RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

LAMBERTO CATTABRIGA

Complementi alla mia nota : su una classe di polinomi ipoellittici

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 37 (1967), p. 60-74

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__37__60_0>

COMPLEMENTI ALLA MIA NOTA: SU UNA CLASSE DI POLINOMI IPOELLITTICI

di LAMBERTO CATTABRIGA (*a Ferrara*) *)

In una precedente nota [2] ho definito e studiato una nuova classe di polinomi ipoellittici chiamati $(\tilde{q}^{(0)}, \ldots, \tilde{q}^{(r-1)})$-quasi-ellittici ed un'altra classe, in questa contenuta, costituita da polinomi soddisfacenti ad una valutazione là indicata come condizione *d*).

Nella presente nota si prova (n. 1) che ogni polinomio $(\tilde{q}^{(0)}, \ldots, \tilde{q}^{(r-1)})$-quasi-ellittico soddisfa alla condizione *d*), onde le due classi di polinomi introdotte in [2] coincidono. Nel n. 2 è contenuto un completamento del teorema 1 di [2], utilizzato poi nel n. 3. In questo si esamina brevemente il caso particolare di polinomi chiamati fortemente $(\tilde{q}^{(0)}, \ldots, \tilde{q}^{(r)-1})$-quasi-ellittici, estendendo a questi alcuni risultati di G. C. Barozzi [1], relativi a polinomi fortemente quasi-ellittici.

Dopo che la mia nota [2] era stata inviata per la pubblicazione, è apparsa qui una breve nota di V. P. Michailov [5] nella quale è introdotta una classe di polinomi più generale di quella da me studiata in [2] ed apparentemente coincidente con quella dei polinomi multi-quasi-ellittici definiti da J. Friberg [3]. Una parte dei risultati della presente nota è contenuta in alcune affermazioni che si trovano enunciate in [5] senza alcun cenno di dimostrazione.

1. Sia $\tilde{s} = (s_0, s) \in C^{\nu+1}$, $\nu \geqslant 1$; $s_0 = \sigma_0 + i\tau_0 \in C$, $\sigma_0, \tau_0 \in R$; $s = \sigma + i\tau \in C^\nu$, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu)$, $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_\nu) \in R^\nu$; $s_k = \sigma_k + i\tau_k$, $k = 1, \ldots, \nu$, $\tilde{\sigma} = (\sigma_0, \sigma) \in R^{\nu+1}$. Sia $P(\tilde{s}) = \sum_{\tilde{\alpha}} c_\alpha s^{\tilde{\alpha}}$, $\tilde{\alpha} = (\alpha_0, \ldots, \alpha_\nu) \in R^{\nu+1}$,

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la matematica del C.N.R.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Ferrara.

un polinomio in $\tilde{s}$ a coefficienti complessi costanti che scriveremo anche nella forma $P(\tilde{s}) = P(s_0, s) = \sum_0^n {}_j s_0^{n-j} P_j(s)$ con $P_j(s) = \sum_\alpha c_{j\alpha} s^\alpha$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu) \in R^\nu$, $j = 0 \ldots, n$, polinomi in s a coefficienti complessi costanti. Sia a_k, $k = 1, \ldots, \nu$, il massimo esponente con cui s_k figura isolato in $P(\tilde{s})$, ossia in $P_n(s)$.

Supporremo che

$$a)\ P_0(s) \equiv c_{00} \neq 0\ , \quad a_k > 0\ , \quad k = 1, \ldots, \nu\ .$$

Sia $a = \max\limits_k a_k$ e poniamo $q = (q_1, \ldots, q_\nu) = (a/a_1, \ldots, a/a_\nu)$ e $\langle q, \alpha \rangle = \sum_1^\nu {}_k q_k \alpha_k$. Sia poi $(P_j) = \{\alpha \in R^\nu;\ c_{j\alpha} \neq 0\}$,

$$m_j = \max_{\alpha \in (P_j)} \langle q, \alpha \rangle$$

il q-grado di $P_j(s)$ e $P_j'(s) = \sum\limits_{\substack{\alpha \\ <q,\alpha> = m_j}} c_{j\alpha} s^\alpha$. Risulta $m_0 = 0$ ed $m_n \geqslant a$. Supporremo che

$$b)\ m_j < m_n\ , \quad j = 1, \ldots, n-1\ .$$

È ben noto che l'ipotesi $a)$ è soddisfatta se P è ipoellittico. Ciò accade anche per l'ipotesi $b)$. Infatti, posto $|s| = \sum_1^\nu {}_k |s_k|^{1/q_k}$ e per $\sigma \neq 0$, $\sigma_k' = \sigma_k |\sigma|^{-q_k}$, $k = 1, \ldots, \nu$, $\sigma' = (\sigma_1', \ldots, \sigma_\nu')$, è

$$P_j(\sigma) = P_j(|\sigma|^q \sigma') = |\sigma|^{m_j} P_j'(\sigma') + R_j(|\sigma|^q \sigma')\ , \quad j = 0, \ldots, n\ ,$$

con $\lim\limits_{|\sigma| \to +\infty} R_j(|\sigma|^q \sigma')/|\sigma|^{m_j} = 0$. D'altra parte se P è ipoellittico, osservato che $\partial^{n-j} P(0, \sigma)/\partial \sigma_0^{n-j} = (n-j)!\, P_j(\sigma)$,

$$\frac{P_j(\sigma)}{P(0, \sigma)} = \frac{P_j(\sigma)}{P_n(\sigma)} = \frac{|\sigma|^{m_j - m_n}[P_j'(\sigma') + R_j(|\sigma|^q \sigma')/|\sigma|^{m_j}]}{P_n'(\sigma') + R_n(|\sigma|^q \sigma')/|\sigma|^{m_n}} \tag{1}$$

dovrà tendere a zero per $\sum_1^\nu {}_k \sigma_k^2 \to +\infty$. Ma è [1]), qualunque sia σ' e per ogni $j = 0, \ldots, n-1$.

$$|\sigma| \leqslant \sum_1^\nu {}_k (1/q_k |\sigma_k| - 1/q_k + 1) \leqslant \sum_1^\nu {}_k |\sigma_k| + \nu \leqslant \nu^{1/2} (\sum_1^\nu {}_k \sigma_k^2)^{1/2} + \nu \text{ [2])}$$

---

[1]) Si veda [4], p. 99.

[2]) Si utilizza la diseguaglianza $x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1 \leqslant 0$, vera per ogni $x > 0$ se $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

e quindi, se

$$|\sigma| > 2\nu \ , \qquad |\sigma| \leqslant 2\nu^{1/2}(\sum_1^\nu{}_k\sigma_k^2)^{1/2} \ .$$

Per ogni fissato σ', $|\sigma'| = 1$, la (1) deve quindi tendere a zero per $|\sigma| \to +\infty$ e perciò deve essere $m_j < m_n$, $j = 1, \dots, n-1$. Ciò vale anzi qualunque sia il vettore q, con $q_k \geqslant 1$. *Le ipotesi a) e b) sono dunque soddisfatte da ogni polinomio ipoellittico $P(\dot{s})$.*

Sia ora $j_0 = 0$ e

$$p_h = \max_{j_h<j\leqslant n} \frac{m_j - m_{j_h}}{j - j_h} \ , \qquad h = 0, \dots, r-1 \ ,$$

$$j_{h+1} = \max_{j_h<j\leqslant n} \{j \ ; \quad m_j = m_{j_h} + p_h(j - j_h)\} \ , \qquad h=0, \dots, r-1 ,$$

ove r è tale che $j_r = n$,

$$m_{j_{h+1}} = m_{j_h} + p_h(j_{h+1} - j_h) = \sum_0^h{}_i p_i(j_{i+1} - j_i) = \max_{0\leqslant j\leqslant j_{h+1}} m_j \ .$$

Risulta

$$p_0 > p_1 > \dots > p_{r-1} > 0 \ , \qquad 0 = j_0 < j_1 < \dots < j_r = n \ .$$

Per comodità di notazioni porremo $p_{-1} = +\infty$ e $p_r = 0$. Sia infine

$$m_j^* = m_{j_h} + p_h(j - j_h) \ , \qquad j_h \leqslant j \leqslant j_{h+1} \ , \qquad h = 0, \dots, r-1 \ .$$

In [2] abbiamo osservato che per $h = 1, \dots, r$ e $j = 0, \dots, n$ è $p_{h-1}(n-j) + m_j^* \leqslant p_{h-1}(n - j_h) + m_{j_h}$, il segno eguale verificandosi soltanto per $j = j_{h-1}, \dots, j_h$. Per $p \in (p_h, p_{h-1})$, $h=0, \dots, r$, è inoltre $p(n-j) + m_j^* \leqslant p(n - j_h) + m_{j_h}$, $j = 0, \dots, n$, il segno eguale verificandosi soltanto per $j = j_h$. Per $p > 0$, posto

$$\tilde{q}(p) = (q_0(p), q(p)) = (q_0(p), q_1(p), \dots, q_\nu(p)) = \begin{cases} (p, q) & se \ p \geqslant 1 \ , \\ (1, q/p) & se \ p < 1 \ , \end{cases}$$

il $\tilde{q}(p)$-grado del polinomio $P(\tilde{s})$ è dunque $\mu(p) = (p(n-j_h)+m_{j_h})\ q_0(p)/p$ per $p \in (p_h, p_{h-1}]$, $h = 1, \dots, r$, e per $p > p_0$, $h = 0$. I termini di $P(\tilde{s})$ aventi $\tilde{q}(p)$-grado eguale a $\mu(p)$ sono quelli contenuti nei polinomi

$$s_0^{n-j_h}\tilde{P}_{h-1}(\tilde{s}) = s_0^{n-j_h} \sum_{\substack{j_{h-1} \\ m_j=m_j^*}}^{j_h}{}_j\, s_0^{j_h-j} P'_j(s) \ \text{se}\ p = p_{h-1}, \ h = 1, \dots, r \ ,$$

e quelli contenuti nei polinomi

$$s_0^{n-j_h}P'_{j_h}(s) \quad \text{se} \quad p \in (p_h, p_{h-1}) , \qquad h = 0, \ldots, r .$$

Da ciò segue facilmente il

LEMMA: *Se il polinomio $P(\tilde{s})$ soddisfa alle a) e b) risulta*

$$\lim_{t\to+\infty} t^{-\mu(p)}P(t^{\tilde{q}(p)}\tilde{s}) = \begin{cases} s_0^{n-j_h}\tilde{P}_{h-1}(\tilde{s}) & \text{se } p = p_{h-1}, \quad h=1, \ldots, r, \\ s_0^{n-j_h}P'_{j_h}(s) & \text{se } p \in (p_h, p_{h-1}), \quad h=0, \ldots, r, \end{cases}$$

uniformemente rispetto ad $\tilde{s}$ contenuto in insiemi limitati [3]).

Contemporaneamente resta anche provato che

$$\lim_{t\to+\infty} t^{-\mu(p)}\sum_{0}^{r}{}_i \,|\, t^{q_0(p)}s_0 \,|^{n-j_i}\, |\, t^{q(p)}s \,|^{m_{j_i}} =$$

$$= \begin{cases} |\, s_0 \,|^{n-j_{h-1}}\, |\, s \,|^{m_{j_{h-1}}} + |\, s_0 \,|^{n-j_h}\, |\, s \,|^{m_{j_h}} & \text{se } p = p_{h-1}, \quad h=1, \ldots, r, \\ |\, s_0 \,|^{n-j_h}\, |\, s \,|^{m_{j_h}} & \text{se } p \in (p_h, p_{h-1}), \quad h=0, \ldots, r, \end{cases}$$

uniformemente rispetto ad $\tilde{s}$ contenuto in insiemi limitati.

Sia ora $\beta = \inf_j \beta_j$, con $\beta_j = m_j^* - q$-grado di $(P_j(s) - P'_j(s))$ per gli j per cui $m_j = m_j^*$ e $\beta_j = m_j^* - m_j$ per gli j per cui $m_j < m_j^*$, e γ un numero positivo minore di $1/2 \inf_{0\leq h\leq r} (p_{h-1} - p_h)$. Si vede facilmente che per $p \in [p_{h-1} - \gamma, p_{h-1} + \gamma]$, $h = 1, \ldots, r$, il $\tilde{q}(p)$-grado dei polinomi $P(\tilde{s}) - s_0^{n-j_h}\tilde{P}_{h-1}(\tilde{s})$ è minore di $\mu(p) - \inf(\beta, \gamma)$. Lo stesso accade del $\tilde{q}(p)$-grado dei polinomi $P(\tilde{s}) - s_0^{n-j_h}P'_{j_h}(s)$, $h = 0, \ldots, r$, se $p \in (p_h + \gamma, p_{h-1} - \gamma)$, $h = 0, \ldots, r-1$ e $p \in (0, p_{r-1} - \gamma)$, $h = r$.

Posto

$$A_p(\tilde{s}) = \begin{cases} s^{n-j_h}\tilde{P}_{h-1}(\tilde{s}) & \text{per } p \in [p_{h-1} - \gamma, p_{h-1} + \gamma] , \quad h = 1, \ldots, r , \\ s^{n-j_h}P'_{j_h}(s) & \text{per } p \in (p_h + \gamma, p_{h-1} - \gamma), \ h=0, \ldots, r-1, \\ & \quad \text{e } p \in (0, p_{r-1} - \gamma), \ h = r, \end{cases}$$

è quindi

$$\lim_{t\to+\infty} t^{-\mu(p)}[P(t^{\tilde{q}(p)}\tilde{s}) - A_p(t^{\tilde{q}(p)}\tilde{s})] = 0 \tag{2}$$

uniformemente rispetto a $p \in (0, +\infty)$ e ad $\tilde{s}$ contenuto in insiemi limitati. Analogamente, posto

---

[3]) $(t^{\tilde{q}(p)}\tilde{s}) = (t^{q_0(p)}s_0, \ldots, t^{q_\nu(p)}s_\nu)$. Analogamente nel seguito $(t^{q(p)}s) = (t^{q_1(p)}s_1, \ldots, t^{q_\nu(p)}s_\nu)$. Questo lemma completa il lemma del n. 1 di [2].

$$B_p(\tilde{s}) = \begin{cases} |s_0|^{n-j_{h-1}}|s|^{m_{j_{h-1}}} + |s_0|^{n-j_h}|s|^{m_{j_h}} & \\ \qquad\qquad \text{per } p \in [p_{h-1}-\gamma,\ p_{h-1}+\gamma],\ h=1,\dots,r, \\ |s_0|^{n-j_h}|s|^{m_{j_h}} \qquad \text{per } p \in (p_h+\gamma,\ p_{h-1}-\gamma),\ h=0,\dots,r-1, \\ \qquad\qquad p \in (0,\ p_{r-1}-\gamma)\ , \qquad h=r\ , \end{cases}$$

è

(3) $$\lim_{t\to+\infty} t^{-\mu(p)}\Big[\sum_0^r{}_i\ |t^{q_0(p)}s_0|^{n-j_i}\,|t^{q(p)}s|^{m_{j_i}} - B_p(t^{\tilde{q}(p)}\tilde{s})\Big] = 0$$

uniformemente rispetto a $p \in (0, +\infty)$ e ad $\tilde{s}$ contenuto in insiemi limitati.

Supponiamo ora che $P(\tilde{s})$ soddisfi anche alla

$$c)\ \tilde{P}_{h-1}(\tilde{\sigma}) \neq 0 \quad \forall \quad \tilde{\sigma} \in \Gamma = \{\tilde{\sigma} \in R^{\nu+1}\ ; \quad \sigma \in R^\nu - \{0\}, \quad \sigma_0 \in R\},$$
$$h = 1,\ \dots,\ r\ .$$

In [2], posto $\tilde{q}(p_h)=\tilde{q}^{(h)}$, $h=0, \dots, r-1$, abbiamo chiamato $(\tilde{q}^{(0)}, \dots, \tilde{q}^{(r-1)})$ *-quasi-ellettico* un polinomio $P(\tilde{s})$ soddisfacente alle a), b), c). Per un tale polinomio risulta [4])

$$|\tilde{P}_{h-1}(\tilde{\sigma})| \geqslant C\,|\sigma|^{m_{j_{h-1}}}(\,|\sigma_0|^{j_h-j_{h-1}} + |\sigma|^{m_{j_h}-m_{j_{h-1}}}), \quad \forall\,\tilde{\sigma} \in R^{\nu+1},\ \ h=1,\dots,r$$
$$|P'_{j_h}(\sigma)| \geqslant C\,|\sigma|^{m_{j_h}}\ , \qquad \forall\,\sigma \in R^\nu\ , \qquad\qquad h=1,\ \dots,\ r$$

con C costante positiva [5]), onde pure

$$|A_p(\tilde{\sigma})| \geqslant CB_p(\tilde{\sigma}) \qquad \forall\,\tilde{\sigma} \in R^{\nu+1} \quad \text{e} \quad \forall\,p \in (0,\ +\infty)\ .$$

Se $C_1 < C$, per i $\tilde{\sigma} \in R^{\nu+1}$ e i $p \in (0, +\infty)$ tali che

(4) $$C_1\,\Big|\sum_0^r{}_i\ |\sigma_0|^{n-j_i}\,|\tilde{\sigma}|^{m_{j_i}} - B_p(\tilde{\sigma})\Big| + |A_p(\tilde{\sigma}) - P(\tilde{\sigma})| \leqslant (C - C_1)B_p(\tilde{\sigma})$$

risulta quindi

$$C_1\,\Big|\sum_0^r{}_i\ |\sigma_0|^{n-j_i}\,|\sigma|^{m_{j_i}} - B_p(\tilde{\sigma})\Big| + C_1B_p(\tilde{\sigma}) \leqslant |A_p(\tilde{\sigma})| - |A_p(\tilde{\sigma}) - P(\tilde{\sigma})|$$

onde, per ogni $\tilde{\sigma} \in R^{\nu+1}$ tale che per almeno un $p \in (0, +\infty)$ sia sod-

---

[4]) Si veda [2], n. 4

[5]) Anche nel seguito, salvo esplicita indicazione, denoteremo con C, C_0, C_1, ..., C', ... delle costanti positive indipendenti dalle variabili che entrano nelle singole maggiorazioni, il cui valore potrà variare da formula a formula.

disfatta la (4),

$$
(5)\qquad |P(\tilde\sigma)| \geqslant |A_p(\tilde\sigma)| - |A_p(\tilde\sigma) - P(\tilde\sigma)| \geqslant C_1 \sum_{0}^{r}{}_i\, |\sigma_0|^{n-j_i}\, |\sigma|^{m_{j_i}}.
$$

Sia ora $|s|_p = \sum_{1}^{\nu}{}_k\, |s_k|^{1/q_k(p)}$, $p \in (0, +\infty)$; $|\tilde s|_p = |s_0|^{1/q_0(p)} + |s|_p$ e se $\tilde\sigma \neq 0$ $\sigma_k(p) = \sigma_k\, |\tilde\sigma|_p^{-q_k(p)}$, $k = 0, \ldots, \nu$, $\tilde\sigma(p) = (\sigma_0(p), \sigma(p)) = (\sigma_0(p), \ldots, \sigma_\nu(p))$. È

$$
(6)\qquad |s|^p \leqslant |s|_p^{q_0(p)} \leqslant C(p)\, |s|^p
$$

con $C(p) = \nu^{q_0(p)-p}$ e

$$
(6')\qquad |s_0| + |s|^p \leqslant |\tilde s|_p^{q_0(p)} \leqslant 2^p\nu(|s_0| + |s|^p)\,,
$$
$$
|s_0|^{1/p} + |s| \leqslant |\tilde s|_p^{q_k(p)/q_k} = |\tilde s|_p^{q_0(p)/p} \leqslant \sup\,(1, (2\nu)^{1/p-1})(|s_0|^{1/p} + |s|)\,;
$$

inoltre $|\tilde\sigma(p)|_p = 1$ $\forall$ $\sigma \in R^{\nu+1} - \{0\}$ e $\forall$ $p \in (0, +\infty)$.

I limiti (2) e (3) con $\tilde\sigma(p)$ in luogo di $\tilde s$ saranno uniformi rispetto a $\sigma \in R^{\nu+1} - \{0\}$ e $p \in (0, +\infty)$. È poi

$$
B_p(\tilde\sigma) = \begin{cases} |\tilde\sigma|_p^{\mu(p)}[|\sigma_0(p)|^{n-j_h}|\sigma(p)|^{m_{j_h}} + |\tilde\sigma|_p^{-(p_{h-1}-p)(j_h-j_{h-1})}|\sigma_0(p)|^{n-j_{h-1}}|\sigma(p)|^{m_{j_{h-1}}}] \\ \qquad\qquad \text{se } p \in [p_{h-1} - \gamma,\ p_{h-1}]\,, \quad h = 1, \ldots, r\,, \\ |\tilde\sigma|_p^{\mu(p)}[|\sigma_0(p)|^{n-j_{h-1}}|\sigma(p)|^{m_{j_{h-1}}} + |\tilde\sigma|^{-(p-p_{h-1})(j_h-j_{h-1})}|\sigma_0(p)|^{n-j_h}|\sigma(p)|^{m_{j_h}}] \\ \qquad\qquad \text{se } p \in [p_{h-1},\ p_{h-1} + \gamma]\,, \quad h = 1, \ldots, r\,, \end{cases}
$$

$$
B_p(\tilde\sigma) = |\tilde\sigma|_p^{\mu(p)}\, |\sigma_0(p)|^{n-j_h}\, |\sigma(p)|^{m_{j_h}}
$$

se

$$
p \in (p_h + \gamma, p_{h-1} - \gamma)\,,\quad h = 0, \ldots, r-1\,,\quad p \in (0, p_{r-1} - \gamma),\quad h = r\,.
$$

Se per un $\delta \in (0, 1)$ è soddisfatta una delle

$$
(7)\qquad \begin{array}{lll} |\sigma_0(p)| > \delta & & \text{se } p \geqslant p_0\,, \\ |\sigma_0(p)| > \delta \ \text{ e } & |\sigma(p)| > \delta & \text{se } p \in (p_{r-1}, p_0)\,, \\ |\sigma(p)| > \delta & & \text{se } p \in (0, p_{r-1}]\,, \end{array}
$$

è allora

$$
B_p(\tilde\sigma) \geqslant C_2\, |\tilde\sigma|_p^{\mu(p)}\,,
$$

con C_2 dipendente soltanto da δ. Scelto $C_1 = C/2$, i $\sigma \in R^{\nu+1} - \{0\}$ e $p \in (0, +\infty)$ per cui è soddisfatta una delle (7) verificheranno quindi anche la (4) se

$$
(8) \qquad C/2 \, |\tilde{\sigma}|_p^{-\mu(p)} \Big| \sum_0^r{}_i \, \big| |\tilde{\sigma}|_p^{q_0(p)} \sigma_0(p) \big|^{n-j_i} \big| |\tilde{\sigma}|_p^{q(p)} \sigma(p) \big|^{m_{j_i}} -
$$

$$
- B_p(|\tilde{\sigma}|_p^{\tilde{q}(p)} \tilde{\sigma}(p)) \Big| + |\tilde{\sigma}|_p^{-\mu(p)} \Big| A_p(|\tilde{\sigma}|_p^{\tilde{q}(p)} \tilde{\sigma}(p)) - P(|\tilde{\sigma}|_p^{\tilde{q}(p)} \tilde{\sigma}(p)) \Big| \leqslant C_2 C/2 \; .
$$

Ciò accade non appena $|\tilde{\sigma}|_p$ è sufficientemente grande, $|\tilde{\sigma}|_p > L$, con L dipendente soltanto da δ. La (5) varrà dunque per ogni $\tilde{\sigma} \in R^{\nu+1} - \{0\}$ tale che per almeno un $p > 0$ valga una delle (7) e sia $|\tilde{\sigma}|_p > L$. Mostriamo che esiste una costante positiva C_0 tale che ciò si verifica per ogni $\tilde{\sigma}$ con $|\sigma_0| + |\sigma| \geqslant C_0$.

Dalla (6′) segue

$$
C'(p) \frac{|\sigma_0|}{|\sigma_0| + |\sigma|^p} \leqslant |\sigma_0(p)| \leqslant \frac{|\sigma_0|}{|\sigma_0| + |\sigma|^p} \, ,
$$

$$
C''(p) \frac{|\sigma|}{|\sigma_0|^{1/p} + |\sigma|} \leqslant |\sigma(p)| \leqslant \frac{|\sigma|}{|\sigma_0|^{1/p} + |\sigma|} \, ,
$$

con $C'(p) = 2^{-p}\nu^{-1}$ e $C''(p) = \inf(1, (2\nu)^{-1/p+1})$, $\forall \; \tilde{\sigma} \in R^{\nu+1} - \{0\}$ e $p > 0$. Per $\delta < C'(p)$ è quindi $|\sigma_0(p)| > \delta$, se $|\sigma| < |\sigma_0|^{1/p} (C'(p)/\delta - 1)^{1/p}$; per $\delta < C''(p)$ è $|\sigma(p)| > \delta$, se $|\sigma| > |\sigma_0|^{1/p} (C''(p)/\delta - 1)^{-1}$.

Sia ora $p \in [p_{r-1}, p_0]$, $2\delta < \inf(C'(p_0), C''(p_{r-1}))$ e $|\sigma_0| + |\sigma| > 0$. Se $|\sigma| < |\sigma_0|^{1/p_0} (C'(p_0)/\delta - 1)^{1/p_0}$ è dunque $|\sigma_0(p_0)| > \delta$; se invece $|\sigma| \geqslant |\sigma_0|^{1/p_0} (C'(p_0)/\delta - 1)^{1/p_0}$ allora o è anche $|\sigma| > |\sigma_0|^{1/p_{r-1}} (C''(p_{r-1})/\delta - 1)^{-1}$ nel quale caso risulta $|\sigma(p_{r-1})| > \delta$, oppure è $|\sigma| \leqslant |\sigma_0|^{1/p_{r-1}} (C''(p_{r-1})/\delta - 1)^{-1}$. Il primo caso si presenta sempre se $|\sigma_0| \leqslant 1$; nel secondo riuscendo $|\sigma_0| > 1$ e $|\sigma| / |\sigma_0|^{1/p}$ funzione continua e crescente di p in $[p_{r-1}, p_0]$, esiste certamente un $p \in (p_{r-1}, p_0)$ tale che $(C''(p_{r-1})/\delta - 1)^{-1} < |\sigma| / |\sigma_0|^{1/p} < (C'(p_0)/\delta - 1)^{1/p_0}$ e quindi tale che $(C''(p)/\delta - 1)^{-1} < |\sigma| / |\sigma_0|^{1/p} < (C'(p)/\delta - 1)^{1/p}$ poichè per $p \in (p_{r-1}, p_0)$ è $C''(p) > C''(p_{r-1})$ e $C'(p_0) < C'(p)$. Per ogni $\tilde{\sigma} \in R^{\nu+1}$ con $|\sigma_0| + |\sigma| > 0$ è dunque sempre verificata una delle (7) per almeno un $p \in [p_{r-1}, p_0]$.

Osserviamo ora che se $p \geqslant 1$

$$
|\tilde{\sigma}|_p = |\sigma_0|^{1/p} + |\sigma| \geqslant |\sigma_0|^{1/p} + p \, |\sigma|^{1/p} + 1 - p \, ,
$$

onde se $|\sigma_0|^{1/p} + |\sigma|^{1/p} \geqslant p$, per $p \in [p_{r-1}, p_0]$ è

$$|\tilde{\sigma}|_p \geqslant 1/p(|\sigma_0|^{1/p} + |\sigma|^{1/p}) \geqslant 1/p_0(|\sigma_0| + |\sigma|)^{1/p_0} .$$

Se $p < 1$, per (6) è

$$|\tilde{\sigma}|_p \geqslant |\sigma_0| + |\sigma|^p \geqslant 1/p\ |\sigma_0|^p + |\sigma|^p + 1 - 1/p$$

e quindi se $|\sigma_0|^p + |\sigma|^p \geqslant 1/p$, per $p \in [p_{r-1}, p_0]$ è

$$|\tilde{\sigma}|_p \geqslant p(|\sigma_0|^p + |\sigma|^p) \geqslant p_{r-1}(|\sigma_0| + |\sigma|)^{p_{r-1}} .$$

Pertanto se $|\sigma_0| + |\sigma| > \sup(p_0^{p_0}, p_{r-1}^{-1/p_{r-1}})$ risulta

$$|\tilde{\sigma}|_p \geqslant \varkappa(|\sigma_0| + |\sigma|)^{\varkappa} , \qquad \forall p \in [p_{r-1}, p_0] ,$$

con $\varkappa = \inf(1/p_0, p_{r-1})$, onde sarà $|\tilde{\sigma}|_p > L\ \forall\ p \in [p_{r-1}, p_0]$ se $|\sigma_0| + |\sigma| > (L/\varkappa)^{1/\varkappa}$. Per tali $\tilde{\sigma}$ è quindi verificata la (8). Posto $C_0 = \sup(p_0^{p_0}, p_{r-1}^{-1/p_{r-1}}, (L/\varkappa)^{1/\varkappa})$ resta così provato il

TEOREMA 1: *Se $P(\tilde{s})$ soddisfa alle a), b), c) esistono due costanti positive C_0 e C_1 tali che per ogni $\tilde{\sigma} \in R^{\nu+1}$ con $|\sigma_0| + |\sigma| \geqslant C_0$ è*

$$|P(\tilde{\sigma})| \geqslant C_1 \sum_0^r{}_h |\sigma_0|^{n-j_h} |\sigma|^{m_{j_h}} ,$$

cioè: se P è $(\tilde{q}^{(0)}, \ldots, \tilde{q}^{(r-1)})$-quasi-ellittico esso soddisfa alla d) di [2].

Da questo risultato e da quanto esposto in [2] [6]) segue facilmente il

COROLLARIO: *Se P è $(\tilde{q}^{(0)}, \ldots, \tilde{q}^{(r-1)})$-quasi ellittico esso è più forte* [7]) *di ogni polinomio $Q(\tilde{s}) = \sum_0^n{}_j s_0^{n-j} Q_j(s)$, tale che i polinomi Q_j abbiano q-grado non superiore ad m_j, $j = 0, \ldots, n$; in particolare P e $P'(\tilde{s}) = \sum_{\substack{0 \\ m_j = m_j^*}}^n{}_j s_0^{n-j} P'_j(s)$ sono egualmente forti.*

---

[6]) Si veda la prima parte del n. 4.

[7]) Nel senso definito in [4].

2. Come in [2] poniamo $q_k(p_h) = q_k^{(h)}$, $h = 0, \dots, r-1$; $k = 0, \dots, \nu$. Per $i = 1, \dots, \nu$, sia $s^{(i)} = (s_0, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_\nu) \in C^\nu$, $|s^{(i)}|_h = \sum_{\substack{0\\k\neq i}}^{\nu}{}_k |s_k|^{1/q_k^{(h)}}$ e, per $s^{(i)} \neq 0$, $s_k' = s_k |s^{(i)}|_h^{-q_k^{(h)}}$, $k = 0, \dots, i-1, i+1, \dots, \nu$, $s^{(i)\prime} = (s_0', \dots, s_{i-1}', s_{i+1}', \dots, s_\nu')$. Con $\sigma^{(i)}$ e $\tau^{(i)}$, σ_k' e τ_k', $\sigma^{(i)\prime}$ e $\tau^{(i)\prime}$ indichiamo rispettivamente le parti reali ed i coefficienti dell'immaginario di $s^{(i)}$, s_k' e $s^{(i)\prime}$. È sempre $|s^{(i)\prime}|_h = 1$.

Supponiamo che $P(\tilde{s})$ soddisfi alle $a)$, $b)$, $c)$. Tutti i polinomi P_{j_h}, $h = 1, \dots, r$, sono allora q-quasi-ellittici, onde tutti i numeri m_{j_h}/q_k, $h = 1, \dots, r$; $k = 1, \dots, \nu$, sono interi positivi. I polinomi in λ

$$\tilde{P}_{h-1}(s_0', \dots, s_{i-1}', \lambda, s_{i+1}', \dots, s_\nu') , \qquad h = 1, \dots, r , \tag{9}$$

hanno dunque grado m_{j_h}/q_i qualunque sia $s^{(i)\prime}$. Per $\tau^{(i)\prime} = 0$, $(\sigma_1', \dots, \sigma_{i-1}', \sigma_{i+1}', \dots, \sigma_\nu') \in R^{\nu-1} - \{0\}$ tali polinomi hanno tutti gli zeri con parte immaginaria non nulla qualunque sia $\sigma_0' \in R$. Se invece $(\sigma_1', \dots, \sigma_{i-1}', \sigma_{i+1}', \dots, \sigma_\nu') = 0$ i polinomi (9) hanno $m_{j_{h-1}}/q_i$ zeri nulli qualunque sia $\sigma_0' \in R$, che ora è necessariamente diverso da zero, ed i rimanenti zeri con parte immaginaria non nulla. Ognuno dei polinomi (9) ha dunque per $\tau^{(i)\prime} = 0$ $(m_{j_h} - m_{j_{h-1}})/q_i$ zeri con parte immaginaria non nulla qualunque sia $\sigma^{(i)\prime}$. Per essi riuscirà

$$|\operatorname{Im} \lambda(\sigma^{(i)\prime})| > 4\delta' , \qquad \forall \sigma^{(i)\prime} ,$$

con δ' costante positiva. Per ogni $s^{(i)\prime}$ con $|\tau^{(i)\prime}|_h$ sufficientemente piccolo, $|\tau^{(i)\prime}|_h < \varepsilon'$, ognuno dei polinomi (9) ha quindi $(m_{j_h} - m_{j_{h-1}})/q_i$ zeri tali che

$$|\operatorname{Im} \lambda(s^{(i)\prime})| > 2\delta' .$$

Dal lemma del n. 1 segue che per ogni $s^{(i)\prime}$ fissato è

$$\lim_{|s^{(i)}|_{h-1}\to\infty} |s^{(i)}|_{h-1}^{-\mu(p_{h-1})} P(s_0' |s^{(i)}|_{h-1}^{q_0^{(h-1)}}, \dots, s_{i-1}' |s^{(i)}|_{h-1}^{q_{i-1}^{(h-1)}}, \lambda |s^{(i)}|_{h-1}^{q_i^{(h-1)}}, s_{i+1}' |s^{(i)}|_{h-1}^{q_{i+1}^{(h-1)}}, \dots, s_\nu' |s^{(i)}|_{h-1}^{q_\nu^{(h-1)}}) = s_0'^{\,n-j_h} \tilde{P}_{h-1}(s_0', \dots, s_{i-1}', \lambda, s_{i+1}', \dots, s_\nu'), \tag{10}$$
$$h = 1, \dots, r ,$$

uniformemente rispetto ad $s^{(i)\prime}$. Per $h = r$ i due polinomi in λ a primo ed a secondo membro di (10) sono entrambi di grado m_n/q_i, qualunque sia $s^{(i)\prime}$. Per $|s^{(i)}|_{r-1} \to +\infty$, $s^{(i)\prime}$ fissato, gli zeri del polinomio a primo membro tendono a quelli del polinomio a secondo membro uniformemente rispetto ad $s^{(i)'}$. Per gli zeri di $P(\tilde{s})$, considerato come polinomio in s_i, risulta quindi

$$(11) \qquad | s_i(s^{(i)}) | \leqslant C' | s^{(i)} |_{r-1}^{q_i^{(r-1)}} \leqslant C(| s_0 |^{q_i/p_{r-1}} + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{\nu} | s_k |^{q_i/q_k})$$

per $| s^{(i)} |_{r-1}$ sufficientemente grande; inoltre per $(m_n - m_{j_{r-1}})/q_i$ di tali zeri è

$$(12) \qquad | \operatorname{Im} s_i(s^{(i)}) | > \delta'(\sum_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{\nu} | s_k |^{1/q_k^{(r-1)}})^{q_i^{(r-1)}} > C_1\delta'(| s_0 |^{q_i/p_{r-1}} + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{\nu} | s_k |^{q_i/q_k})$$

per $| s^{(i)}|_{r-1}$ sufficientemente grande e $| \tau^{(i)} |_{r-1} < \varepsilon' | s^{(i)} |_{r-1}$, mentre gli altri $m_{j_{r-1}}/q_i$ tendono a zero per $| s^{(i)} |_{r-1} \to +\infty$ se $(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_\nu) = 0$. Per $h < r$ ed $s_0 \neq 0$, il polinomio in λ a secondo membro di (10) ha effettivamente grado m_{j_h}/q_i, mentre i coefficienti delle potenze di λ di esponente $> m_{j_h}/q_i$ e $< m_{j_{h-1}}/q_i$ del polinomio a primo membro tendono a zero per $| s^{(i)} |_{h-1} \to +\infty$. Ragionando come in [2] [8]), si vede allora che il polinomio in λ a primo membro di (10) ha $(m_n - m_{j_h})/q_i$ zeri il cui modulo tende all'infinito per $| s^{(i)} |_{h-1} \to +\infty$, $s_0 \neq 0$ e i restanti m_{j_h}/q_i che tendono agli zeri del polinomio in λ a secondo membro. Vi sono dunque $m_{j_{h-1}}/q_i$ zeri di $P(\tilde{s})$, considerato come polinomio in s_i, che tendono a zero per $| s^{(i)} |_{h-1} \to +\infty$, $s_0 \neq 0$, $(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_\nu) = 0$ ed $(m_{j_h} - m_{j_{h-1}})/q_i$ zeri tali che

$$| \operatorname{Im} s_i(s^{(i)}) | > C_1\delta'(| s_0 |^{q_i/p_{h-1}} + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{\nu} | s_k |^{q_i/q_k})$$

$\forall\ s^{(i)} \in C^\nu$ con $s_0 \neq 0$, $| \tau^{(i)} |_{h-1} < \varepsilon' | s^{(i)} |_{h-1}$, $| s^{(i)} |_{h-1}$ sufficientemente grande e

$$| s_i(s^{(i)}) | \leqslant C(| s_0 |^{q_i/p_{h-1}} + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq 1}}^{\nu} | s_k |^{q_i/q_k})$$

per $| s^{(i)} |_{h-1}$ sufficientemente grande, $s_0 \neq 0$. Se $s_0 = 0$, considerando la (10) per $h = r$ e ragionando come qui sopra si vede che $P(\tilde{s})$, considerato come polinomio in s_i, ha m_n/q_i zeri che soddisfano alle (11) e (12).

---

[8]) Si veda la nota [4]).

Tenuto conto che

$$\Big(\sum_{\substack{0\\k\neq i}}^{\nu}|s_k|\Big)^{\gamma} - C_1 \leqslant \sum_{\substack{0\\k\neq i}}^{\nu}|s_k|^{1/q_k^{(h)}} \leqslant \sum_{\substack{0\\k\neq i}}^{\nu}|s_k| + C_2$$

$\gamma = \inf\limits_{h,k}(1/q_k^{(h)})$, vale dunque il

Teorema 2: *Se P è $(\tilde{q}^{(0)}, \ldots, \tilde{q}^{(r-1)})$-quasi-ellittico, allora per ogni $i = 1, \ldots, \nu$, esso ha $(m_{j_h} - m_{j_{h-1}})/q_i$, $h = 1, \ldots, r$, zeri $s_i(s^{(i)})$ tali che*

$$|s_i(s^{(i)})| \leqslant C\Big(|s_0|^{q_i/p_{h-1}} + \sum_{\substack{1\\k\neq i}}^{\nu}|s_k|^{q_i/q_k}\Big),$$

per ogni $s^{(i)}$ con $\sum\limits_{\substack{0\\k\neq i}}^{\nu}|s|_k > L$ e

$$|\operatorname{Im} s_i(s^{(i)})| > \delta\Big(|s_0|^{q_i/p_{h-1}} + \sum_{\substack{1\\k\neq i}}^{\nu}|s_k|^{q_i/q_k}\Big),$$

per ogni $s^{(i)}$ con $\sum\limits_{\substack{0\\k\neq i}}^{\nu}|\tau_k| < \varepsilon\sum\limits_{\substack{0\\k\neq i}}^{\nu}|\sigma_k|$, $\sum\limits_{\substack{0\\k\neq i}}^{\nu}|s_k| > L$; C, δ, ε, L costanti positive.

3. Chiameremo *fortemente* $(\tilde{q}^{(0)}, \ldots, q^{(r-1)})$*-quasi-ellittico* un polinomio $P(\tilde{s})$ soddisfacente alle *a*), *b*), e

$$c')\quad \operatorname{Re}\tilde{P}_{h-1}(\tilde{\sigma}) \neq 0, \qquad \forall\, \tilde{\sigma} \in \Gamma = \{\tilde{\sigma} \in R^{\nu+1};\quad \sigma \in R^{\nu} - \{0\},\quad \sigma_0 \in R\},$$
$$h = 1, \ldots, r,$$

$\operatorname{Re} c_{00} \neq 0$.

In tal caso risulta

$$\operatorname{Re}\tilde{P}_0(\tilde{\sigma}) = \sum_{\substack{0\\m_j = m^*}}^{j_1} \sigma_0^{j_1-j}\operatorname{Re}P'_j(\sigma) \neq 0, \qquad \forall\,\tilde{\sigma} \in R^{\nu+1} - \{0\},$$

onde $\operatorname{Re}\tilde{P}_0(\tilde{\sigma})$ ha sempre lo stesso segno in $R^{\nu+1} - \{0\}$. $\tilde{P}_0$ è allora fortemente quasi-ellittico e quindi i numeri j_1 e m_{j_1}/q_k, $k = 1, \ldots, \nu$, sono tutti pari; $\operatorname{Re}\tilde{P}_0(\tilde{\sigma})$ ha in $R^{\nu+1} - \{0\}$ lo stesso segno di $\operatorname{Re} c_{00}$.

Anche P_{j_1} è fortemente quasi-ellittico e $\operatorname{Re} P'_{j_1}(\sigma)$ha in $R^\nu - \{0\}$ lo stesso segno di $\operatorname{Re} \widetilde{P}_0(\bar{\sigma})$.

Per $\nu \geqslant 2$ Γ è connesso, onde ciascuna delle $\operatorname{Re} \widetilde{P}_{h-1}(\bar{\sigma})$, $h = 2, \ldots, r$, conserverà ivi sempre lo stesso segno. D'altra parte per $j = j_1 + 1, \ldots, j_2$, è

$$\frac{|\operatorname{Re} P'_j(\sigma)|}{|\operatorname{Re} P'_{j_1}(\sigma)|} \leqslant C\, |\sigma|^{m_j^* - m_{j_1}}, \qquad m_j^* > m_{j_1},$$

e quindi

$$\lim_{|\sigma|\to 0} \frac{\operatorname{Re} \widetilde{P}_1(\bar{\sigma})}{\operatorname{Re} P'_{j_1}(\sigma)} = \sigma_0^{j_2 - j_1}, \qquad \forall\, \sigma_0 \in R\,.$$

$\sigma_0^{j_2 - j_1}$ deve quindi avere sempre lo stesso segno per ogni $\sigma_0 \in R - \{0\}$, onde anche j_2 deve essere pari. $\operatorname{Re} \widetilde{P}_1(\bar{\sigma})$ ha dunque in Γ lo stesso segno di $\operatorname{Re} P'_{j_1}(\sigma)$ ossia quello di $\operatorname{Re} c_{00}$. Di questo stesso segno sarà anche $\operatorname{Re} P'_{j_2}(\sigma) = \operatorname{Re} \widetilde{P}_1(0, \sigma)$ per ogni $\sigma \in R^\nu - \{0\}$. P_{j_2} è perciò fortemente quasi-ellittico e quindi i numeri m_{j_2}/q_k, $k = 1, \ldots, \nu$, sono tutti pari.

Se $\nu = 1$, ognuna delle $\operatorname{Re} \widetilde{P}_{h-1}(\bar{\sigma})$, $h = 2, \ldots, r$, conserverà lo stesso segno in ciascuno dei due semipiani $\sigma > 0$ e $\sigma < 0$. È ancora

$$\lim_{|\sigma|\to 0} \frac{\operatorname{Re} \widetilde{P}_1(\bar{\sigma})}{\operatorname{Re} P'_{j_1}(\sigma)} = \sigma_0^{j_2 - j_1},$$

onde j_2 deve essere ancora pari. $\operatorname{Re} \widetilde{P}_1(\bar{\sigma})$ ha quindi lo stesso segno di $\operatorname{Re} P'_{j_1}(\sigma)$, ossia ancora quello di $\operatorname{Re} c_{00}$, sia per $\sigma > 0$ che per $\sigma < 0$. Si giunge così anche in questo caso alle stesse conclusioni del caso $\nu \geqslant 2$, ove soltanto si ponga $q = q_1 = 1$.

Allo stesso modo si ragiona sugli altri polinomi $\widetilde{P}_{h-1}(\bar{\sigma})$.

Sul polinomio $\operatorname{Re} P(\bar{\sigma})$ si possono ripetere i ragionamenti che provano il teorema 1. Vale dunque il

TEOREMA 3: *Se P è fortemente $(\bar{q}^{(0)}, \ldots, \bar{q}^{(r-1)})$-quasi-ellittico tutte le $\operatorname{Re} \widetilde{P}_{h-1}(\bar{\sigma})$, $h = 1, \ldots, r$, hanno in Γ lo stesso segno di $\operatorname{Re} c_{00}$; di tale segno sono pure le $\operatorname{Re} P'_{j_h}(\sigma)$, $h = 1, \ldots, r$, in $R^\nu - \{0\}$, cioè i polinomi P_{j_h} sono tutti fortemente quasi-ellittici, ed i numeri j_h e m_{j_h}/q_k, $h = 1, \ldots, r$; $k = 1, \ldots, \nu$, sono tutti pari. Inoltre per ogni $\bar{\sigma} \in R^{\nu+1}$ con $|\sigma_0| + |\sigma| \geqslant C_0$*

$$\operatorname{Re} c_{00} \cdot \operatorname{Re} P(\bar{\sigma}) \geqslant C_1 \sum_0^r{}_h\, \sigma_0^{n - j_h} \sum_1^\nu{}_k\, \sigma_k^{m_{j_h}/q_k}\,.$$

Osserviamo che indicato con a_{hk} il coefficiente di $s_k^{m j_h/q_k}$, $k = 1, \ldots, \nu$, in P'_{j_k}, $h = 1, \ldots, r$, anche le $\operatorname{Re} a_{hk}$ hanno tutte lo stesso segno di $\operatorname{Re} c_{00}$. Anche il polinomio

$$\Pi(\tilde{s}) = c_{00} s_0^n + \sum_1^r {}_h\, s_0^{n-j_h} \sum_1^\nu {}_k a_{hk} s_k^{m j_h/q_k} = \Pi_0(s) s_0^n + \sum_1^r {}_h s_0^{n-j_h} \Pi_h(s)$$

soddisfa quindi alle a), b), c') onde per il corollario del teorema 1 *i polinomi P, P' e Π sono tutti egualmente forti.*

Per $t \in [0, 1]$ e $h = 1, \ldots, r$ poniamo ora

$$\tilde{P}_{h-1}(t;\, \tilde{s}) = s_0^{j_h - j_{h-1}} \Pi_{h-1}(s) + \Pi_h(s) + t[\tilde{P}_{h-1}(\tilde{s}) - s_0^{j_h - j_{h-1}} \Pi_{h-1}(s) - \Pi_h(s)].$$

Da

$$\operatorname{Re} c_{00} \cdot \operatorname{Re} \tilde{P}_{h-1}(\tilde{\sigma}) > 0 \quad \forall \tilde{\sigma} \in \Gamma\,, \quad h = 1, \ldots, r\,,$$

e

$$\operatorname{Re} c_{00} \cdot \operatorname{Re} \Pi_h(\sigma) > 0 \quad \forall \sigma \in R^\nu - \{0\}\,, \quad h = 0, \ldots, r\,,$$

segue che se

$$\operatorname{Re} c_{00} \cdot \operatorname{Re} [\tilde{P}_{h-1}(\tilde{\sigma}) - \sigma_0^{j_h - j_{h-1}} \Pi_{h-1}(\sigma) - \Pi_h(\sigma)] < 0\,,$$

allora il suo modulo è necessariamente minore di

$$\operatorname{Re} c_{00} \cdot \operatorname{Re} [\sigma_0^{j_h - j_{h-1}} \Pi_{h-1}(\sigma) + \Pi_h(\sigma)]\,.$$

È dunque

$$\operatorname{Re} c_{00} \cdot \operatorname{Re} \tilde{P}_{h-1}(t;\, \tilde{\sigma}) > 0\,, \quad \forall \tilde{\sigma} \in \Gamma \quad \text{e} \quad \forall t \in [0, 1]\,, \quad h = 1, \ldots, r\,.$$

Per ogni $\sigma \in R^\nu - \{0\}$ i polinomi in λ $P_{h-1}(t;\, \lambda, \sigma)$ abbiano $n^+_{0,\,h-1}(t)$ zeri con coefficiente dell'immaginario positivo ed $n^-_{0,\,h-1}(t)$ zeri con coefficiente dell'immaginario negativo. È $n^+_{0,\,h-1}(t) + n^-_{0,\,h-1}(t) = j_h - j_{h-1}$. Per $\nu \geq 2$ i numeri $n^+_{0,\,h-1}(t)$ ed $n^-_{0,\,h-1}(t)$ non dipendono da $\sigma \in R^\nu - \{0\}$ essendo questo insieme connesso in R^ν. Tali numeri non dipendono neppure da t, poichè per ogni $t \in [0, 1]$ nessuno dei polinomi considerati può avere zeri reali. È dunque

$$(13) \qquad n^+_{0,\,h-1}(1) = n^+_{0,\,h-1}(0) = (j_h - j_{h-1})/2 = n^-_{0,\,h-1}(0) = n^-_{0,\,h-1}(1)\,.$$

Secondo quanto è stato provato al n. 2, qualunque sia $t \in [0, 1]$ i polinomi in λ $\widetilde{P}_{h-1}(t; \sigma_0, \ldots, \sigma_{i-1}, \lambda, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_\nu)$ $i = 1, \ldots, \nu$; $h = 1, \ldots, r$, hanno sempre $(m_{j_h} - m_{j_{h-1}})/q_i$ zeri con parte immaginaria non nulla per ogni $\sigma^{(i)} \in R^\nu - \{0\}$ ed $m_{j_{h-1}}/q_i$ zeri con parte immaginaria non nulla se $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i-1}, \ldots, \sigma_\nu) \in R^{\nu-1} - \{0\}$, nulli per $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_\nu) = 0$. Siano $n^+_{i,h-1}(t)$ ed $n^-_{0,h-1}(t)$ quelli fra i primi con coefficiente dell'immaginario rispettivamente positivo e negativo. Se $\nu \geqslant 2$ tali numeri non dipendono da $\sigma^{(i)} \in R^\nu - \{0\}$ poichè altrimenti essendo tale insieme connesso in R^ν il polinomio considerato avrebbe o uno zero reale per un $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_\nu) \in R^{\nu-1} - \{0\}$, o uno zero reale non nullo per $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_\nu) = 0$, $\sigma_0 \neq 0$, oppure un ulteriore zero nullo per $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_\nu) = 0$, $\sigma_0 \neq 0$. Essi non dipendono neppure da t poichè altrimenti fissato un $\sigma^{(i)} \in R^\nu - \{0\}$ con $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_\nu) \neq 0$, vi sarebbe un $t \in [0, 1]$ in corrispondenza al quale il polinomio in λ $\widetilde{P}_{h-1}(t; \sigma_0, \ldots, \sigma_{i-1}, \lambda, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_\nu)$ avrebbe uno zero reale. È quindi

$$(14) \quad n^+_{i,h-1}(1) = n^+_{i,h-1}(0) = n^-_{i,h-1}(0) = n^-_{i,h-1}(1) = (m_{j_h} - m_{j_{h-1}})/2q_i .$$

Se $\nu = 1$ ciascuno dei polinomi $\widetilde{P}_{h-1}(t; \tilde{s})$ è divisibile per $s_1^{m_{j_{h-1}}/q_1}$ ed i polinomi $Q'_{h-1}(t; \tilde{\sigma}) = \sigma_1^{-m_{j_{h-1}}/q_1} \widetilde{P}_{h-1}(t; \tilde{\sigma})$ sono tutti fortemente quasi-ellittici. La validità delle (13) e (14) è allora caso particolare di un risultato di G. C. Barozzi [1] [9]).

Ricordando il teorema 2 ed il teorema 1 di [2] si conclude che

TEOREMA 4: *Se P è fortemente $(\tilde{q}^{(0)}, \ldots, \tilde{q}^{(r-1)})$-quasi-ellittico il polinomio $P(s_0, \sigma)$ ha per $h = 1, \ldots, r$, $(j_h - j_{h-1})/2$ zeri $s_0(\sigma)$ con*

$$\operatorname{Im} s_0(\sigma) > \delta \mid \sigma \mid^{p_{h-1}} ,$$

ed altrettanti con

$$\operatorname{Im} s_0(\sigma) < - \delta \mid \sigma \mid^{p_{h-1}} ,$$

per $\sum_1^\nu {}_k \mid \sigma_k \mid > L$ e ciascuno dei polinomi $P(\sigma_0, \ldots, \sigma_{i-1}, s_i, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_\nu)$, $i = 1, \ldots, \nu$, $(m_{j_h} - m_{j_{h-1}})/2q_i$ zeri $s_i(\sigma^{(i)})$ con

$$\operatorname{Im} s_i(\sigma^{(i)}) > \delta(\mid \sigma_0 \mid^{q_i/p_{h-1}} + \sum_{\substack{1 \\ k \neq i}}^{\nu} {}_k \mid \sigma_k \mid^{q_i/q_k})$$

---

[9]) Tale risultato, che riguarda il caso di polinomi fortemente quasi-ellittici in un numero qualunque di variabili, è provato con ragionamenti simili a quelli tenuti qui sopra.

ed altrettanti con

$$\operatorname{Im} s_i(\sigma^{(i)}) < -\delta\big(|\sigma_0|^{q_i/p_{h-1}} + \sum_{\substack{1\\k\neq i}}^{\nu}{}_k |\sigma_k|^{q_i/q_k}\big)\,, \qquad h = 1, \ldots, r\,,$$

per $\sum_{\substack{0\\k\neq i}}^{\nu}{}_k |\sigma_k| > L$; *L e* δ *costanti positive.*

BIBLIOGRAFIA

[1] Barozzi G. C.: *Sul multi-indice degli operatori quasi-ellittici,* Boll. U.M.I., (3), 19, 1964.

[2] Cattabriga L.: *Su una classe di polinomi ipoellittici,* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 36, 1966.

[3] Friberg J.: *Asymptotic behaviour of spectral functions for multi quasi-elliptic differential operators.* Conferenza tenuta il 2 agosto 1965 al « Séminaire de Mathématiques Supérieures » dell'Università di Montréal.

[4] Hörmander L.: *Linear partial differential operators,* Springer, 1963.

[5] Michailov V. P.: *Sul comportamento all'infinito di una certa classe di polinomi,* Doklady Akad. Nauk SSSR, 164, n. 3, 1965.

Manoscritto pervenuto in redazione il 3 gennaio 1966.