

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

A. BARLOTTI

## **Sulle 2-curve nei piani grafici**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 37 (1967), p. 91-97

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1967\\_\\_37\\_\\_91\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__37__91_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

## SULLE 2-CURVE NEI PIANI GRAFICI

di A. BARLOTTI (a Firenze) \*)

1. In un piano grafico qualsiasi diamo il nome di *n-curva* a un insieme,  $C$ , di punti che goda delle due seguenti proprietà:

i) ogni retta incontra  $C$  in al più  $n$  punti;

ii) l'insieme  $C$  è completo nei confronti della proprietà precedente: cioè non si può ampliare  $C$ , mediante l'aggiunta di punti, senza che venga meno la i).

Questa definizione ci sembra che possa presentare un duplice interesse. Essa infatti porta ad esaminare in che rapporto stanno, nei piani sopra un corpo, le  $n$ -curve con le curve algebriche irriducibili di ordine  $n$ , e permette inoltre di introdurre enti, in un certo senso analoghi a tali curve, in piani nei quali non è agevole, e può portare a singolari paradossi <sup>1)</sup>, dare analiticamente una definizione di curva.

Nel piano sopra il campo complesso una curva algebrica irriducibile di ordine  $n (> 1)$  è una  $n$ -curva. Riteniamo che non sia ancora risolta la questione di stabilire se, viceversa, su un tale piano una  $n$ -curva (con  $n > 1$ ), che eventualmente soddisfi a qualche ulteriore condizione di natura grafica o topologica, sia una curva algebrica di ordine  $n$  (cfr., p. es., [2] pagg. 351-353).

Le  $n$ -curve di un piano lineare finito,  $S_{2,q}$ , di ordine  $q$  sono i  $(k; n)$ -archi completi (cfr. [1]). Le coniche irriducibili di  $S_{2,q}$ , per  $q$  dispari, sono delle 2-curve che in ogni punto posseggono una sola retta tangente <sup>2)</sup>. Un noto

---

\*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la matematica del C.N.R.

Indirizzo dell'A.: Via Cairoli, 72, Firenze.

<sup>1)</sup> Cfr. [4].

<sup>2)</sup> Diremo che una retta è *secante*, *h-secante*, *tangente* o *esterna* per una  $n$ -curva a seconda che contenga rispettivamente  $n$ ,  $h$  (con  $1 < h < n$ ), uno o zero punti di essa.

teorema di B. Segre (cfr. [5]) assicura che viceversa, per  $q$  dispari, ogni 2-curva di  $S_{2,q}$  che in un punto (e quindi in ogni punto) possedga una sola retta tangente è una conica irriducibile.

Nella presente nota vogliamo indicare dei procedimenti costruttivi mediante i quali si ottengono delle 2-curve che godono di particolari proprietà.

Ad esempio in un piano numerabile, scelti a priori due sistemi  $E$  e  $T$  di rette che soddisfino certe condizioni, è possibile ottenere una 2-curva per la quale  $E$  è il sistema delle rette esterne e  $T$  quello delle tangenti [cfr. n. 2, b)]. Poichè  $E \cup T$  può essere l'insieme vuoto ne risulta l'esistenza di 2-curve per le quali ogni retta del piano è una secante.

Le considerazioni che svolgeremo si possono estendere senza difficoltà introducendo delle  $n$ -curve nel piano o delle  $n$ -varietà in un iperspazio a un numero qualunque di dimensioni.

**2.** Chiamiamo *piano numerabile* un piano grafico infinito i cui elementi costituiscano un insieme numerabile, cioè un piano tale che si possa stabilire un'applicazione biunivoca,  $\Omega$ , dei suoi elementi (punti e rette) sull'insieme dei numeri naturali <sup>3)</sup>. Se  $\pi$  è un piano numerabile, ed è fissata la  $\Omega$ , diremo indice di un elemento,  $\alpha$ , di  $\pi$  il numero naturale,  $i$ , che corrisponde ad  $\alpha$  nella  $\Omega$ .

Esempi di piani numerabili sono il piano razionale e i piani liberi,  $F_m$ , ( $m \geq 4$ ) (Marshall Hall Jr., cfr. [3]) generati come estensione libera di una struttura di incidenza costituita da  $m-2$  punti appartenenti ad una retta e da due punti esterni a questa.

Qui di seguito indicheremo alcuni modi con i quali si ottengono delle 2-curve in un piano numerabile,  $\pi$ .

a) Si costruisca nel piano  $\pi$  una successione,  $B_2, B_3, \dots$  di  $k$ -archi <sup>4)</sup> nel modo seguente:  $B_2$  è costituito da una qualunque coppia di punti distinti. Definito  $B_r$ , se  $P_{r+1}$  è il punto di indice più basso fra quelli che non sono contenuti in alcuna retta congiungente due punti di  $B_r$ , l'arco  $B_{r+1}$  è quello che si ottiene aggiungendo  $P_{r+1}$  ai punti di  $B_r$ . L'insieme  $\bigcup_{r=2}^{\infty} B_r$  è allora una 2-curva, come si verifica facilmente.

<sup>3)</sup> È subito visto che un piano grafico è numerabile quando risulta numerabile l'insieme dei punti di una sua retta.

<sup>4)</sup> In un piano un  $k$ -arco è un insieme di  $k$  ( $\geq 2$ ) punti di cui mai tre risultano allineati.

Nulla si può dire a priori su come siano costituiti gli insiemi delle rette tangenti ed esterne [cfr. <sup>2)</sup>] di questa 2-curva. Daremo ora una diversa costruzione che porta a delle 2-curve aventi gli insiemi delle tangenti e delle rette esterne opportunamente preassegnati.

b) Consideriamo nel piano  $\pi$  due insiemi,  $E$  e  $T$ , di rette tali che:

I.  $E \cap T = \emptyset$ .

II. Se una retta non appartiene ad  $E$ , vi sono infiniti punti di essa dai quali non passano rette di  $E \cup T$ , diverse dalla retta stessa qualora questa appartenga a  $T$ . Esiste almeno una retta non appartenente ad  $E$ .

Se sono soddisfatte tali condizioni si può provare che *esiste una 2-curva per la quale  $E$  è l'insieme delle rette esterne e  $T$  è l'insieme delle tangenti.*

*Dimostrazione:* Indichiamo con  $P_i$  (con  $r_i$ ) il punto (la retta) di indice  $i$ . Si definisca, per induzione, una successione di punti nel modo seguente: sia  $r_{j_1}$  quella, fra le rette non appartenenti ad  $E$ , che ha indice più piccolo, e sia  $P_{i_1}$  quello, fra i punti di  $r_{j_1}$  non situati su rette di  $E$ , che ha indice più piccolo. Supposto poi di aver definito  $P_{i_2}, \dots, P_{i_{s-1}}$ , si definisca  $P_{i_s}$  nel modo seguente. Sia  $r_{j_s}$  la retta di indice più piccolo fra quelle che non appartengono a nessuno di questi tre insiemi:

1)  $E$ ;

2) l'insieme delle rette appartenenti a  $T$  e contenenti uno dei punti  $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_{s-1}}$ ;

3) l'insieme delle rette congiungenti due dei punti  $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_{s-1}}$ .

La retta  $r_{j_s}$  esiste certamente poichè il fatto che valga la II porta come conseguenza immediata che nel piano vi sono infinite rette non appartenenti ad  $E \cup T$ , mentre le rette dell'insieme 3) sono in numero finito.

Diciamo  $P_{i_s}$  il punto di indice più piccolo, fra quelli di  $r_{j_s}$ , che non appartiene a nessuna retta di uno degli insiemi 1), 2), 3). L'esistenza del punto  $P_{i_s}$  è assicurata dalla II e dal fatto che i punti di  $r_{j_s}$ , per i quali passano le rette dell'insieme 3) sono in numero finito.

L'insieme,  $\mathfrak{S}$ , dei punti  $P_{i_l}$  ( $l = 1, 2, \dots$ ) è una 2-curva per la quale  $E$  è il sistema delle rette esterne e  $T$  quello delle tangenti.

Infatti l'ipotesi che  $\mathfrak{S}$  contenga tre punti allineati,  $P_{i_a}, P_{i_b}$  e  $P_{i_c}$ , con  $i_a < i_b < i_c$ , è in contrasto con il procedimento usato per definire  $P_{i_c}$  a partire da  $P_{i_1}, \dots, P_{i_{c-1}}$ . Per la stessa ragione nessuna retta di  $T$  può contenere due punti di  $\mathfrak{S}$  e nessuna retta di  $E$  un punto di  $\mathfrak{S}$ . Inoltre ogni retta di  $T$  contiene esattamente un punto di  $\mathfrak{S}$  e ogni retta non appartenente ad  $E \cup T$  contiene esattamente due punti di  $\mathfrak{S}$ . Infatti supponiamo,

per assurdo, che ciò non sia vero e indichiamo con  $r_d$  la retta di indice minimo per cui la cosa non si verifica. Diciamo  $P_{i_1}, \dots, P_{i_{h-1}}$  i punti di  $\mathfrak{S}$  che si ottengono, col procedimento stabilito, in corrispondenza alle rette di indice minore di  $d$ . Il modo usato per definire  $P_{i_h}$  porta allora che questo punto va scelto su  $r_d$ ; per la II, e poichè le congiungenti  $P_{i_1}, \dots, P_{i_{h-1}}$  due a due sono in numero finito, la via indicata porta effettivamente a determinare  $P_{i_h}$  sulla  $d$ . Si ha così una contraddizione se  $r_d \in T$ . Qualora invece  $r_d$  non appartenga ad  $E \cup T$  si trova poi che tale retta deve contenere anche  $P_{i_{h+1}}$  e quindi si giunge ancora ad un assurdo. Notiamo infine che per ogni punto del piano passa almeno una retta non appartenente ad  $E \cup T$ , cioè una secante di  $\mathfrak{S}$ . Ciò è una conseguenza immediata della proprietà II ammessa per i sistemi  $E$  e  $T$ . Infatti l'esistenza di una retta non appartenente ad  $E$  porta che vi sono (infinite) rette non appartenenti ad  $E \cup T$ . Ma allora se vi fosse un punto del piano per il quale passano solo rette di  $E \cup T$ , le intersezioni di queste con una qualunque retta non appartenente ad  $E \cup T$  esaurirebbero i punti di quest'ultima, e ciò è contro la II. È così provato completamente l'asserto.

Qualora  $E \cup T$  sia l'insieme vuoto, l'insieme  $\mathfrak{S}$  è una 2-curva che è incontrata in due punti (distinti) da ogni retta del piano.

c) Il procedimento usato in b) per giungere ad  $\mathfrak{S}$  può essere modificato nel modo seguente.

Partiamo da due insiemi  $E$  e  $T_0$  per cui valgono le proprietà I e II [cfr. b)] e definiamo  $P_{i_1}$  come in b). Ampliamo poi eventualmente l'insieme  $T_0$  con l'aggiunta di altre rette in modo che  $E$  e l'insieme  $T_1$  che così si ottiene soddisfino alle I e II. Supponiamo ora di aver definito i punti  $P_{i_2}, \dots, P_{i_{s-1}}$  e l'insieme di rette  $T_{s-1}$  e definiamo  $P_{i_s}$  e  $T_s$  nel modo seguente.

Il punto  $P_{i_s}$  si ottiene con il procedimento usato per ottenere l'analogo punto in b), salvo a sostituire in esso  $T$  con  $T_{s-1}$ .

L'insieme  $T_s$  è un insieme di rette preso in modo che:

- i)  $T_s \supseteq T_{s-1}$ ;
- ii)  $E$  e  $T_s$  soddisfino alle I e II (quando si sostituisca in esse  $T$  con  $T_s$ ).
- iii) nessuna delle rette di  $T_s$  contiene due dei punti  $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_s}$ .

Poniamo  $T = \bigcup_{s=1}^{\infty} T_s$ . Se  $E \cup T$  non contiene nessun fascio di rette, l'insieme  $\mathfrak{S}$  dei punti  $P_{i_l}$  ( $l = 1, 2, \dots$ ) è ancora una 2-curva per la quale  $E$  è l'insieme delle rette esterne e  $T$  è quello delle rette tangenti.

La dimostrazione di ciò è in quasi tutti i suoi punti analoga a quella data in *b*) (penultimo capoverso). Ci possiamo quindi limitare a provare che su ogni retta di  $T$  c'è esattamente un punto di  $\mathfrak{S}$ . Per questo supponiamo dapprima che ci sia una retta,  $t$ , di  $T$  contenente due punti,  $P_{i_a}$  e  $P_{i_b}$ , di  $\mathfrak{S}$ , con  $i_a < i_b$ , e indichiamo con  $m$  il minimo valore di  $s$  per cui è  $t \in T_s$ . Per il modo come si costruisce  $T_m$  segue che deve essere  $m < b$ . Ma allora l'ipotesi che  $P_{i_b}$  appartenga a  $t$  contrasta con il procedimento usato per definire  $P_{i_b}$ , in quanto l'insieme  $T_{b-1}$  contiene  $t$ , essendo  $m \leq b-1$ , e inoltre  $P_{i_a}$  appartiene già a  $t$ . Quindi nessuna retta di  $T$  può contenere due punti di  $\mathfrak{S}$ . Osserviamo poi che se la retta  $t$  appartiene a  $T_s$ , essa non può appartenere ad  $E$ , e quindi segue, come in *b*), che su  $t$  si trova almeno un punto di  $\mathfrak{S}$ . È così provato che  $t$  contiene esattamente un punto di  $\mathfrak{S}$ .

Esaminiamo rapidamente i risultati a cui porta, in alcuni casi particolari, il procedimento esposto.

Supponiamo dapprima che  $E \cup T_0$  sia l'insieme vuoto e fissiamo due interi,  $k$  e  $m$ , con  $k > 0$ ,  $m > 1$ .  $T_1$  sia formato dalle  $k$  rette di indice minimo passanti per  $P_{i_1}$  e  $T_s$  si ottenga aggiungendo a  $T_{s-1}$  l'insieme delle  $k$  rette di indice minimo che passano per  $P_{i_s}$ , non contengono nessuno dei punti  $P_{i_1}, \dots, P_{i_{s-1}}$  e non passano per nessun punto nel quale si intersechino  $m$  rette di  $T_{s-1}$ . L'insieme  $\mathfrak{S}$  è in tal caso una 2-curva priva di rette esterne, dotata di  $k$  tangenti in ogni suo punto e tale che per nessun punto che non appartenga alla 2-curva passano più di  $m$  tangenti di questa.

Facciamo ora l'ipotesi che  $E \cup T_0$  sia l'insieme vuoto e indichiamo con  $Q_1, Q_2, \dots$  la successione dei punti di  $\pi$  ordinati secondo il valore crescente dei loro indici. Fissato un intero  $k$  maggiore di uno,  $T_1$  sia l'insieme delle  $k$  rette di indice minimo passanti per  $Q_1$ . Supposto di aver definito  $T_{s-1}$ , se per  $Q_s$  passano  $k'$  ( $\leq k$ ) rette di  $T_{s-1}$ , l'insieme  $T_s$  si ottiene aggiungendo a  $T_{s-1}$  le  $k-k'$  rette di indice minimo che passano per  $Q_s$ , non passano per un punto nel quale si intersechino già  $k$  rette di  $T_{s-1}$  e sono distinte dalle congiungenti due dei punti  $P_{i_1}, \dots, P_{i_s}$ . Il procedimento indicato sopra porta allora ad una 2-curva priva di rette esterne e tale che da ogni punto del piano escono esattamente  $k$  sue tangenti.

Consideriamo infine il caso seguente.  $E \cup T_0$  è ancora l'insieme vuoto e  $Q_1, Q_2, \dots$  è la successione dei punti di  $\pi$  ordinati secondo il valore crescente dei loro indici. Sia  $P_{i_1}$  il punto di indice minimo di  $\pi$  fra quelli situati sulla retta di indice minimo [cfr. *c*, secondo capoverso] e indichiamo con  $v_1$  la retta di indice minimo passante per  $Q_1$  e con  $T_1$  l'insieme costi-

tuito dalla retta per  $Q_1$  che è diversa da  $v_1$  ed ha indice minimo. Allora per  $Q_1$  passa almeno una retta appartenente a  $T_1$ , e per quest'ultimo insieme valgono ovviamente le proprietà I e II [cfr. b)] a cui si riducono, in questo caso particolare, le i), ii), iii) [cfr. c)]. Mostriamo ora che si possono definire per ogni  $s$  un punto  $P_{i_s}$ , una retta  $v_s$  e un insieme di rette  $T_s$ , in modo che  $v_s$  passi per  $Q_s$  e sia distinta dalle rette di  $T_{s-1}$ , che l'insieme  $T_s$  soddisfi alle i), ii) e iii), che le rette di  $T_s$  siano distinte dalle rette  $v_1, \dots, v_s$  e che per ognuno dei punti  $Q_1, \dots, Q_s$  escano almeno  $s$  rette di  $T_s$ . Ciò è già stato fatto per  $s = 1$  e pertanto, procedendo per induzione, supponiamo che ciò sia stato fatto per  $s = 1, 2, \dots, g - 1$  e dimostriamo che si può fare anche per  $s = g$ . Si trovi la retta  $r_{i_g}$  e in essa il punto  $P_{i_g}$  come nel procedimento indicato in b) [sostituendo in esso  $T$  con  $T_{g-1}$ : cfr. c), terzo capoverso]. Sia  $v_g$  la retta per  $Q_g$  che ha indice minimo e non appartiene a  $T_{g-1}$ . Si definisca ora per ogni  $k = 1, \dots, g$  un insieme di rette  $M_k$  nel modo seguente:

- 1) se per  $Q_k$  passano almeno  $g$  rette di  $T_{g-1}$ ,  $M_k$  è l'insieme vuoto;
- 2) se per  $Q_k$  passa solo un numero  $\lambda_k < g$  di rette di  $T_{g-1}$ ,  $M_k$  è formato dalle  $g - \lambda_k$  rette di indice minimo fra quelle che passano per  $Q_k$ , non appartengono a  $T_{g-1}$ , sono diverse da  $v_1, \dots, v_g$  e dalle congiungenti a due a due i punti  $P_{i_1}, \dots, P_{i_g}$ .

Poniamo  $T_g = T_{g-1} \cup M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_g$ . Si verifica subito che il punto  $P_{i_g}$ , la retta  $v_g$  e l'insieme  $T_g$  così definiti soddisfano alle condizioni richieste sopra per  $P_{i_s}$ ,  $v_s$  e  $T_s$ , ed è così provata l'esistenza di questi elementi per ogni  $s$ . Inoltre l'insieme  $T = \bigcup_{s=1}^{\infty} T_s$  non contiene nessun fascio di rette poichè per ogni punto del piano passa una retta  $v_i$  che non può appartenere a nessun  $T_s$  e quindi nemmeno a  $T$ .

L'insieme dei punti  $P_{i_l}$  ( $l = 1, 2, \dots$ ) è allora una 2-curva tale che da ogni punto del piano escono infinite rette ad essa tangenti.

**3.** Supponiamo ora che  $\pi$  sia un piano grafico infinito non numerabile, il che equivale a supporre che l'insieme dei punti di una sua retta abbia potenza maggiore del numerabile. Facendo uso del principio di induzione trasfinita si ottengono ancora delle 2-curve con una costruzione che estende quella indicata nel n. 2 in a).

Non c'è invece un modo immediato di estendere, almeno senza ulteriori restrizioni, costruzioni del tipo di quelle indicate nel n. 2, b), c). Resta così aperta, ad esempio, la questione di trovare in un piano infinito non numerabile delle 2-curve per le quali ogni retta è una secante.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] BARLOTTI A.: *Sui  $(k; n)$ -archi di un piano lineare finito*. Bollettino U.M.I., 1956, 3, 11, 553-556.
- [2] ENRIQUES F. e CHISINI O.: *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*. Vol. I, Zanichelli, Bologna, 1915.
- [3] HALL M. JR.: *Projective planes*. Trans. Amer. Math. Soc., 1943, 54, 229-277.
- [4] KILLGROVE R.: *Conics in arbitrary planes* (per il momento non pubblicato).
- [5] SEGRE B.: *Ovals in a finite projective plane*. Canad. J. Math., 1955, 7, 414-416.

Manoscritto pervenuto in redazione il 25 gennaio 1966.