\{x; |x| < 1\}) = 0.$$

Poiché le frontiere $\mathcal{F}E_h$ sono minimali in $\{x; |x| < 1\}$ si ha (v. formula (3.11) di [5])

$$(2.4) \quad \int_{\{x; |x| < 1\}} |D\varphi_{E_h}| \leq \frac{1}{2} n \omega_n, \quad \forall h \quad (\omega_n = \text{mis} \{x; |x| < 1\}).$$

Dalla (2.4) segue allora (v. Teor. I di [2]) che la successione $\{E_h\}$ è compatta in $L^1(\{x; |x| < 1\})$ e possiamo allora supporre che essa converga in $L^1(\{x; |x| < 1\})$ verso un insieme E . Per il Teor. 3 di [6] la $\mathcal{F}E$ risulta essere minimale in $\{x; |x| < 1\}$, per l'Osservazione 5 e il Teorema 4 di [6] l'origine è punto singolare di $\mathcal{F}E$, ed infine per il Teorema 6 di [6] dalla (2.3) si ricava

$$(2.5) \quad \gamma_E(\{x; |x| < 1\}) = 0.$$

¹⁾ Per $n \leq 4$ le frontiere minimali non hanno punti singolari. Il risultato è dovuto a Triscari [8] per $n = 3$ e ad Almgren [1] per $n = 4$.

Mostriamo ora, riprendendo un ragionamento che si trova in [7], come dall'insieme E si possa passare ad un cono E^* avente le sue stesse caratteristiche, ovvero avente frontiera minimale in R^n , avente l'origine come punto singolare della frontiera e verificante la

$$(2.6) \quad \gamma_{E^*}(R^n) = 0.$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ indichiamo con E_ε l'insieme $\{x: \varepsilon x \in E\}$. Avremo allora ovviamente che $\mathcal{F} E_\varepsilon$ è minimale in $\left\{x; |x| < \frac{1}{\varepsilon}\right\}$, ha l'origine come punto singolare e verifica

$$(2.7) \quad \gamma_{E_\varepsilon}\left(\left\{x; |x| < \frac{1}{\varepsilon}\right\}\right) = 0.$$

Dalla ricordata formula (3.11) di [5] si ha allora

$$(2.8) \quad \int_{\{x; |x| < \varrho\}} |D \varphi_{E_\varepsilon}| \leq \frac{1}{2} n \omega_n \varrho^{n-1}, \quad \forall \varrho < \frac{1}{\varepsilon}.$$

Dal Teor. 1.7 di [3] si ha che ogni successione $\{E_{\varepsilon_i}\}_i$ con $\varepsilon_i > 0$ e $\varepsilon_i \rightarrow 0$ è compatta in $L^1_{\text{loc}}(R^n)$ e quindi possiamo determinarne una, che indicheremo ancora con $\{E_{\varepsilon_i}\}$, convergente in $L^1_{\text{loc}}(R^n)$ verso un insieme E^* . Per i già citati risultati di [6] la $\mathcal{F} E^*$ risulta essere minimale in R^n , singolare nell'origine e verificante la (2.6). Oltre a ciò, per l'Osservazione 3 di [6], si ha

$$(2.9) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\{x; |x| < t\}} |D \varphi_{E_{\varepsilon_i}}| = \int_{\{x; |x| < t\}} |D \varphi_{E^*}|,$$

per quasi tutti i $t \in R$ ($t > 0$).

Ma poiché vale

$$(2.10) \quad \int_{\{x; |x| < t\}} |D \varphi_{E_{\varepsilon_i}}| = \varepsilon_i^{-n+1} \int_{\{x; |x| < \varepsilon_i t\}} |D \varphi_E|,$$

e poiché esiste (v. Cor. 2.6 di [5])

$$(2.11) \quad \lim_{\varrho \rightarrow 0+} \varrho^{1-n} \int_{\{x; |x| < \varrho\}} |D \varphi_E| = \alpha,$$

si ha, dalla (2.9),

$$(2.12) \quad t^{1-n} \int_{\{x; |x| < t\}} |D \varphi_{E^*}| = \alpha,$$

per quasi tutti i $t \in R$ ($t > 0$).

Dalla (2.12) si ricava (v. Teor. 2.5 di [5]) che E^* è un cono di vertice 0.

$\mathcal{F}E^*$ essendo un cono minimale e verificando la (2.6) non può essere singolare in un sol punto, deve quindi esistere un $x_0 \neq 0$ che sia punto singolare di $\mathcal{F}E^*$. Indicato allora, per $\varepsilon > 0$, con E_ε^* l'insieme $\{x; \varepsilon(x - x_0) \in E^*\}$ si ha, ragionando come abbiamo fatto più sopra, che esiste una successione $\{E_{\varepsilon_i}^*\}_i$, con $\varepsilon_i > 0$ e $\varepsilon_i \rightarrow 0$, convergente verso un insieme E^{**} . L'insieme E^{**} risulterà allora essere un cilindro con asse parallelo al segmento Ox_0 e la sua sezione ortogonale L sarà un cono di R^{n-1} . $\mathcal{F}E^{**}$ sarà minimale, singolare nell'origine e varrà

$$(2.13) \quad \gamma_{E^{**}}(R^n) = 0,$$

allora anche L sarà minimale in R^{n-1} (v. Teor. 1) singolare nella origine e verificherà ovviamente

$$(2.14) \quad \gamma_L(R^{n-1}) = 0.$$

Ripetendo queste considerazioni si prova che per ogni intero s con $3 \leq s \leq n$ esiste in R^s un cono singolare nell'origine e avente frontiera minimale. Questo fatto è però in contraddizione coi risultati di Triscari [8] e Almgren [1], e quindi è assurdo supporre che esista un intero n per cui la tesi del teorema non sia valida, e perciò il Teorema 2 è completamente dimostrato.

c. v. d.

3. Dal Teorema 2, tenuto conto del Teorema 7 di [6], si ricava la seguente valutazione dell'insieme delle singolarità delle frontiere minimali approssimabili in L_{loc}^1 con ipersuperfici cartesiane analitiche minimali.

TEOREMA, 3. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e $\{(x, f_h(x)); x \in \Omega\}$ una successione di ipersuperfici cartesiane minimali analitiche. La successione d'insiemi $\{(x, y); x \in \Omega, y < f_h(x)\}$ converge in $L^1_{\text{loc}}(\Omega \times \mathbb{R})$ verso un insieme E . Detto allora N l'insieme dei punti singolari di $\mathcal{F}E \cap (\Omega \times \mathbb{R})$, si ha, per ogni compatto $K \subset \Omega \times \mathbb{R}$

$$(3.1) \quad H_{n-2}(N \cap K) < \infty,$$

DIM. Fissati K e $\varrho < \text{dist}(K, \partial(\Omega \times \mathbb{R}))$ sia $\{x_i\}$ un insieme di punti di $K \cap N$ tali che

$$(3.2) \quad \{x; |x - x_i| < \varrho, |x - x_j| < \varrho\} = \emptyset, \text{ per } i \neq j,$$

$$(3.3) \quad N \cap K \subset \bigcup_i \{x; |x - x_i| < 2\varrho\}.$$

Avremo allora

$$(3.4) \quad \sum_i \gamma_E(\{x; |x - x_i| < \varrho\}) \leq \gamma_E(\{x; \text{dist}(x, K \cap N) < \varrho\}).$$

D'altra parte dal Teorema 2 si ricava

$$(3.5) \quad \sum_i \gamma_E(\{x; |x - x_i| < \varrho\}) \geq m(\varrho) \varrho^{n-2} \delta(n+1),$$

dove $m(\varrho)$ indica il numero dei punti x_i .

Dalle (3.4) e (3.5) si ha

$$(3.6) \quad m(\varrho) \varrho^{n-2} \leq [\delta(n+1)]^{-1} \gamma_E(\{x; \text{dist}(x, K \cap N) < \varrho\}).$$

Poichè dal Teorema 7 di [6] si ha ovviamente

$$(3.7) \quad \lim_{\varrho \rightarrow 0+} \gamma_E(\{x; \text{dist}(x, K \cap N) < \varrho\}) < \infty,$$

dalle (3.6), (3.7), (3.3) e dalla definizione di H_{n-2} segue la (3.1).

c. v. d.

BIBLIOGRAFIA

- [1] F. J. ALMGREN : *Some interior regularity theorems for minimal surfaces and an extension of Bernstein's theorem*. Ann. of Math., 1966.
- [2] E. DE GIORGI : *Nuovi teoremi relativi alle misure $(r-1)$ -dimensionali in uno spazio ad r dimensioni*. Ric. Matem. Napoli, 1955.
- [3] M. MIRANDA : *Distribuzioni aventi derivate misure e insiemi di perimetro localmente finito*. Ann. Scuola Norm. Sup., Pisa, 1964.
- [4] M. MIRANDA : *Superfici cartesiane generalizzate ed insiemi di perimetro localmente finito sui prodotti cartesiani*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 1964.
- [5] M. MIRANDA : *Sul minimo dell'integrale del gradiente di una funzione*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 1965.
- [6] M. MIRANDA : *Comportamento delle successioni convergenti di frontiere minimali*. (Questo stesso numero).
- [7] D. TRISCARI : *Sulle singolarità delle frontiere orientate di misura minima*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 1963.
- [8] D. TRISCARI : *Sulle singolarità delle frontiere orientate di misura minima nello spazio euclideo a 4 dimensioni*. Le Matematiche, Catania, 1963.

Manoscritto pervenuto in redazione il 17 marzo 1967